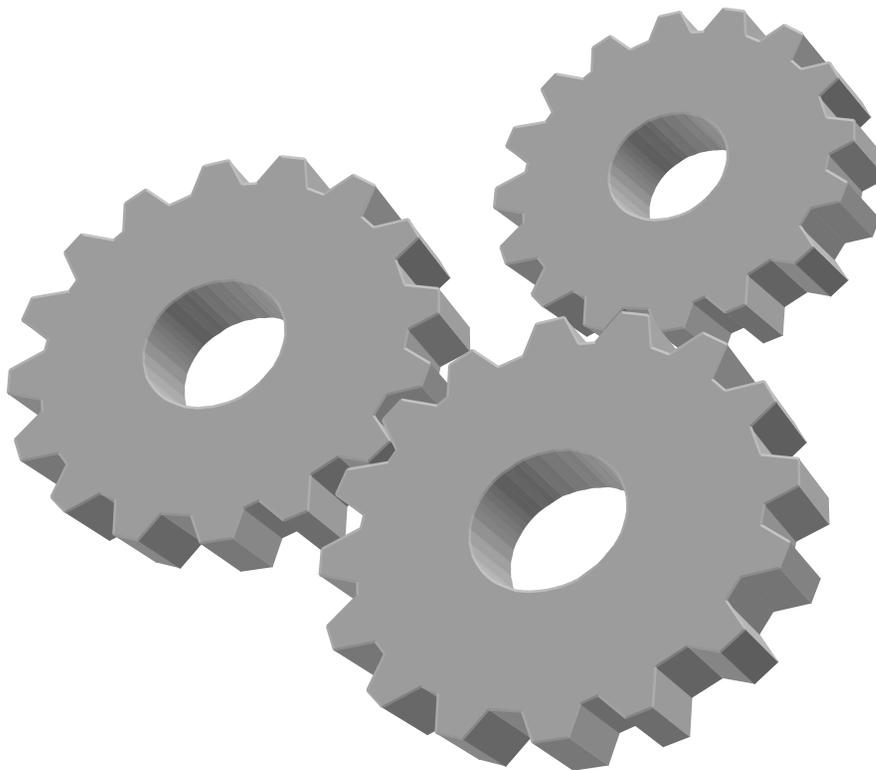


<http://computacaografica.ic.uff.br/conteudocap2.html>



aula 8

Transformações Geométricas no Plano e no Espaço

2016/2 – IC / UFF

Definição

- Transformações geométricas são operações que podem ser utilizadas para alterar de algumas características como posição, orientação, forma ou tamanho do objeto a ser desenhado.

Operações com pontos ou vetores

Conceitos:

- multiplicação de vetores (u, v, w) e matrizes T
- soma de vetores.

- Vetores \Rightarrow (linha ou $x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$).

- Transposta ($T^T_{i,j} = T_{j,i}$)

- $(AB)^T = B^T A^T$

$$(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

- Vetor coluna ($n \times 1$): $T(u)$
- Vetor linha ($1 \times n$): $(u') T^T$

Matrizes

- Para executar uma transformação podemos usar operações algébricas (caras computacionalmente).
- O uso de matrizes é mais interessante para esse objetivo
- As matrizes podem fazer as transformações e **combiná-las** de forma mais eficiente.
- Elas também são mais eficientes na **armazenagem** das figuras presentes no seu cenário

Pontos e matrizes

- Nos espaços bidimensionais, duas coordenadas caracterizam um ponto.
 - $P = [21, 33]$: ponto em duas dimensões.
- Nos espaços tridimensionais, três coordenadas caracterizam um ponto.
 - $P = [20, 2, 10]$: ponto em três dimensões.
- Uma matriz 1×2 ou 2×1 pode ser usada para descrever 1 ponto de um objeto no plano
- Uma matriz $n \times 2$ ou $2 \times n$ para todos os n pontos de um objeto no plano
- Uma matriz 1×3 ou 3×1 pode ser usada para descrever 1 ponto de um objeto no espaço.
- Uma matriz $n \times 3$ ou $3 \times n$ pode ser usada para descrever n pontos de um objeto no espaço

Aritmética de vetores e matrizes

- **Soma e subtração:** os dois operandos devem ter a mesma dimensão
- **Multiplicação por escalar.**
- Inversa
- **Transposta** de uma matriz
 - $[2,3]^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
- **Multiplicação de matrizes**
 - O número de linhas da primeira deve ser igual ao número de colunas da segunda:
 - $n \times 3 \cdot 3 \times n$
 - $3 \times n \cdot n \times 3$

Transformações lineares

- São transformações aplicadas aos pontos, objetos ou ao cenário (universo) como um todo.
- Podem ser
 - Translação
 - Escala
 - Rotação
 - Reflexão
 - Cisalhamento

Transformações simples

- Definição

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$

2. $T(av) = a T(v)$

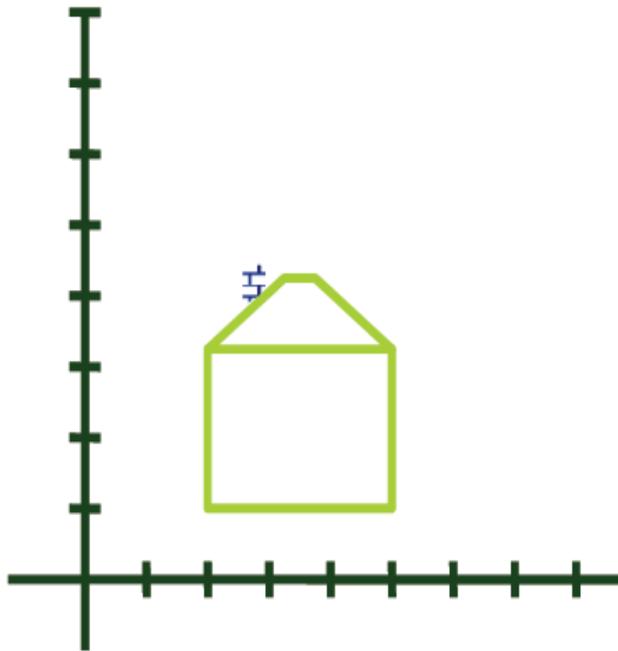
- ◆ u, v vetores de dimensão $n= 2$ ou 3 .

- ◆ T matriz quadradas $n \times n$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Uma curva ou

- Um objeto em CG e' definido pelo seu conjunto de pontos



Transformar um objeto

- É transformar seus pontos

$$T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy \\ bx+dy \end{pmatrix}$$

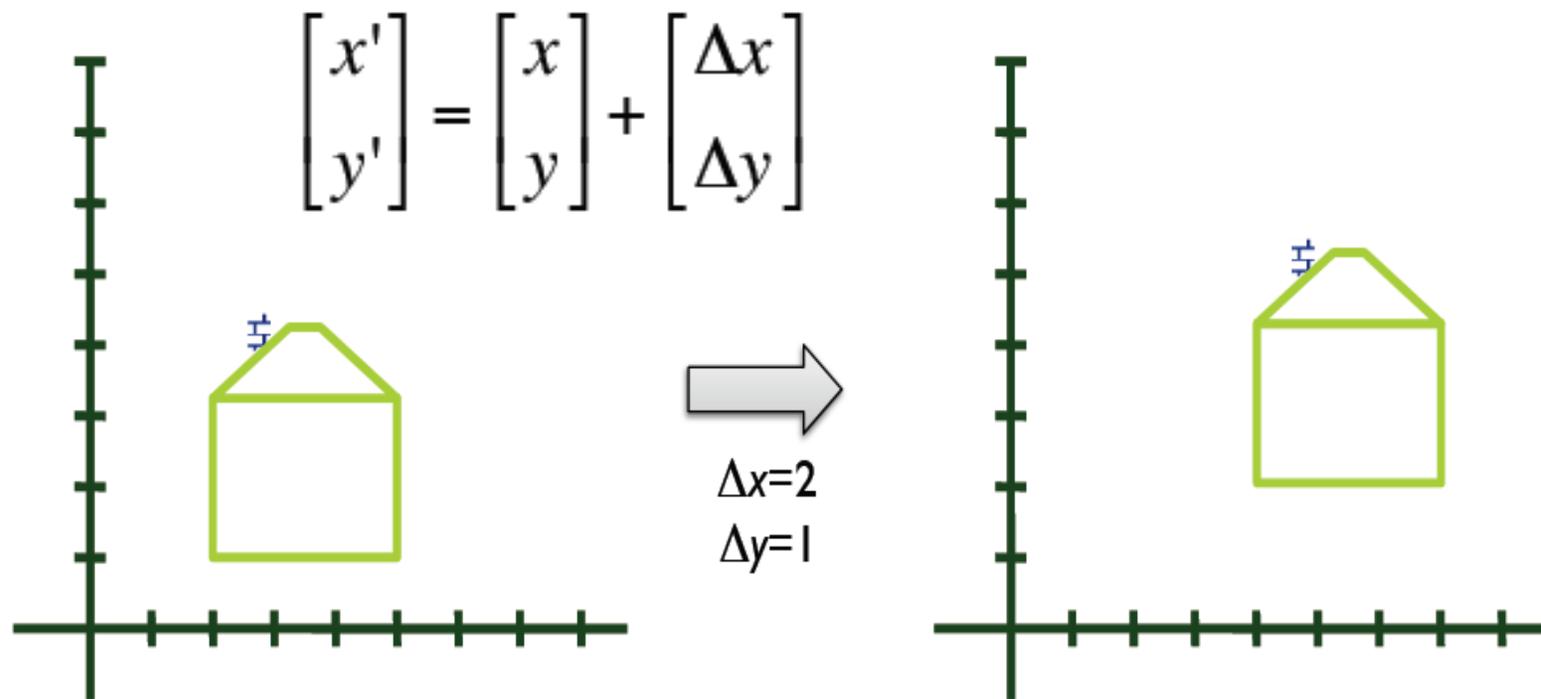
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = Ax + t.$$

Transformações afins

Translação

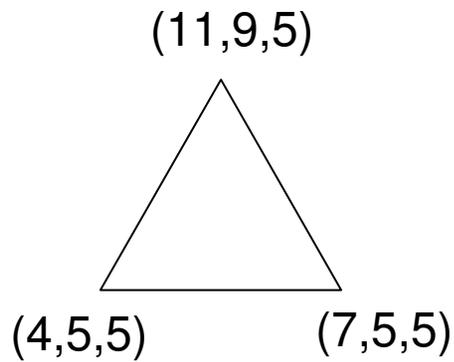
- Significa movimentar o objeto
- Todos os pontos do objeto devem ser movidos para a nova posição.
 - Um ponto $P(x,y,z)$ é movido para a posição $P'(x',y',z')$.
 - Para isso somamos T_x , T_y e T_z às coordenadas de cada ponto a ser transladado.
 - $x' = x + T_x$
 - $y' = y + T_y$
 - $z' = z + T_z$
 - Ou usando um **vetor T de deslocamento**.
 $P' = P + T \rightarrow [x', y', z'] = [x, y, z] + [T_x, T_y, T_z]$

Translação dos vetores ou pontos do objeto

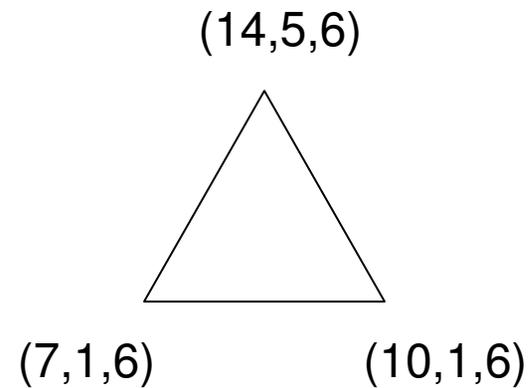


Translação

Transladar todos os pontos
ou
somente pontos chave da figura



$(3, -4, 1)$



Escala

- Significa mudar o tamanho do Objeto
- Multiplica os valores das coordenadas por **constantes uniformes** ou não .
- Um ponto $P (x,y,z)$ passa para a posição P' (x',y',z') .

Quando aplicada em todos os n pontos de um objeto muda a sua proporção nas diversas direções

$$x' = x.Sx$$

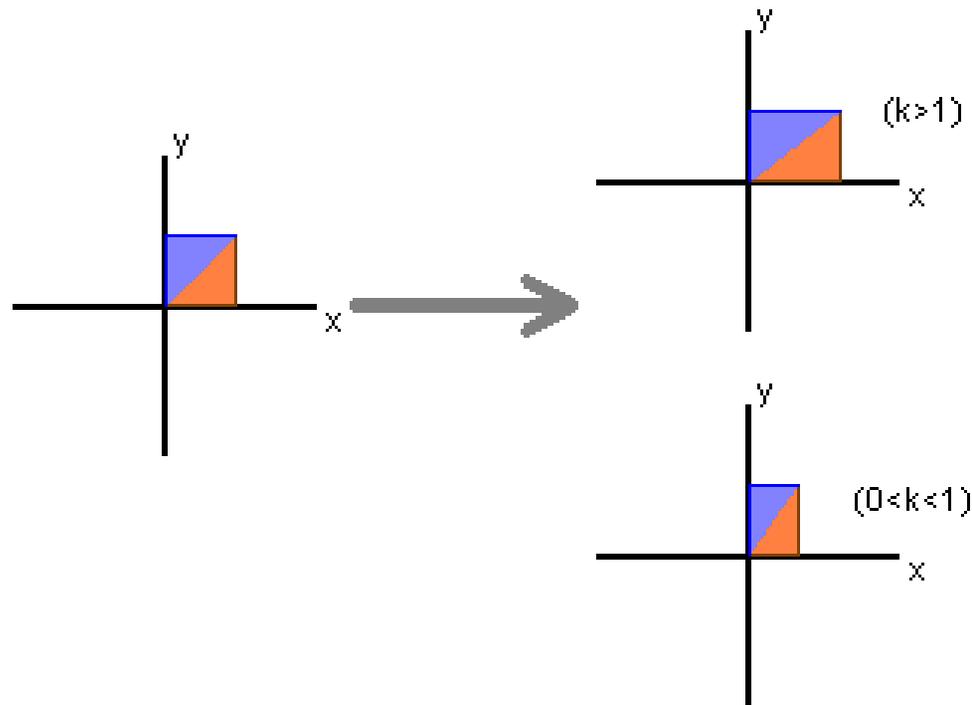
$$y' = y.Sy$$

$$z' = z.Sz$$

$$\text{ou} \quad [x \ y \ z] \begin{pmatrix} Sx & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 \\ 0 & 0 & Sz \end{pmatrix} = [xSx \ ySy \ zSz]$$

Mudança de Escala em uma direção (horizontal)

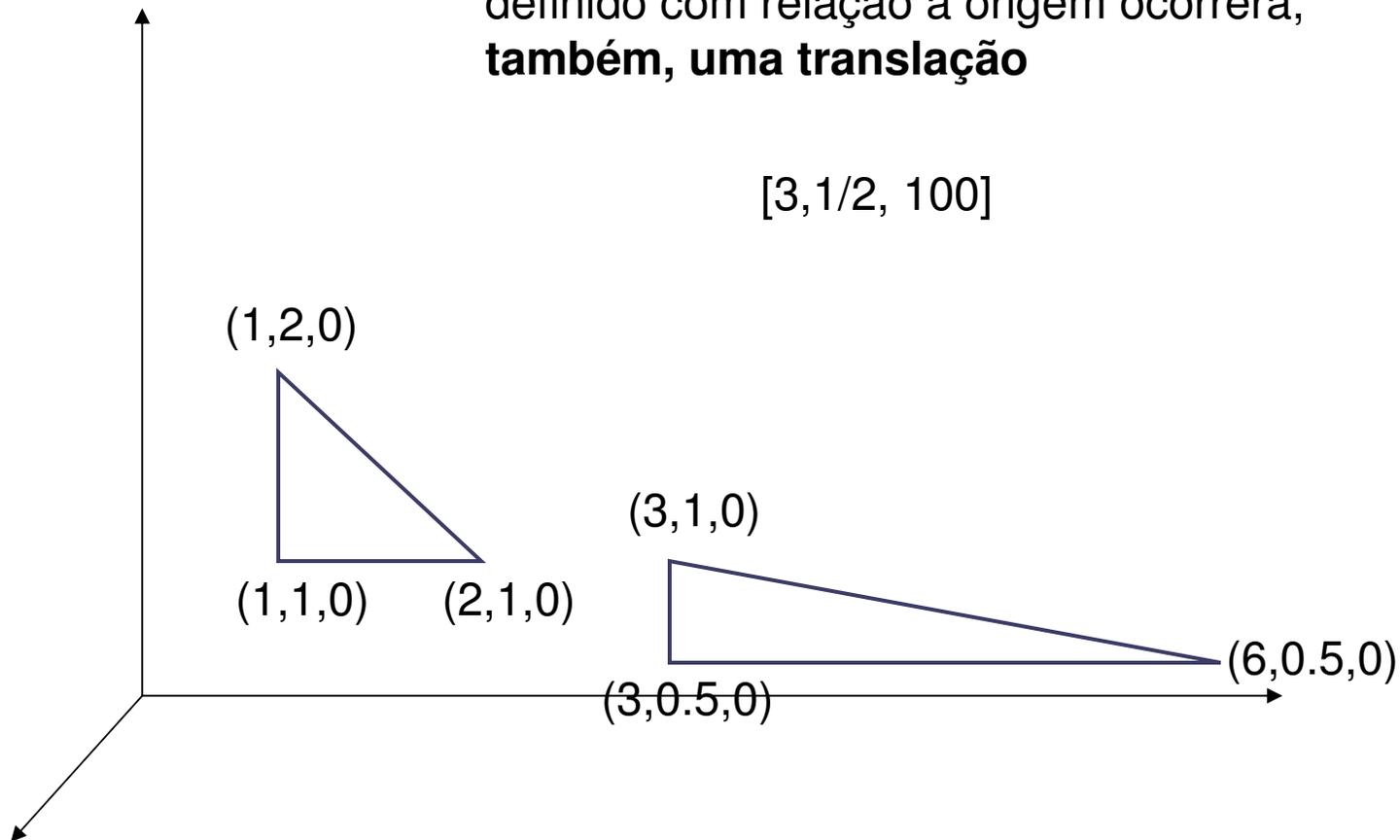
$$S_x = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



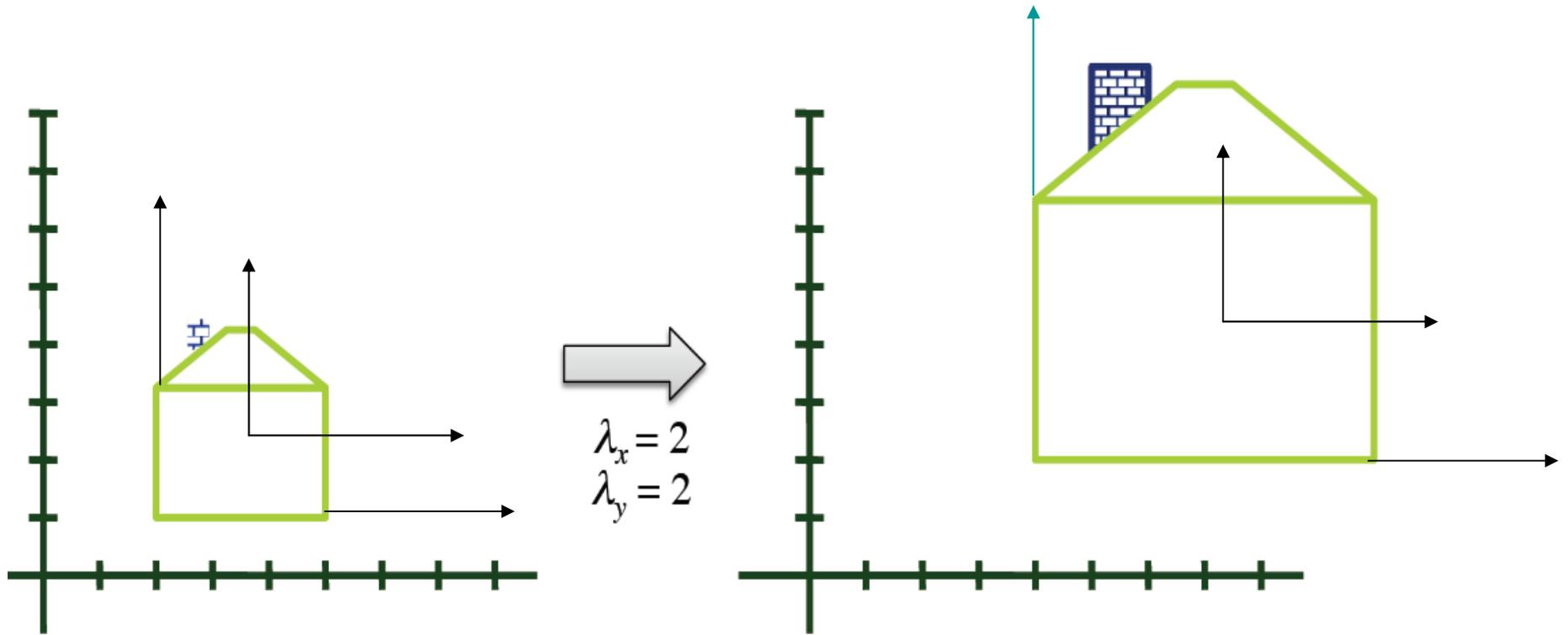
Escala

Quando aplicado em todos os n pontos de um objeto a sua proporção nas diversas direções

*Obs: se o objeto escalonado **não estiver** definido com relação a origem ocorrerá, **também, uma translação**

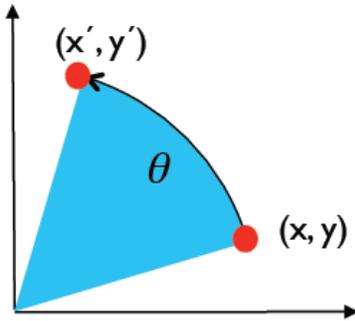


Mudança de escala

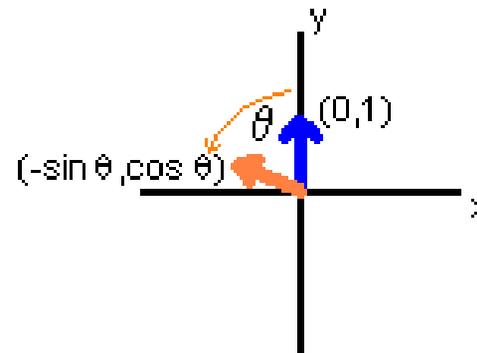
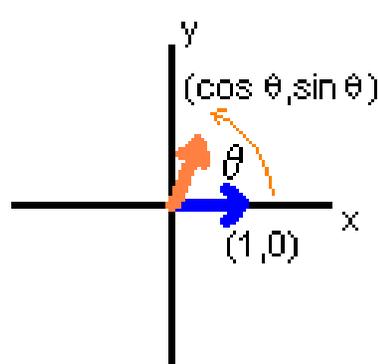
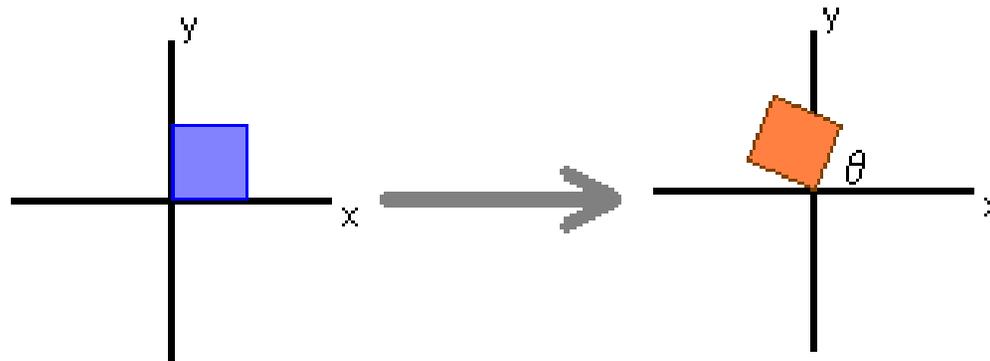


Quando o objeto está na origem do sistema de eixos , ai então, só muda a sua proporção nas diversas direções

Rotação em torno da origem



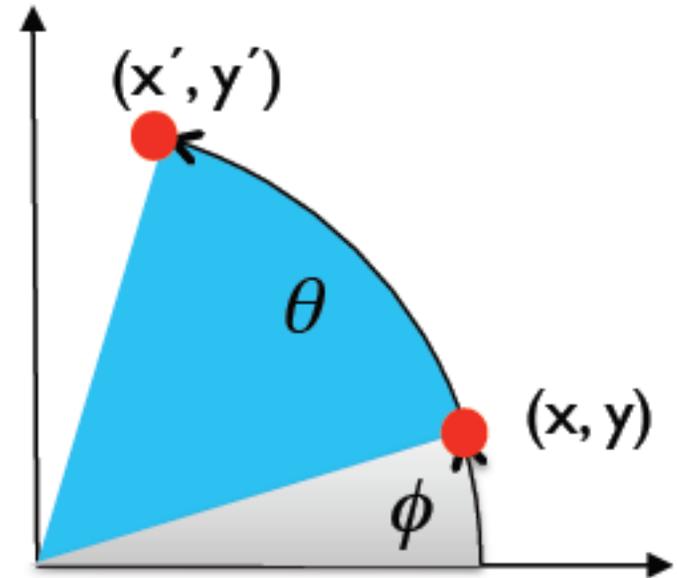
$$R_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$



Como esse chegou a essa fórmula:

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = r \cos(\phi + \theta) \\ y' = r \sin(\phi + \theta) \end{cases}$$



$$\begin{cases} x' = r \cos \phi \cos \theta - r \sin \phi \sin \theta \\ y' = r \cos \phi \sin \theta + r \sin \phi \cos \theta \end{cases}$$

Substituindo $r \cos(\phi)$ e $r \sin(\phi)$ por x e y nas equações anteriores tem-se:

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' = x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases}$$

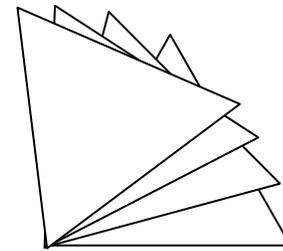
Rotação

- Girar um ponto 2D em torno da origem do sistema de eixos.

$$x' = x\cos(\theta) - y\sin(\theta)$$

$$y' = y\cos(\theta) + x\sin(\theta)$$

$$[x' \ y'] = [x \ y] \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



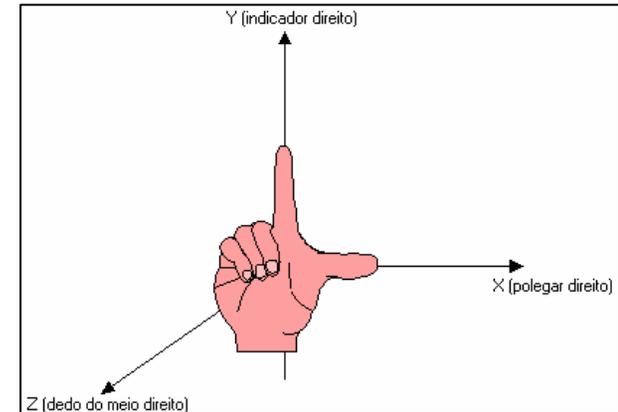
- ***Obs: se o objeto não estiver definido na origem do sistema de coordenadas ocorrerá também uma translação**

Composição de Transformações

- Quando for necessário transformar um objeto em relação a um ponto P arbitrário:
 - ◆ Translada-se P para origem.
 - ◆ Aplicam-se uma ou mais transformações lineares elementares.
 - ◆ Aplica-se a transformação desejada.
 - ◆ Aplicam-se as transformações elementares inversas.
 - ◆ Aplica-se a translação inversa: $-P$

Rotação em torno de um eixo

- Ângulos de Euler
- Regra da mão direita



- **Dedão** esticado no sentido do eixo (eixo x)
- Dedo **indicador** apontando para segundo eixo (eixo y)
- Feixe a mão e veja se ela **aponta** no sentido do **terceiro eixo**, se isto acontecer significa que as três direções formam um **sistema de eixos positivos**

Rotação em 3D

Eixo z =>

$$[x \cos(\alpha) - y \sin(\alpha) \quad x \sin(\alpha) + y \cos(\alpha) \quad z]$$

$$[x' \ y' \ z'] = [x \ y \ z] \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eixo x =>

$$[x \quad y \cos(\beta) - z \sin(\beta) \quad y \sin(\beta) + z \cos(\beta)]$$

$$[x' \ y' \ z'] = [x \ y \ z] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ 0 & -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

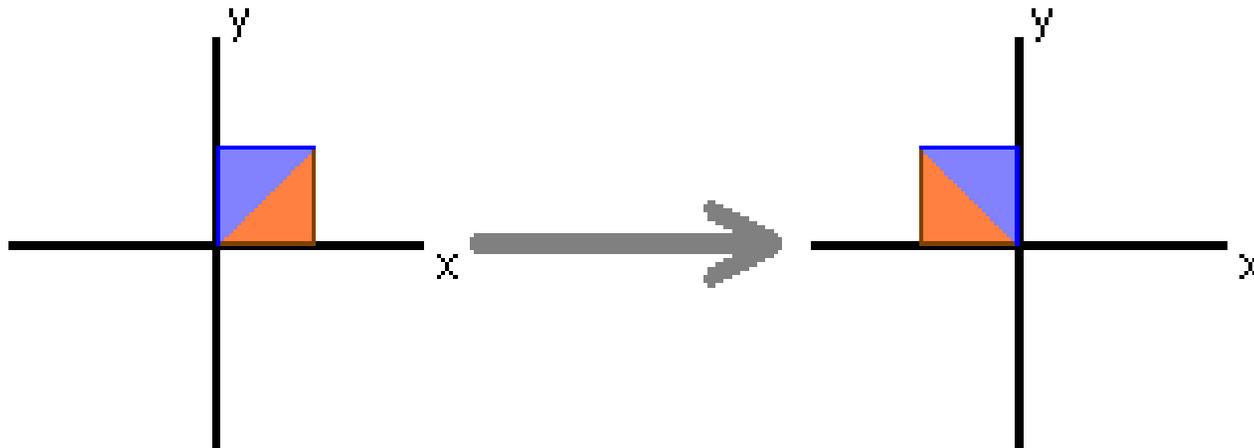
Eixo y =>

$$[x \cos(\delta) + z \sin(\delta) \quad y \quad -\sin(\delta) + z \cos(\delta)]$$

$$[x' \ y' \ z'] = [x \ y \ z] \begin{pmatrix} \cos(\delta) & 0 & -\sin(\delta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\delta) & 0 & \cos(\delta) \end{pmatrix}$$

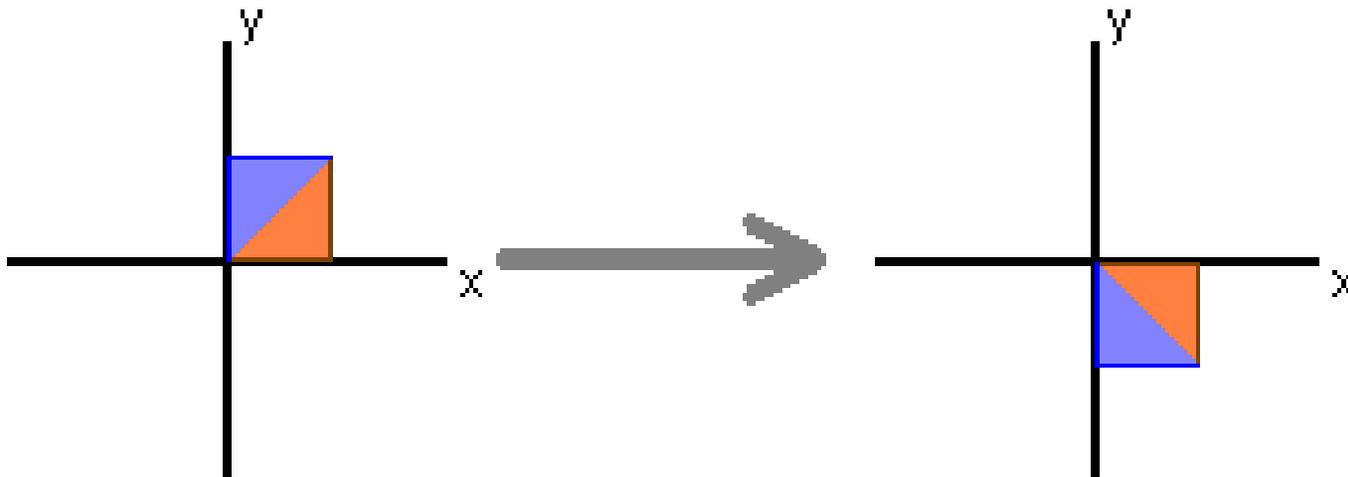
Reflexão em Relação ao Eixo Y

$$Rfl_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



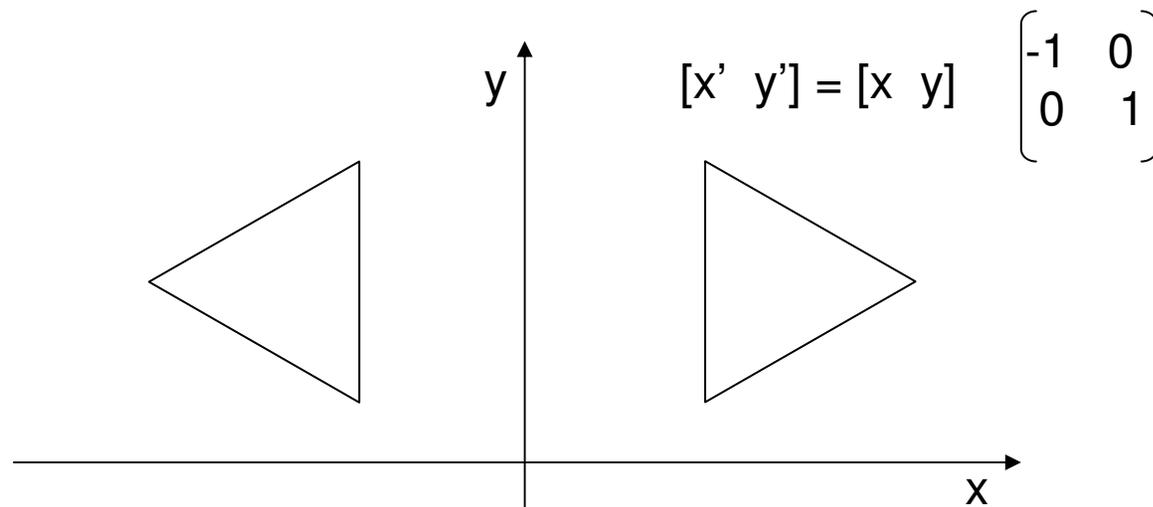
Reflexão em Relação ao Eixo X

$$Rfl_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



Reflexão

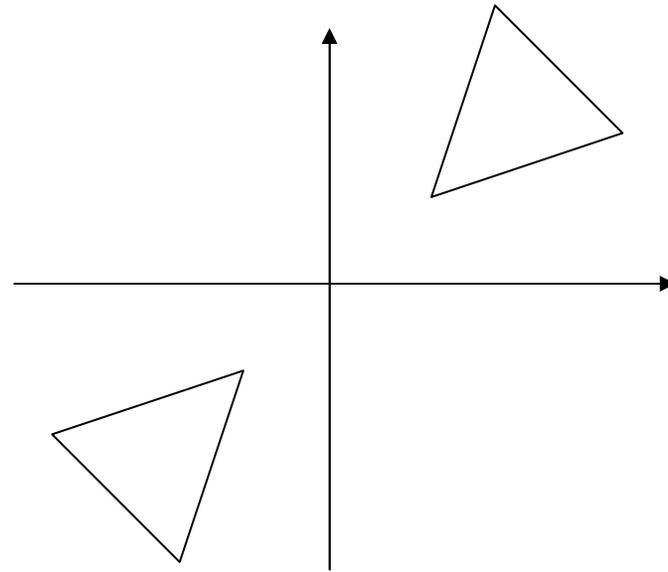
- A reflexão em torno de um eixo (flip) faz com que um objeto seja reproduzido como se ele fosse visto dentro de um espelho.



Reflexão

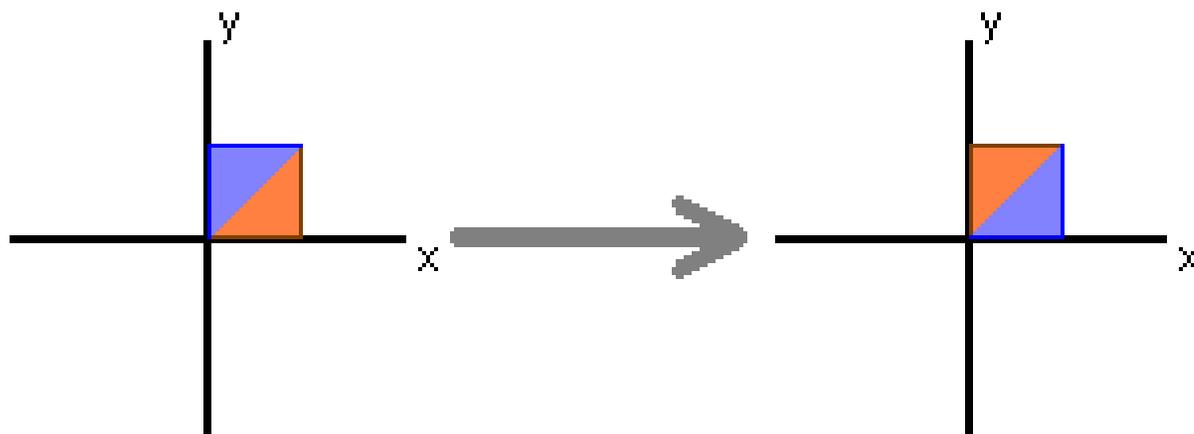
- Em 3D a reflexão pode ser em torno de um dos planos. Ex. Reflexão em torno de x e y :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



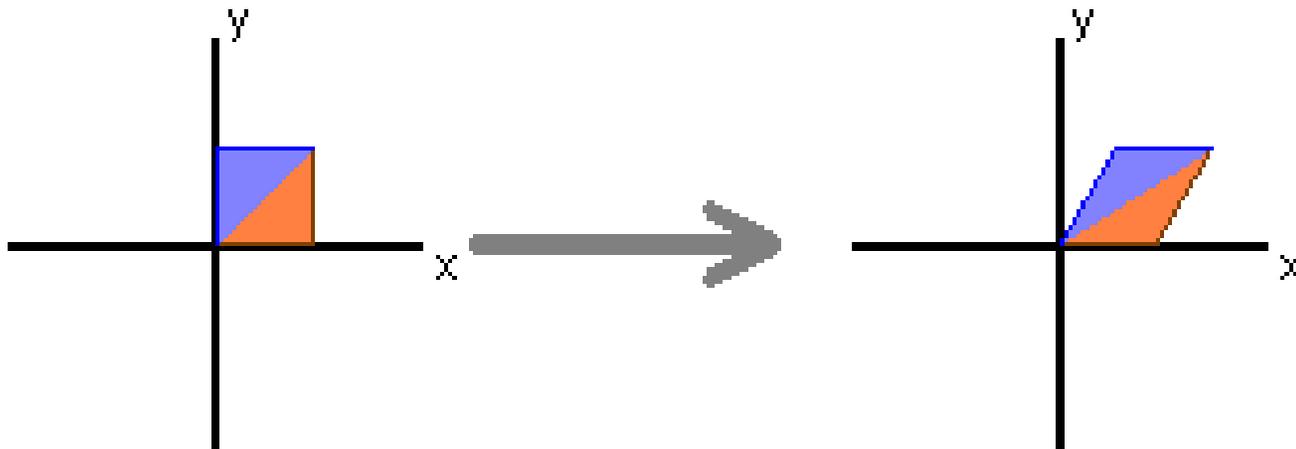
Reflexão em Relação à Reta $y = x$

$$Rfl_{y=x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

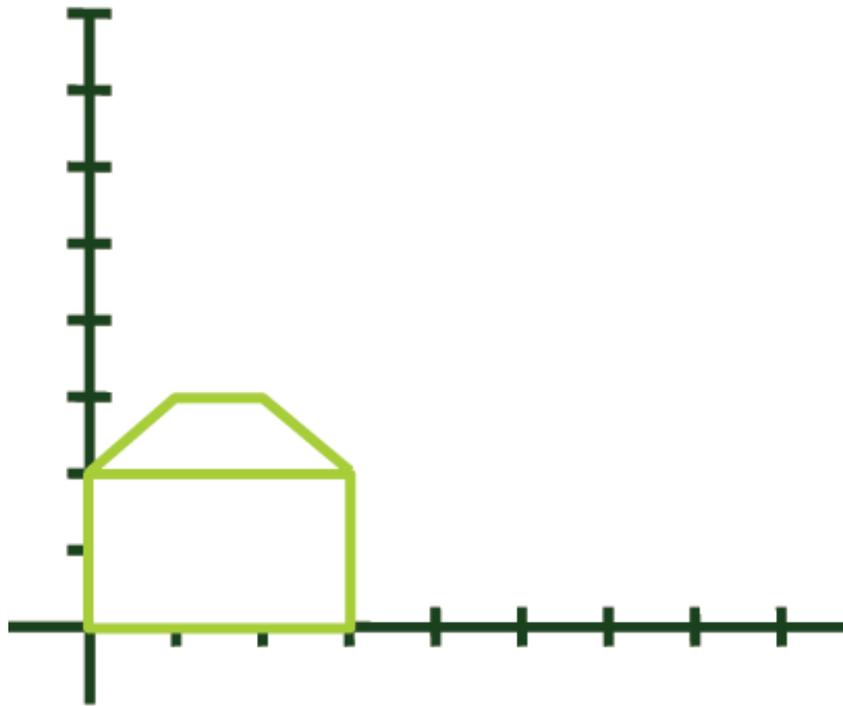


Cisalhamento em X

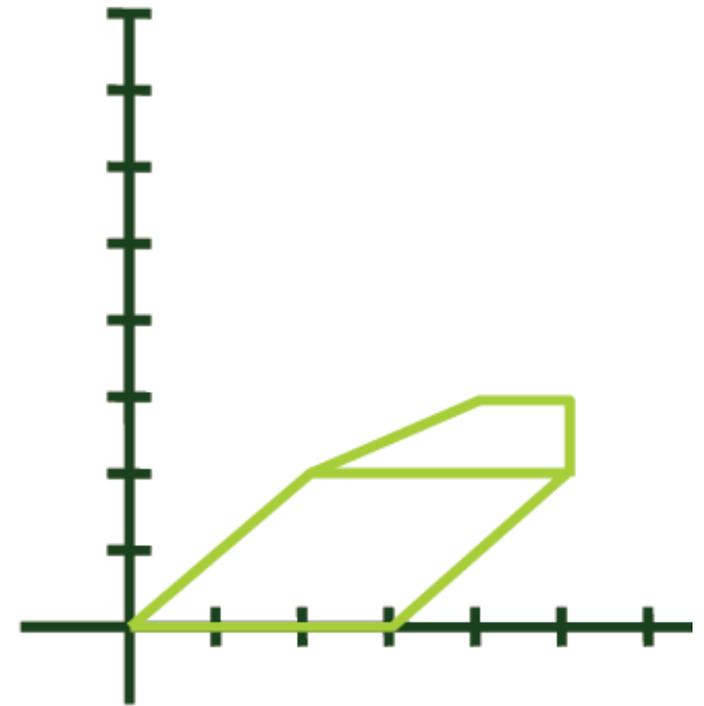
$$C_x = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Cisalhamento na horizontal:



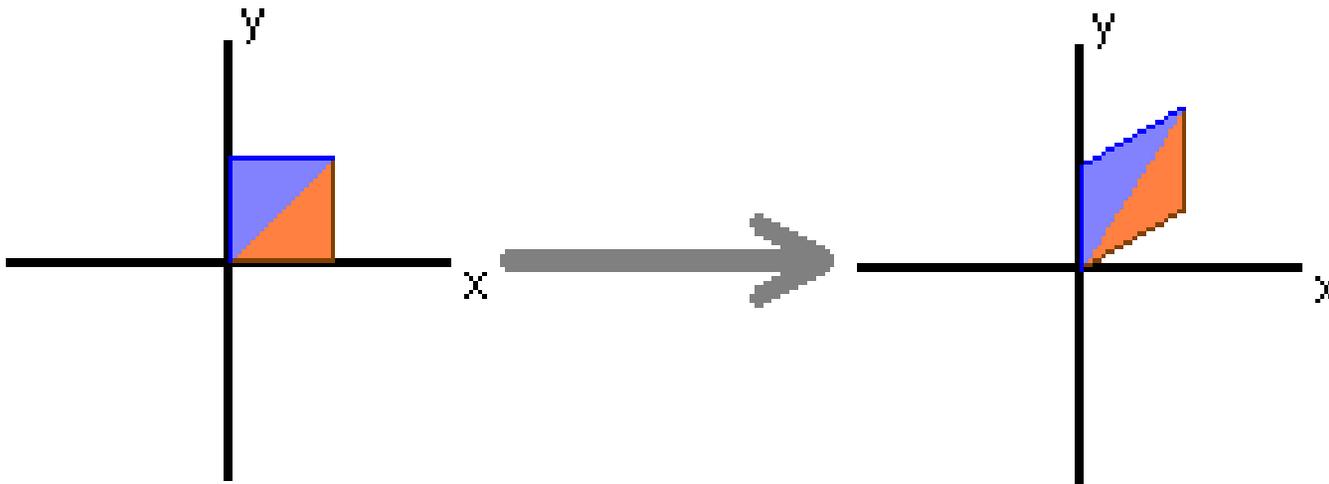
$$\begin{aligned} \kappa_x &= 1 \\ \kappa_y &= 0 \end{aligned}$$



$$\begin{cases} x' = x + \kappa_x y \\ y' = y + \kappa_y x \end{cases}$$

Cisalhamento em Y

$$C_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$



Como fica o cisalhamento em ambos?

1	k'
k''	1

TODAS AS Transformações Lineares Bidimensionais

- 2D
- São representadas por matrizes 2 x 2 ?

$$T \Rightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy \\ bx+dy \end{pmatrix}$$

Transformações de corpo rígido

- Translação
- Reflexão
- Rotação
 - Angulos de Euler em torno de um dos eixos das coordenadas, ou de qualquer eixo

Escopo de Transformações

- Podem ser feitas em serie a aplicadas uma só vez, mas a ordem é muito importante

Como uma única a matriz de transformação de uma serie

- Essa operação de transformação nem sempre é comutativa !!!

Coordenadas Homogêneas

- Reflexão, rotação e escala podem ser executadas com o uso de matrizes
- Mas a transformação de translação não.
- Para solucionar esse e outros problemas é recomendado o uso de **coordenadas homogêneas** para todas as operações.

Coordenadas homogêneas

- no R^2 é um elemento do R^3 com uma relação de escala.

$$P = (x, y, \lambda); \lambda \neq 0, (x/\lambda, y/\lambda, 1)$$

- Um ponto do plano é definido como:
 - ◆ Chamado $P = [x, y, 1]$ em coordenadas homogêneas (uma classe de equivalência).

Em coordenadas homogêneas as matrizes anteriores

- Devem ser 3 x 3 para as mesmas transformações afins bidimensionais.

$$M = \begin{pmatrix} a & c & m \\ b & d & n \\ p & q & s \end{pmatrix}$$

Matriz de Translação

$$M \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+m \\ y+n \\ 1 \end{pmatrix}$$

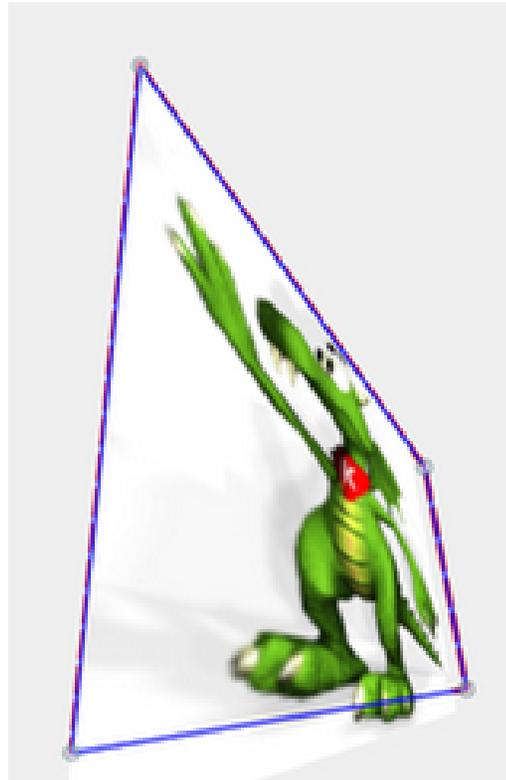
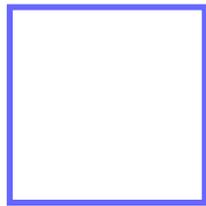
Transformações Lineares

$$M \rightarrow \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy \\ bx+dy \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformação Perspectiva

$$M \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ p & q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ px + qy + 1 \end{pmatrix}$$

Transformação Perspectiva 2D



Efeito em um ponto no infinito

$$M \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ p & q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ px+qy \end{pmatrix}$$

Pontos de Fuga

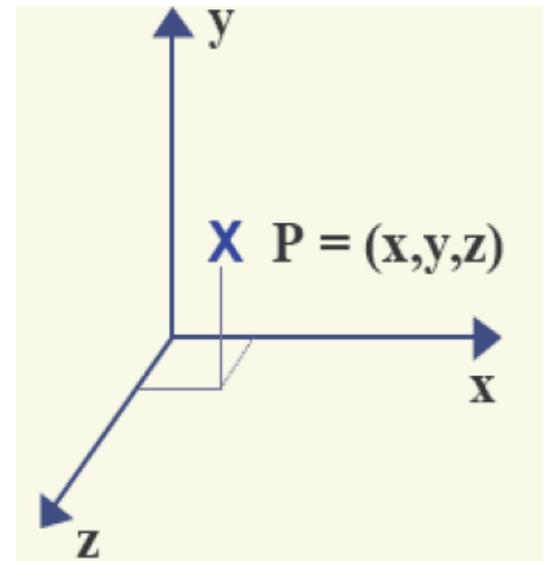
- Um ponto no infinito pode ser levado em um ponto P_0 do plano afim.
- Família de retas paralelas que se intersectam no infinito são transformadas numa família de retas incidentes em P_0 .
 - ♦ P_0 é chamado de **ponto de fuga**.
 - ♦ Ponto de fuga principal corresponde a uma direção paralela aos eixos coordenados.
 - Imagem de $[x,0,0]$ ou $[0,y,0]$.

Espaço 3D

- Um ponto do espaço 3D é definido como:

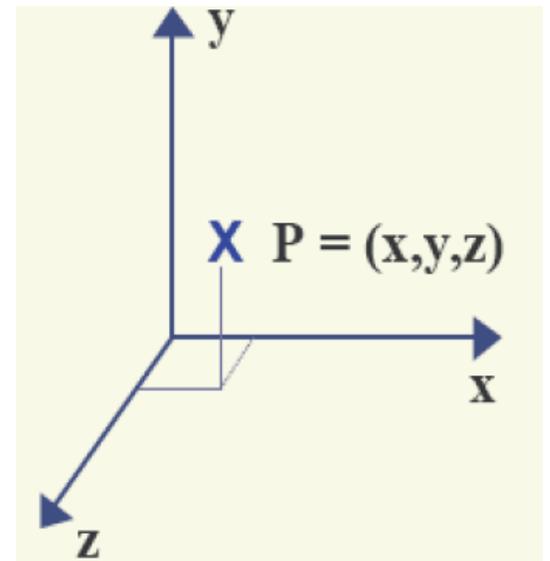
$$P = \{ (x, y, z, \lambda); \lambda \neq 0, (x/\lambda, y/\lambda, z/\lambda, 1) \}$$

- ♦ Denotado por $P = [x, y, z, w]$ em coordenadas homogêneas.



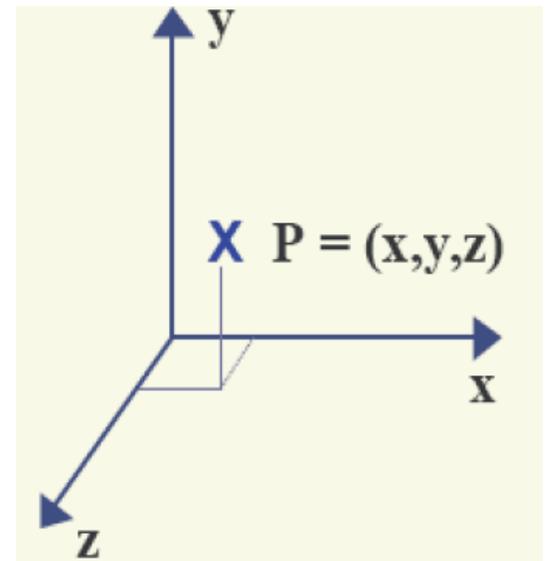
Translação no Espaço 3D

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

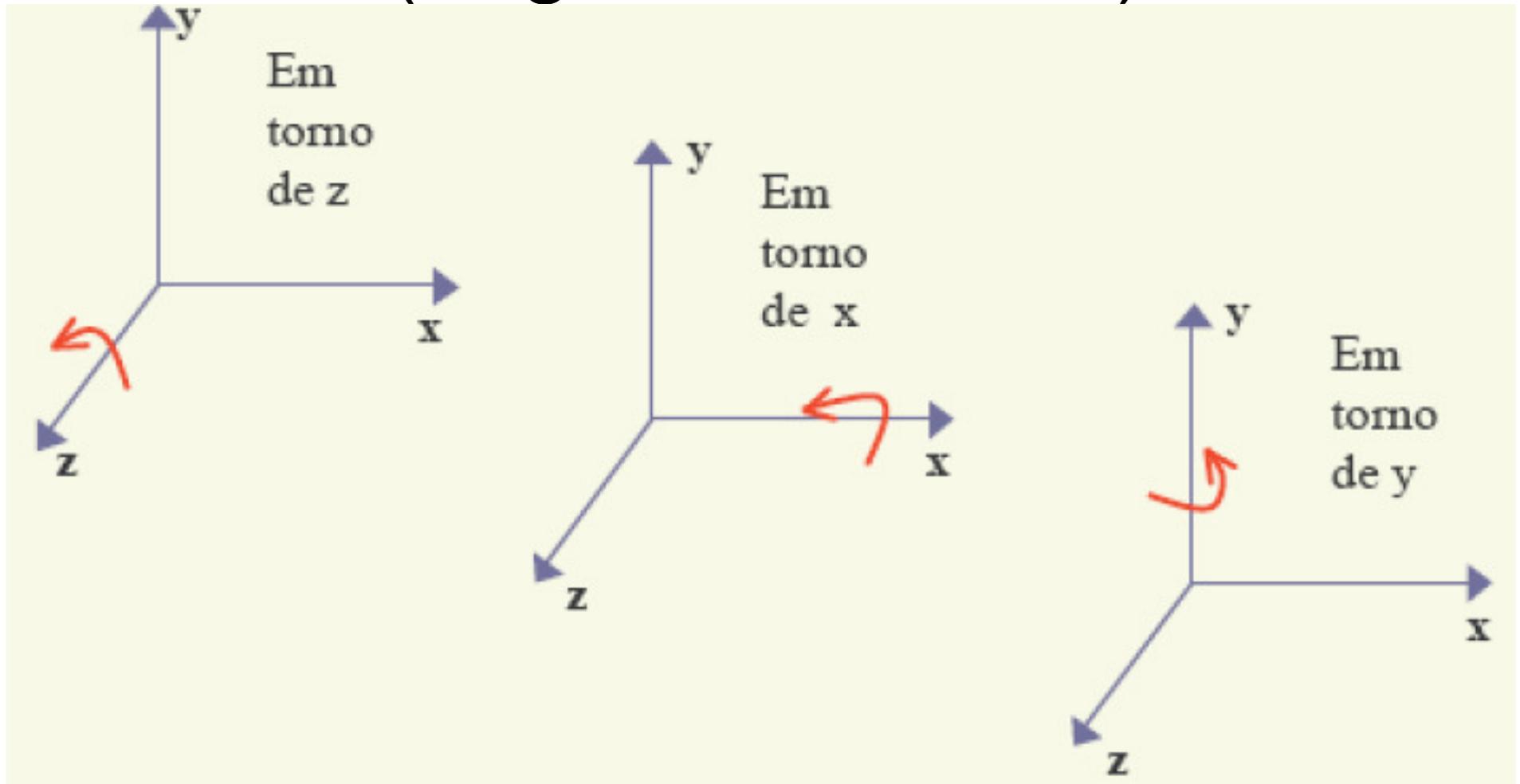


Escala em torno da origem do Espaço 3D

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



Rotações no Espaço 3D (ângulos de Euler)



Em torno de Z

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Em torno de X

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Em torno de Y

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas

- O sistema de coordenadas homogêneas (SCH) utiliza quatro valores para representar um ponto P no espaço, que será descrito por (x', y', z', M) .
- A transformação do SCH para o cartesiano se dá pela relação $(x, y, z) = (x'/M, y'/M, z'/M)$
- Os pontos onde $M=0$ estão fora do espaço dimensional (infinito !!!!) .
- O uso de coordenadas homogêneas é importante em Computação também para permitir a representação de **reais por inteiros**
- Quando $M=1$ a representação é a mesma do espaço cartesiano.

Matrizes e coordenadas homogêneas na **forma de**
vetores linha precisa usar a **transporta !!**

$$[x \ y \ 1] \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Matriz de rotação

$$[x \ y \ 1] \cdot \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [x \ y \ z] \cdot \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Escala

Translação

- Pode ser representada por operações com matrizes quando usamos coordenadas homogêneas, uniformizando as transformações geométricas

$$[x \ y \ z \ 1] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & T_z & 1 \end{pmatrix}$$

forma de vetor linha

Matriz de Transformação

- Transformações geométricas correspondem a operações de soma e multiplicação nas coordenadas que compõem o objeto
- Para evitar que diversas operações matemáticas sejam feitas individualmente em cada vértice é criada uma **matriz de transformação com coordenadas homogêneas a qual é aplicada todas as transformações**
- Esta matriz é denominada matriz de transformação corrente e é utilizada para transformação de todos os objetos

Relembrando Transformações

- De corpo rígido (semelhança).
 - Distância entre 2 pontos quaisquer é inalterada.
 - ◆ Ângulos entre vetores é inalterado.
 - ◆ Rotações, reflexões e translações
 - ◆ Matrizes elementares associadas a efeitos