Transformações Geométricas em C.G.

Cap 2 (do livro texto)

Aula 3 , 4 e 5– UFF - 2014

Geometria Euclideana : 3D

- Geometria
  - Axiomas e Teoremas
  - Coordenadas de pontos, equações dos objetos

- Geometria Euclideana (3D)

- CG (objetos):
  - Topologia :Faces, arestas, vértices
  - Geometria (conjunto de coordenadas dos vértices)
  - Distância entre 2 pontos => métrica

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \text{ (Euclidean metric)}$$
$$d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \text{ (Manhattan metric)}$$

  - Comprimento dos vetores

$$u \, . v = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i = produto interno$$

Produto interno no R^n: *(inner product ou dot product)*

- comprimento ou norma: $||u|| = |u| = (u \, . u)^{1/2}$,

- um vetor com comprimento 1 é chamado **normalizado** ou **unitário**

- normalizar um vetor => $u \,/\, ||u||$

- distância entre 2 pontos:PQ =>comprimento do vetor Q-P

Como se calcula a distância entre os pontos (1,1,1) e (2,3,1) ?

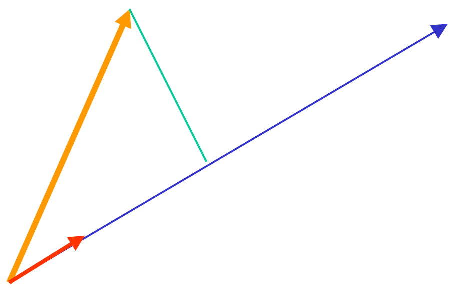
Vendo esses pontos como vetores, como eles são transformados em vetores unitários?

Produto interno no R^n:

(inner product ou dot product)

$$u\,.\,v = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i = produto interno$$

$$(\,u\,.\,v\,) = |u|\;|v|\,\cos(ß)$$



a projeção de um vetor *w* *perpendicularmente* em uma data direção definida por um vetor *v é o produto interno de w pelo vetor unitário na direção de v : u*

Projete o vetor (2,3,1) na direção de (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) , (1,1,1) e (1,0,0) - (0,1,0).

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i = produto interno$$

Produto interno no R^n:

$$(u \cdot v) = |u|\,|v| \cos(\beta) = 0$$

(inner product ou dot product)

2 vetores: u, v
são chamados **ortogonais** se forem perpendiculares, ou seja se o ângulo (ß) entre eles for 90 graus

como o cosseno de 90 graus = 0

$$(u \cdot v) = |u|\,|v| \cos(\beta) = 0$$

Logo w e u são ortogonais a um vetor v se...

(complete com suas palavras)

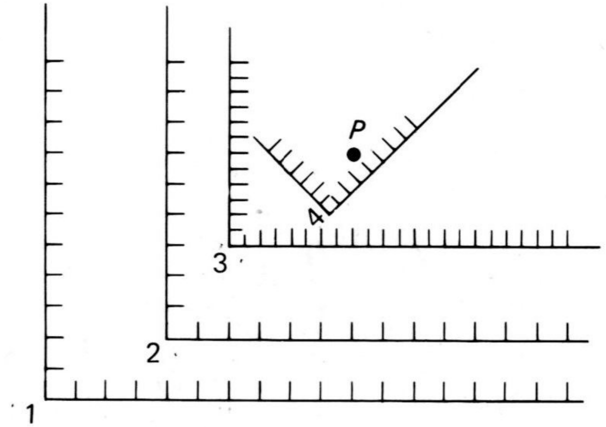
Bases ortonormais

Uma base é **ortogonal** se os vetores que a compuserem forem mutuamente **ortogonais**.

Uma base é **ortonormal** se os seus vetores além de **ortogonais** forem unitários.

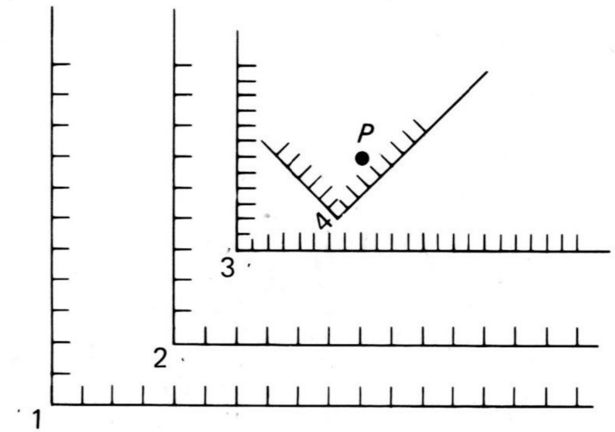
As 4 bases ao lado são ortonormais ?

(em relação a elas próprias e em relação a base canônica do R^2?)



Mudança de base:

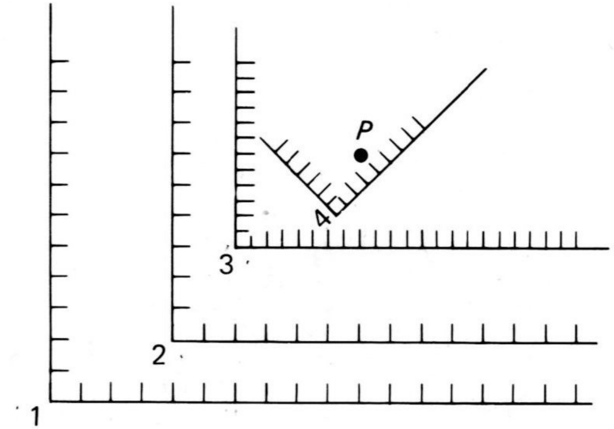
Dado um ponto em um sistema de eixos como representá-lo em outro sistema qualquer?



$P = (10,8)^1 = (6,6)^2 = (8,6)^3 = (4,2)^4$

Mudança da base 1 para a 2

$(10,8)^1 = (6,6)^2$



- A base 2 pode ser vista como a base 1, deslocada para a posição (4,2) . Ou a 1 como a 2 deslocada de (-4,-2).

- Assim a **matriz de transição** da base 1 para a 2 é dada por: $M_{1\text{->}2}$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

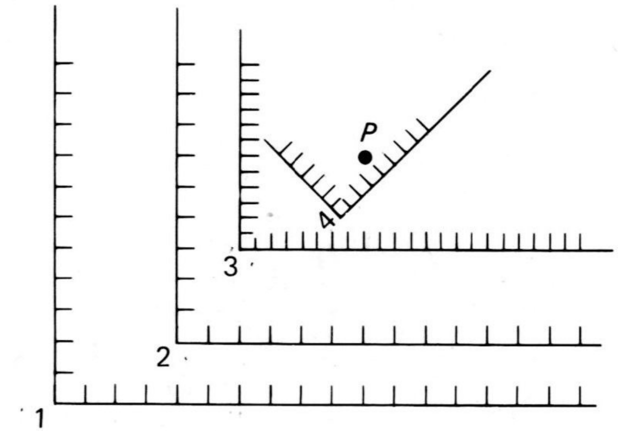
$$\mathbf{P^2 = M_{1\text{->}2} P^1}$$

- E sua **inversa** representa a transição da base 2 para a 1: $M_{2\text{->}1}$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\mathbf{P^1 = M_{2\text{->}1} P^2}$$

Mudança da base 2 para a 3



- A base 2 pode ser descrita em função da base 3, como deslocada para a posição (-4,-6) e depois tento sua unidade de base amplificada por um fator 2

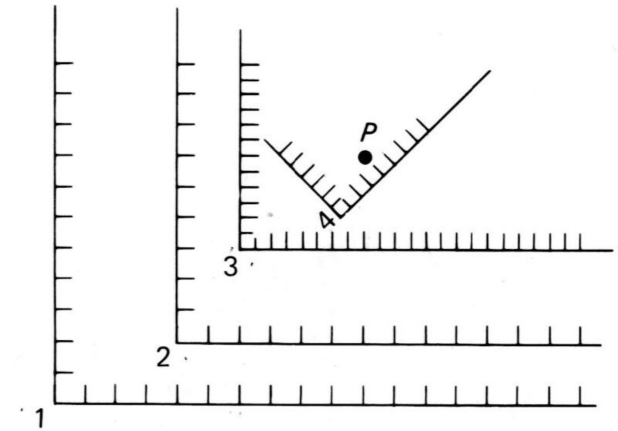
- Assim a **matriz de transição** da base 2 para a 3 é dada por:

$$\begin{matrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

- E sua **inversa** representa a **transição da base 2 para a 3**:

$$\begin{matrix} 0,5 & 0 & 2 \\ 0 & 0,5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Mudança da base 2 para a 3: $(6,6)^2 = (8,6)^3$



A base 2 pode ser descrita em função da base 3, como :
deslocada para a posição (-4,-6) e
depois tento sua unidade de base multiplicada por 2
(importante: essa ordem não é comutativa) !

Assim a **matriz de transição** da base 2 para a 3 é dada por: $M_{2\text{->}3}$

$$\mathbf{P^3 = M_{2\text{->}3} P^2}$$

$$\begin{matrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

E sua **inversa** representa a **transição da base 3 para a 2**: $M_{3\text{->}2}$

$$\mathbf{P^2 = M_{3\text{->}2} P^3}$$

A base 2 pode ser descrita em função da base 2 como :
deslocada para a posição (2,3) e
depois tento sua unidade de base multiplicada por 0,5
(lembre: essa ordem não é comutativa) !

$$\begin{matrix} 0{,}5 & 0 & 2 \\ 0 & 0{,}5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Verifique se $M_{2\text{->}3} M_{3\text{->}2} = I = M_{3\text{->}2} M_{2\text{->}3}$

Combinando matrizes de transição

- Repare que você pode ir da base 3 para a base 2, compondo (i.e multiplicando na ordem correta) as matrizes homogêneas :
- de translação
- de mudança de escala.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Matrizes de transição se combinam como **qualquer matriz** !

- Repare que você teria o mesmo efeito combinando as matrizes de **translação das origens** e mudança de **escala dos vetores unitários das novas bases**.

- Com mesmo raciocínio você pode ir de 3 para 1 ou de 1 para 3, combinando:

$$\mathbf{P}^1 = \mathbf{M}_{2\to1}\mathbf{P}^2 = \mathbf{M}_{2\to1}\mathbf{M}_{3\to2}\mathbf{P}^3$$

$$\mathbf{P}^3 = \mathbf{M}_{2\to3}\mathbf{P}^2 = \mathbf{M}_{2\to3}\mathbf{M}_{1\to2}\mathbf{P}^1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{P}^1 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -12 \\ 0 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{P}^1$$

Combinando matrizes de transição

Repare que você pode ir da base 3 para a base 1, compondo as 2 matrizes de transição anteriores da mesma maneira como você combina matrizes em coordenadas homogêneas.

Como ficaria $M_{1\text{->}3}$ $M_{3\text{->}1}$?

Combinando matrizes de transição

Repare que você pode ir da base 3 para a base 1, compondo as 2 matrizes de transição anteriores da mesma maneira como você combina matrizes em coordenadas homogêneas.

Como ficaria $M_{1->3}$ $M_{3->1}$?

Mudança da base 4 para a 3 (e vice versa)

$=(8,6)^3 = (4,2)^4$

Faça você a última etapa $M_{4\text{->}3}$, $M_{3\text{->}4}$ e também

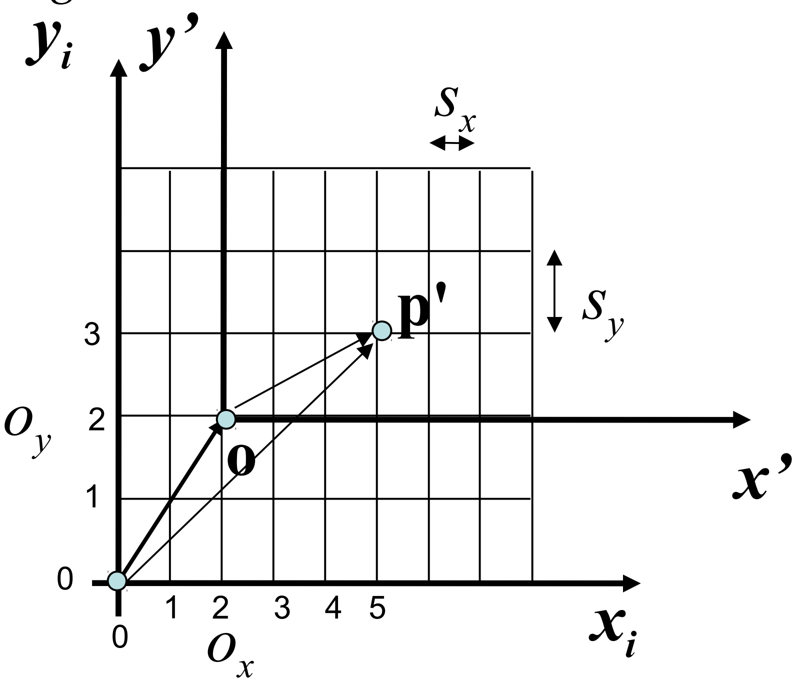
M1->4 M4->1

(Dica : lembre de usar as matrizes de rotação e a origem do sistema 4 está no ponto (6,7 ; 1,8) do sistema 3 !)

Transformações de coordenadas

Genericamente não precisa ter um unidade única nas duas direções!

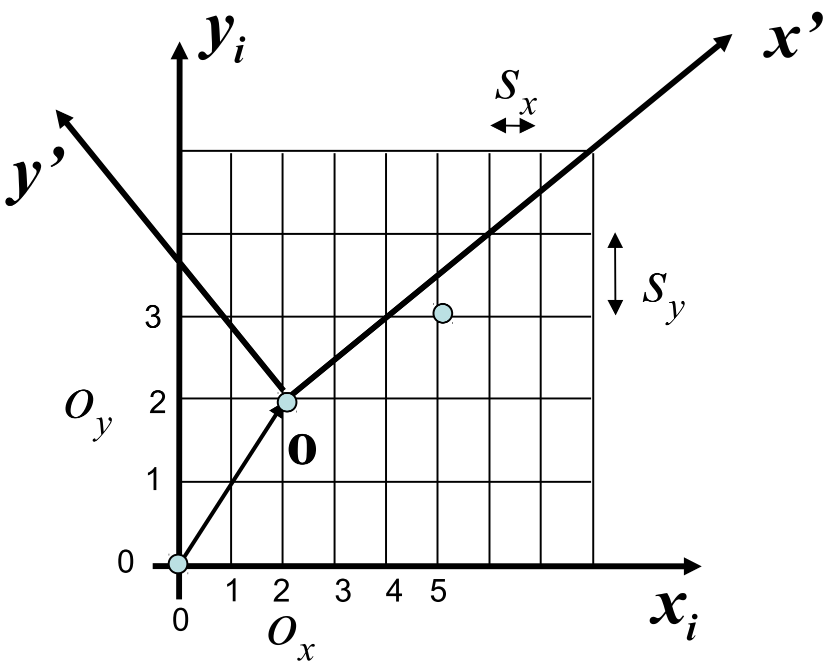
Origem e vetores unitários



$$p = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

$$p' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x(x_i - o_x) \\ s_y(y_i - o_y) \end{pmatrix}$$

Os eixos pode estar em qualquer ângulo!



Qualquer transformação afim pode relacionar os sistemas de eixos!

$$p = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = Ax + t$$

Transformações de coordenadas genericamente

Os eixos podem sofrer qualquer efeito!

Como se eles mesmo fosse uma imagem!

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy \\ bx+dy \end{pmatrix}$$

Até aqui!

Transformações afins

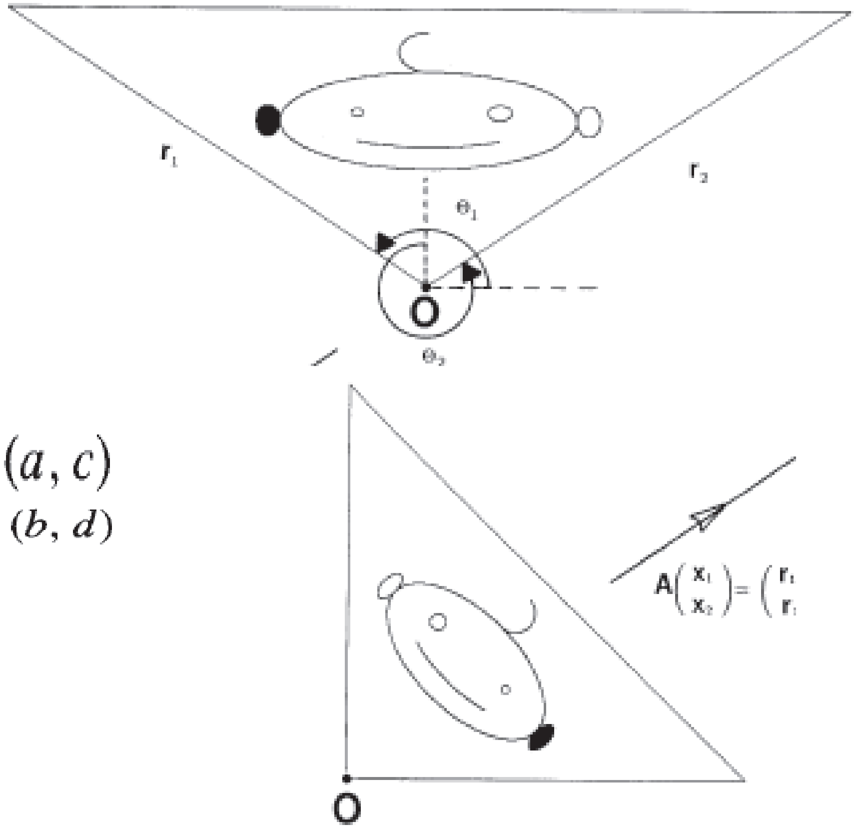
Fim aula 4!

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = Ax + t$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \cos\theta_1 & -r_2 \sin\theta_2 \\ r_1 \sin\theta_1 & r_2 \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

(r_1, θ_1) are the polar coordinates of the point (a, c)

$(r_2, (\theta_2 + \pi/2))$ (b, d)



O mesmo vale para bases 3D

Para mudar de um sistema positivo (right handed coordinate system) para um negativo (left handed coordinate system)

A matriz de transição em coordenadas do R^3 é:

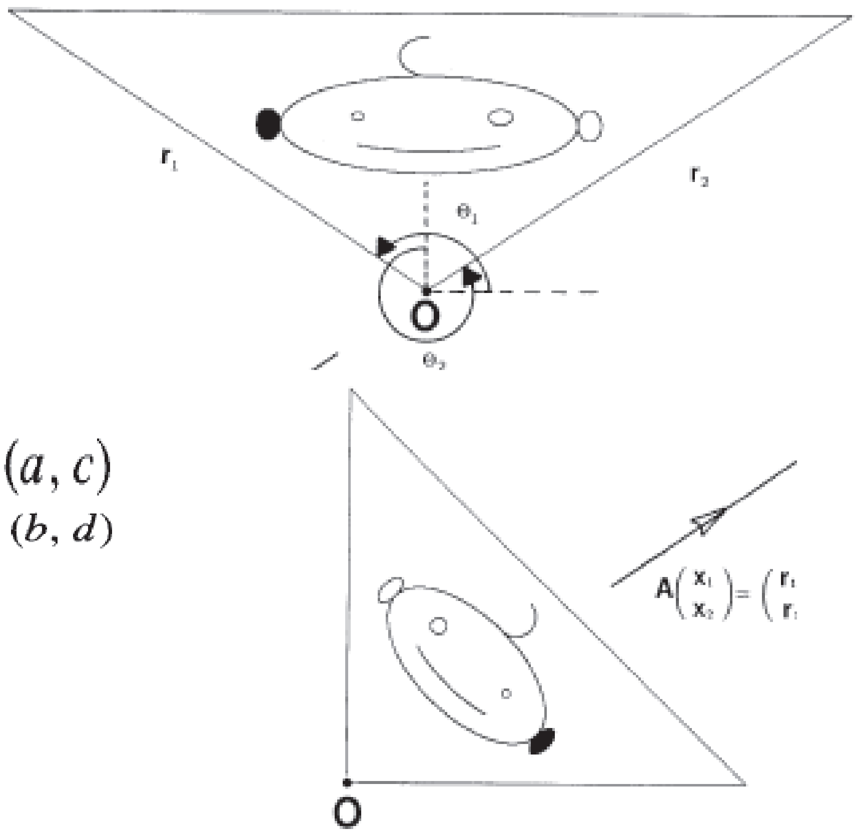
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Como é essa matriz de transição em coordenadas homogêneas ?

Transformações afins

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = Ax + t$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \cos\theta_1 & -r_2 \sin\theta_2 \\ r_1 \sin\theta_1 & r_2 \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$



(r_1, θ_1) are the polar coordinates of the point (a, c)

(b, d)

$(r_2, (\theta_2 + \pi/2))$

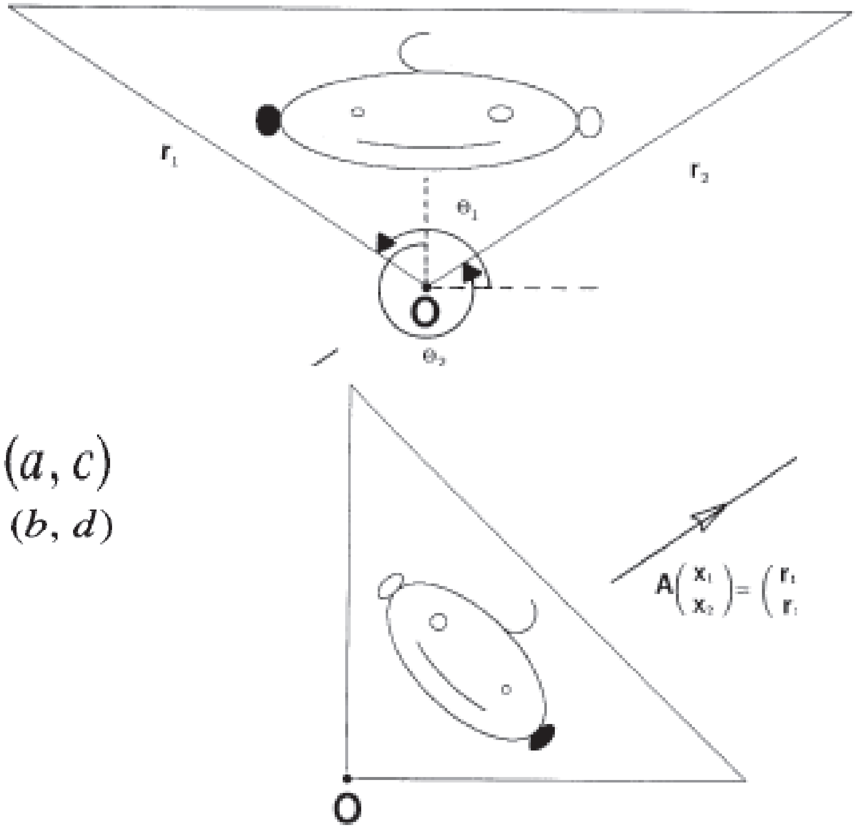
Transformações afins

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = Ax + t$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1\cos\theta_1 & -r_2\sin\theta_2 \\ r_1\sin\theta_1 & r_2\cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

(r_1, θ_1) are the polar coordinates of the point (a, c)

$(r_2, (\theta_2 + \pi/2))$ (b, d)



Aula 3:Transformações

- De corpo rígido (semelhança).
  - Distância entre 2 pontos quaisquer é inalterada.
  - Ângulos entre vetores é inalterado.
  - Rotações, reflexões e translações

Transformações

- De corpo rígido (semelhança).
  - Distância entre 2 pontos quaisquer é inalterada.
  - Ângulos entre vetores é inalterado.
  - Rotações, reflexões e translações

Transformações

- Afim
  - Transf. Lineares + translações.
  - Conceitos:
    - multiplicação de vetores (*u* , *v* , *w*) e matrizes *T*
    - soma de vetores.

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}.$$

    - Vetores => (linha ou coluna)
    - Transposta (T^T i,j) = (T j,i)
      - $(AB)^T = B^T A^T$

$$(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

    - Vetor coluna (n x 1): T (u)
    - Vetor linha (1 x n) : (u') T^T

Transformações simples desejáveis!

- Definição

1. $T(u + v) = T(u) + T(v)$
2. $T(av) = a\,T(v)$

- u , v vetores de dimensão n= 2 ou 3 .

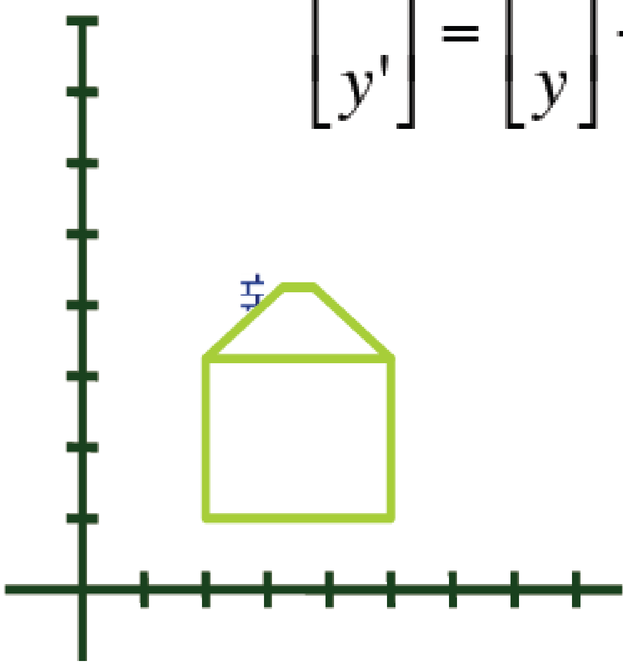
- T matriz quadradas n x n.

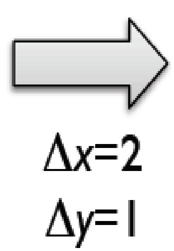
Objetos em CG: Basta multiplicar *T* aos vetores ou pontos do objeto

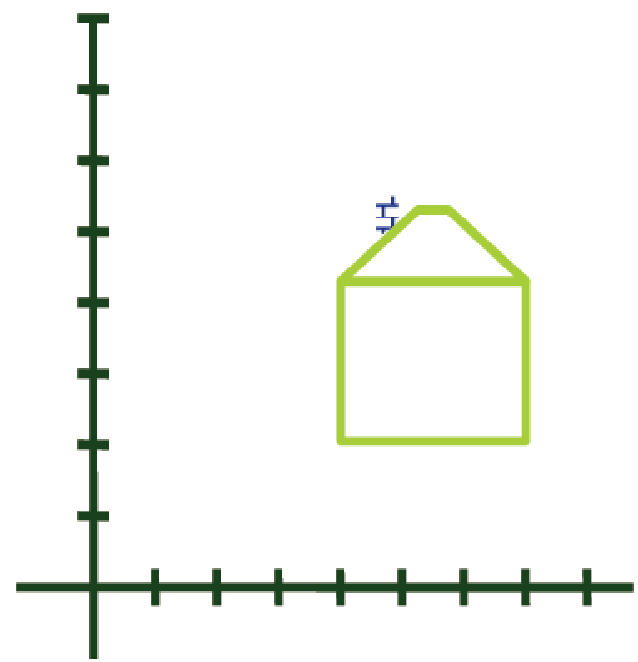
MAS TEMOS UMA PROBLEMA:

A translação não é uma transformação linear.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$







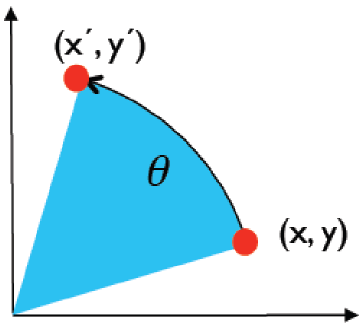
TODAS AS DEMAIS Transformações Lineares Bidimensionais

2D

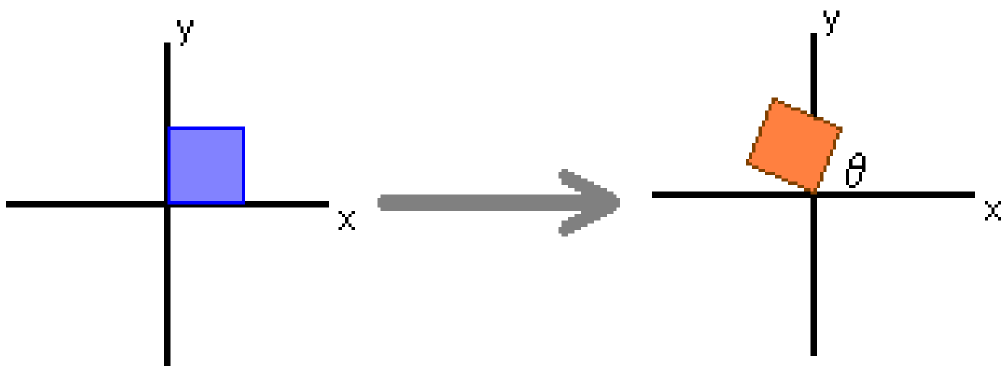
- São representadas por matrizes 2 x 2.

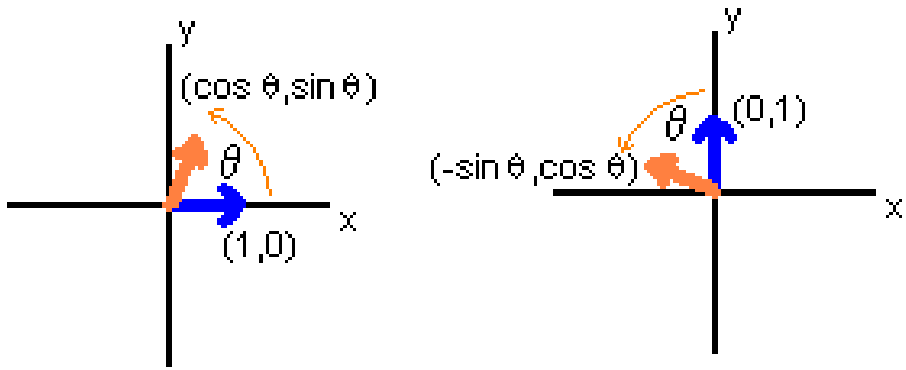
$$T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy \\ bx+dy \end{pmatrix}$$

Rotação em torno da origem



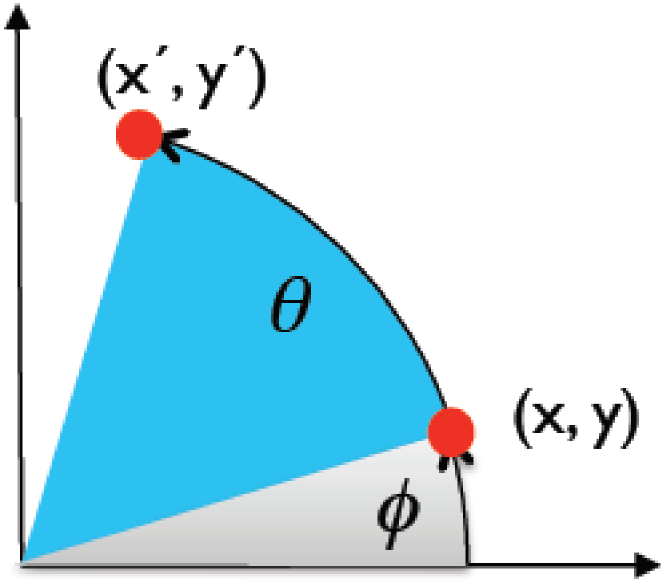
$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$





Como esse chegou a essa fórmula:

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$$



$$\begin{cases} x' = r\cos(\phi+\theta) \\ y' = r\sin(\phi+\theta) \end{cases}$$

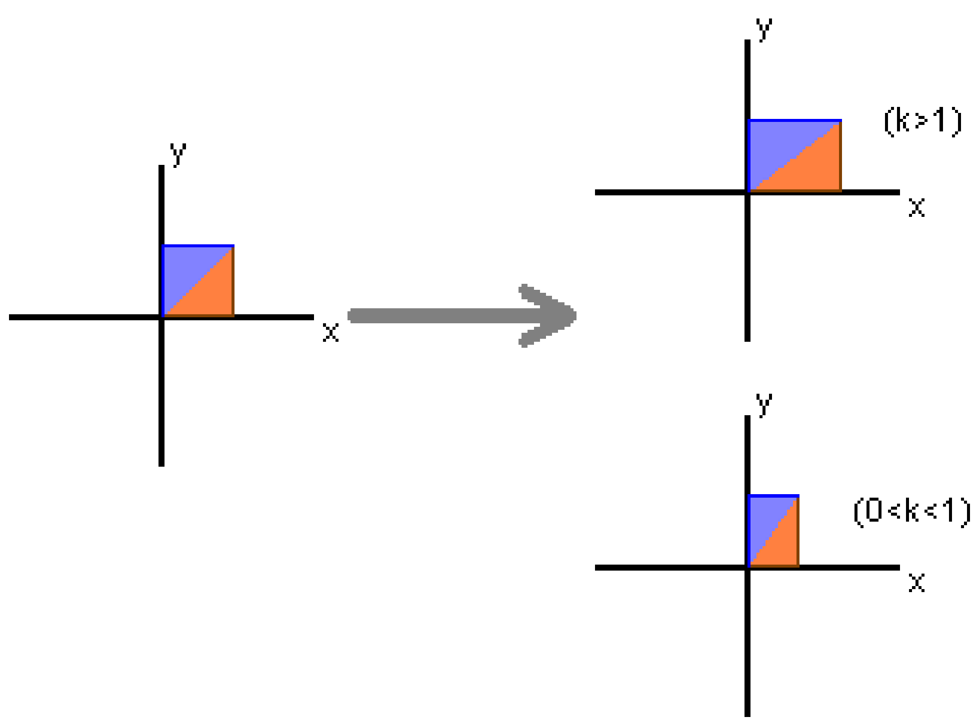
$$\begin{cases} x' = r\cos\phi\cos\theta - r\sin\phi\sin\theta \\ y' = r\cos\phi\sin\theta + r\sin\phi\cos\theta \end{cases}$$

Substituindo r cos(ϕ) e r sin(ϕ) por x e y nas equações anteriores tem-se:

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

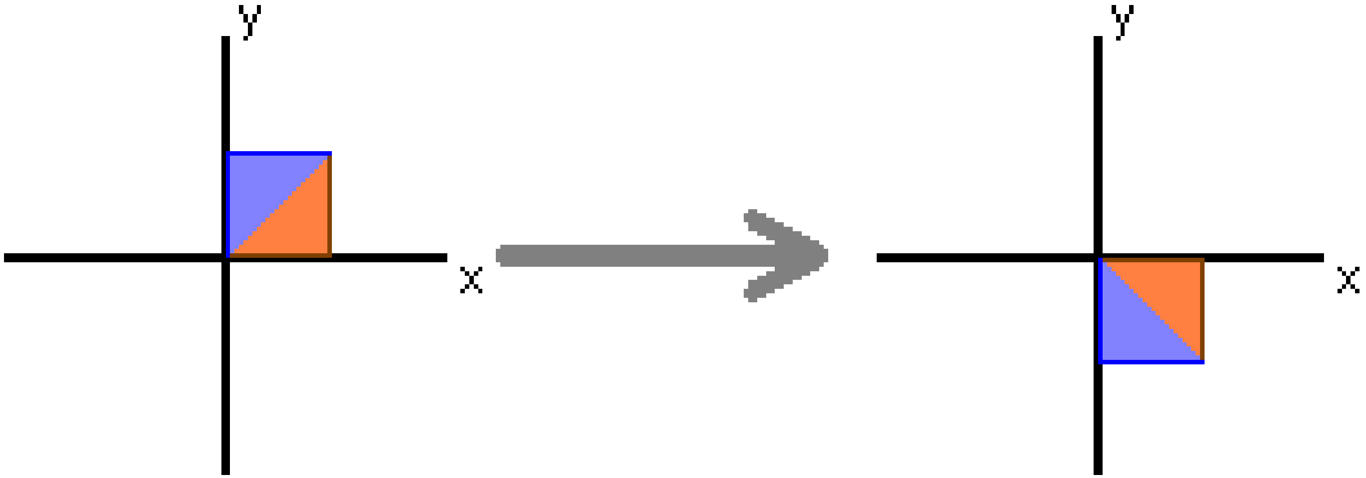
Escala em uma direção (horizontal)

$$S_x = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



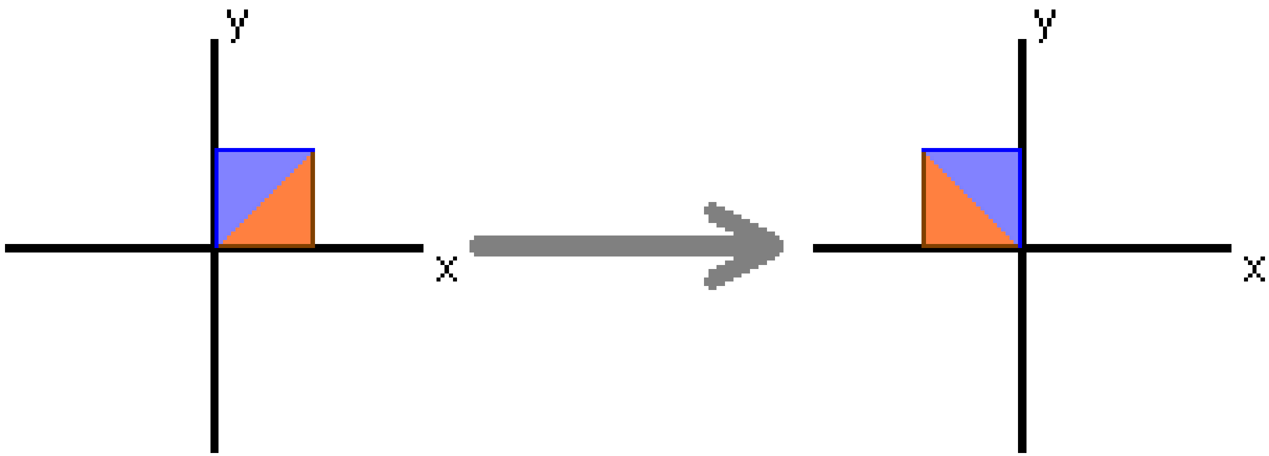
Reflexão em Relação ao Eixo X

$$Rfl_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



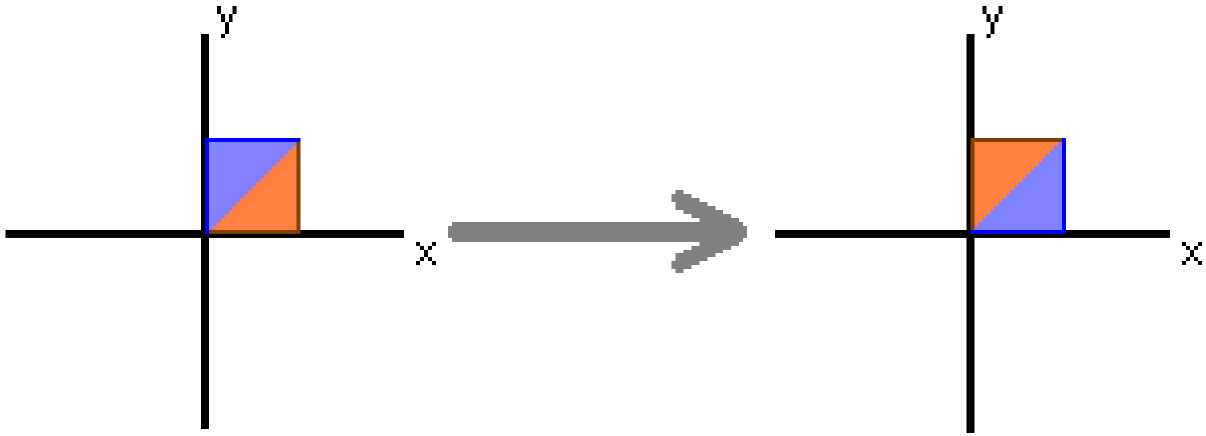
Reflexão em Relação ao Eixo Y

$$Rfl_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Reflexão em Relação à Reta $y = x$

$$Rfl_{y=x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

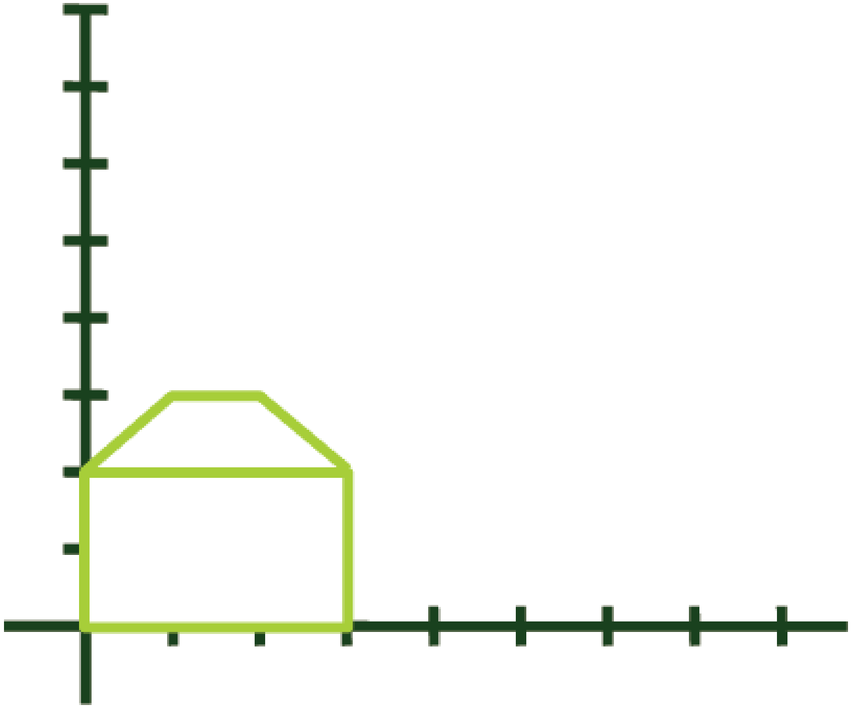


Como fica a reflexão em torno da origem?

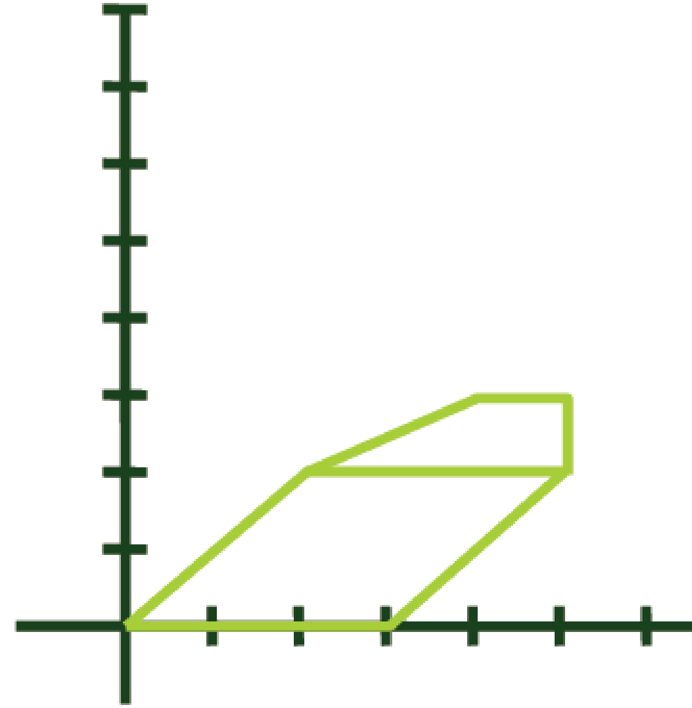
Como fica a reflexão em torno da origem?

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cisalhamento:



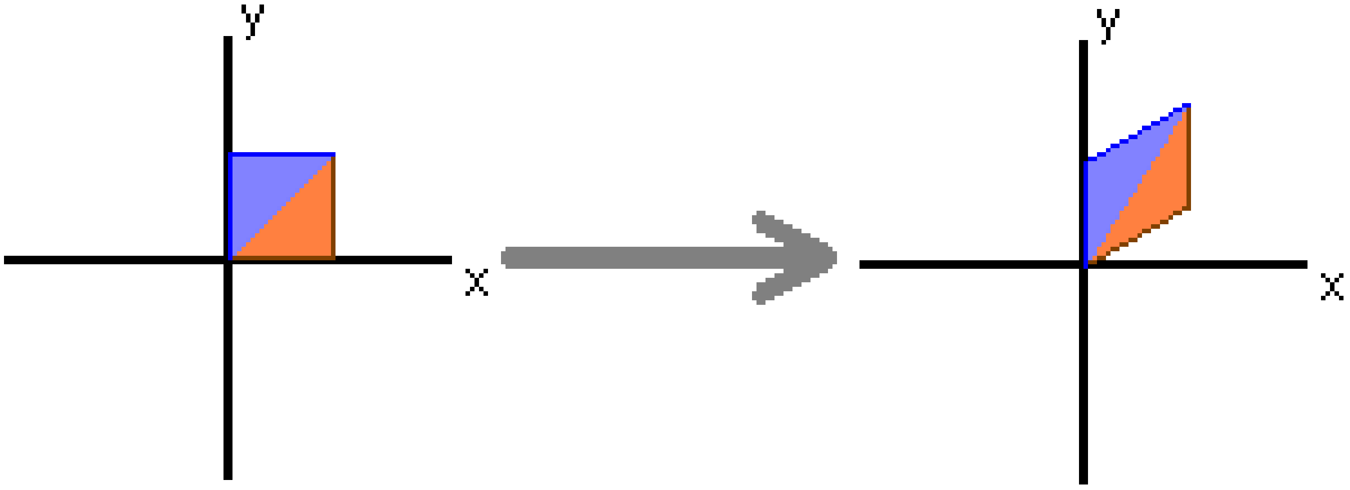
$$\kappa_x = 1$$
$$\kappa_y = 0$$



$$\begin{cases} x' = x + \kappa_x y \\ y' = y + \kappa_y x \end{cases}$$

Cisalhamento em Y

$$C_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix}$$



Como fica o cisalhamento em ambos?

Transformações Rígidas

- Rotações, Reflexões e Translações.
  - Preservam ângulos e comprimentos.
  - Para matrizes ortonormais a Inversa é a matriz transposta ($T^{-1} = T^{T}$).

Importante: conceito de rígida e linear (ou afim) é diferente?

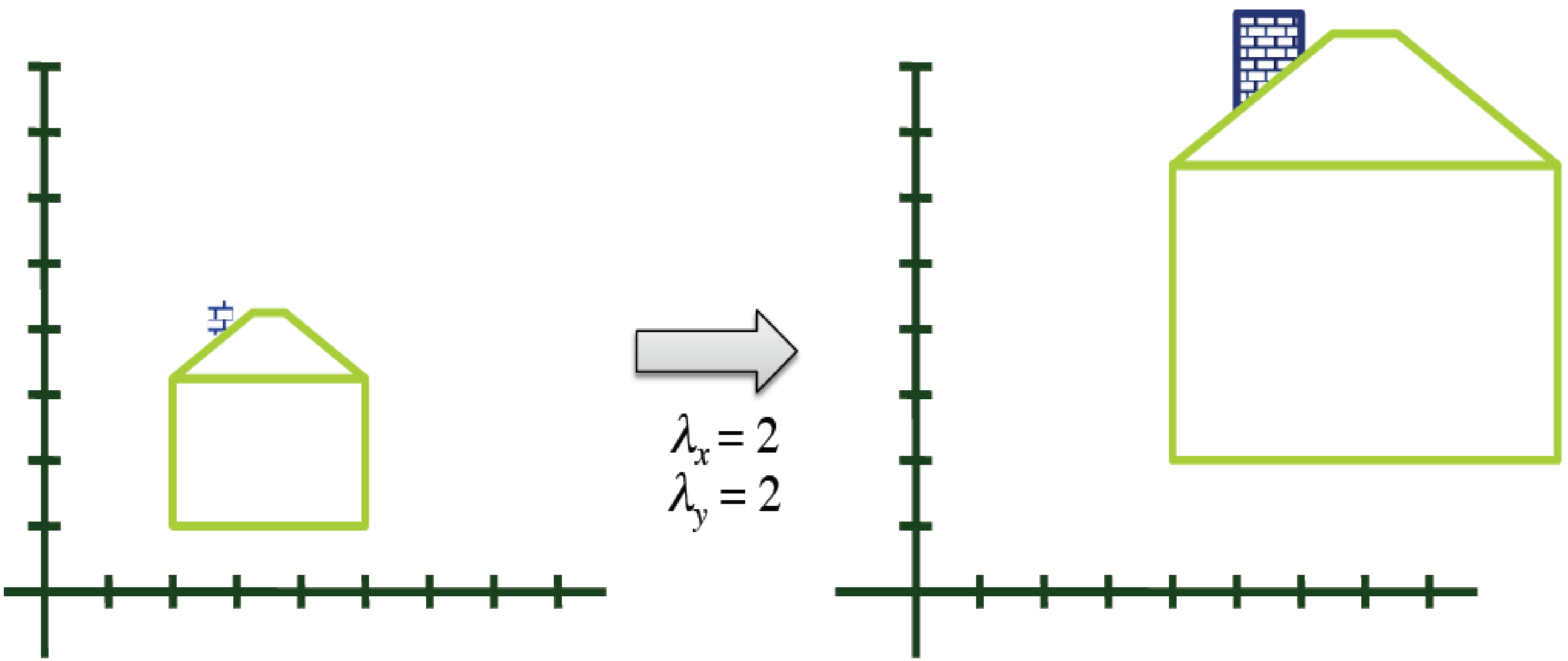
Cisalhamento é rígida?

E a Mudança de escala?

Se o objeto não está na origem!!

Mudança de escala

Não é uma T. rígida!



Transformações Rígidas

- Rotações, Reflexões e Translações.
  - Preservam ângulos e comprimentos.
  - Para matrizes ortonormais a Inversa é a matriz transposta ($T^{-1} = T^{T}$).

Conjunto de transformações geométricas: **translações** e **rotações** (também designadas por isometrias).

Invariante

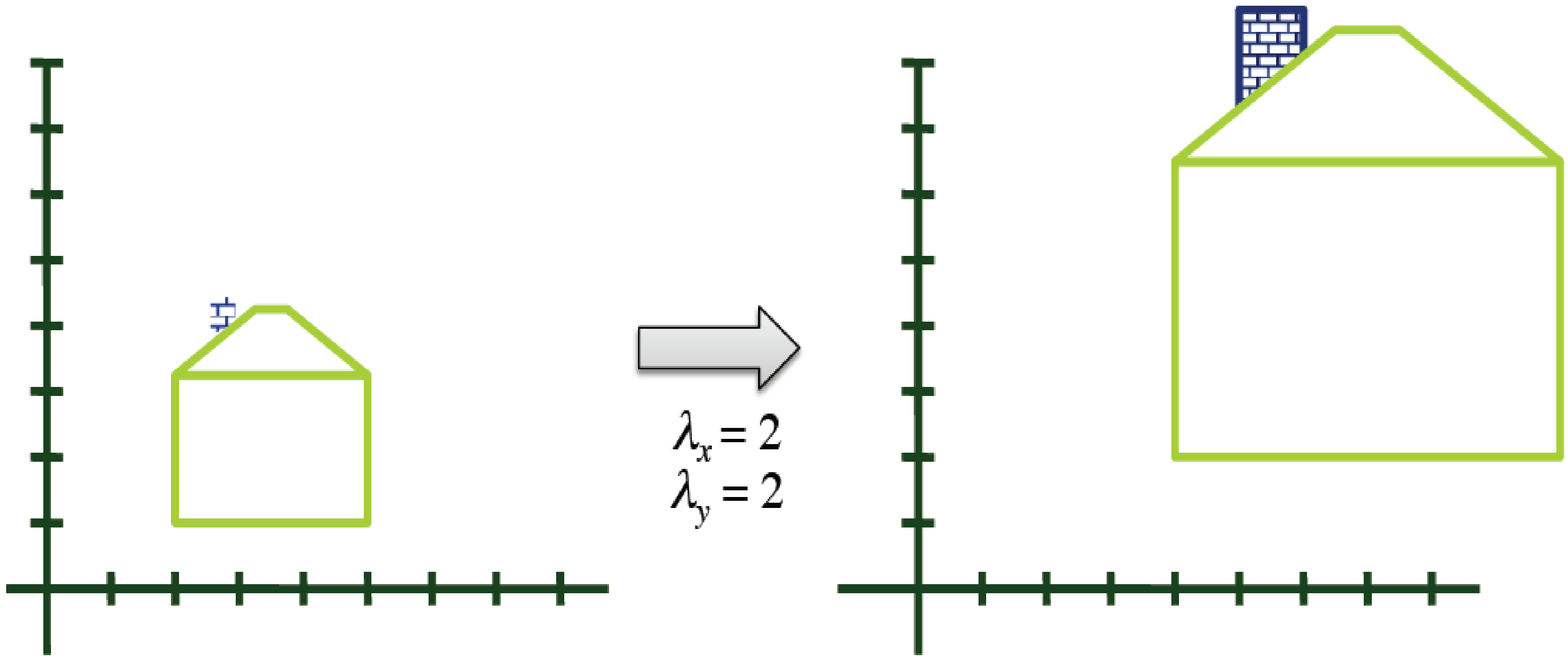
- distância entre pontos.

- ângulos, comprimentos, áreas, volumes

Se o objeto não está na origem!!

Mudança de escala

Não é uma T. rígida!



Composição de Transformações

- Quando for necessário transformar um objeto em relação a um ponto ***P*** arbitrário:
  - Translada-se ***P*** para origem.
  - Aplicam-se uma ou mais transformações elementares por multiplicação.
  - Aplica-se a transformação desejada (mesmo não lineares definida em uma forma mais simples).
  - Aplicam-se as transformações elementares inversas.
  - Aplica-se a translação inversa: ***-P***

Coordenadas homogêneas

- no R^2 é um elemento do R^3 com uma relação de escala.

$$P = \left(x, y, \lambda \right); \lambda \neq 0, \left(x/\lambda, y/\lambda, 1 \right)$$

- Um ponto do plano é definido como:
  - Chamado $P = [x,y,1]$ em coordenadas homogêneas (uma classe de equivalência).

Em coordenadas homogêneas as matrizes anteriores

- Devem ser 3 x 3 para as mesmas transformações afins bidimensionais.

$$M=\begin{pmatrix} a & c & m \\ b & d & n \\ p & q & s \end{pmatrix}$$

Transformações elementares por multiplicação

$$M = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy \\ bx+dy \\ 1 \end{pmatrix}$$

Conjunto de transformações afins (ou afinidades): translação, rotação, **variação de tamanho** (*scaling*) e **cisalhamento** (*shearing*).

Matriz de Translação

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+m \\ y+n \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mas agora todas podem ser combinadas de mesma forma

Ou concatenadas

Resumindo as elementares em 2D

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Translação

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Variação de Tamanho

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotação

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \kappa_x & 0 \\ \kappa_y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cisalhamento

Mas agora todas podem ser combinadas de mesma forma

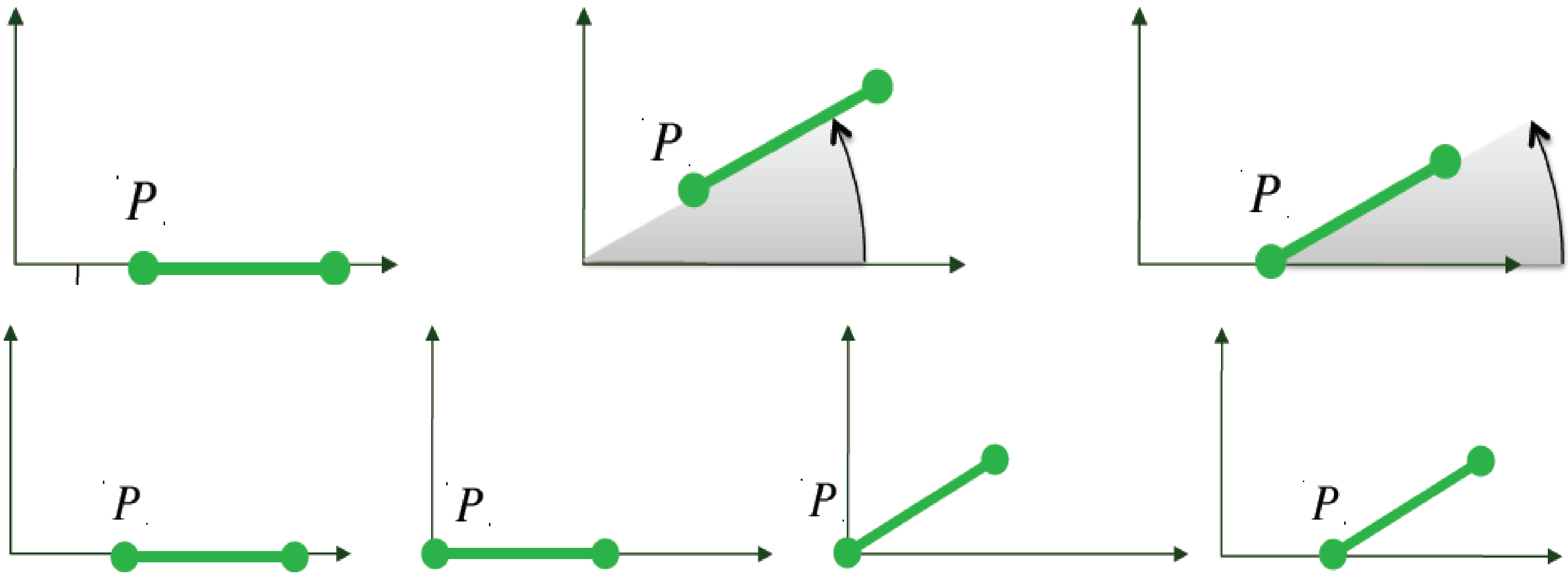
Ou concatenadas

Em coordenadas homogêneas as matrizes anteriores

- Devem ser 3 x 3 para as mesmas transformações afins bidimensionais.

$$M = \begin{pmatrix} a & c & m \\ b & d & n \\ p & q & s \end{pmatrix}$$

Imagine que se queira rotar o segmento de reta (2,0)(5,0) em torno de (2,0)



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Composição de Transformações afins

- O operador de composição é o produto de matrizes.
- É uma consequência do Axioma da Associatividade da geometria afim e da dimensão 3x3 das matrizes associadas às transformações afins 2D.

- **A ordem de composição de transformações afins é relevante.**
- **O produto de matrizes não é uma operação comutativa.**
- **A geometria afim não satisfaz o Axioma da Comutatividade.**

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de Translação

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+m \\ y+n \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformações elementares por multiplicação em coordenadas não homogêneas, ficam iguais em homogêneas!

$$M \rightarrow \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy \\ bx+dy \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformações elementares por multiplicação

$$M = \begin{pmatrix} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy \\ bx+dy \\ 1 \end{pmatrix}$$

Transformações Rígidas

- Rotações, Reflexões e Translações.
  - Preservam ângulos e comprimentos.
  - Para matrizes ortonormais a Inversa é a matriz transposta ($T^{-1} = T^{T}$).

Conjunto de transformações geométricas: **translações** e **rotações** (também designadas por isometrias).

Invariante

- distância entre pontos.
- ângulos, comprimentos, áreas, volumes

Efeito em um ponto no infinito

(pedindo desculpa aos matemáticos pela notação!)

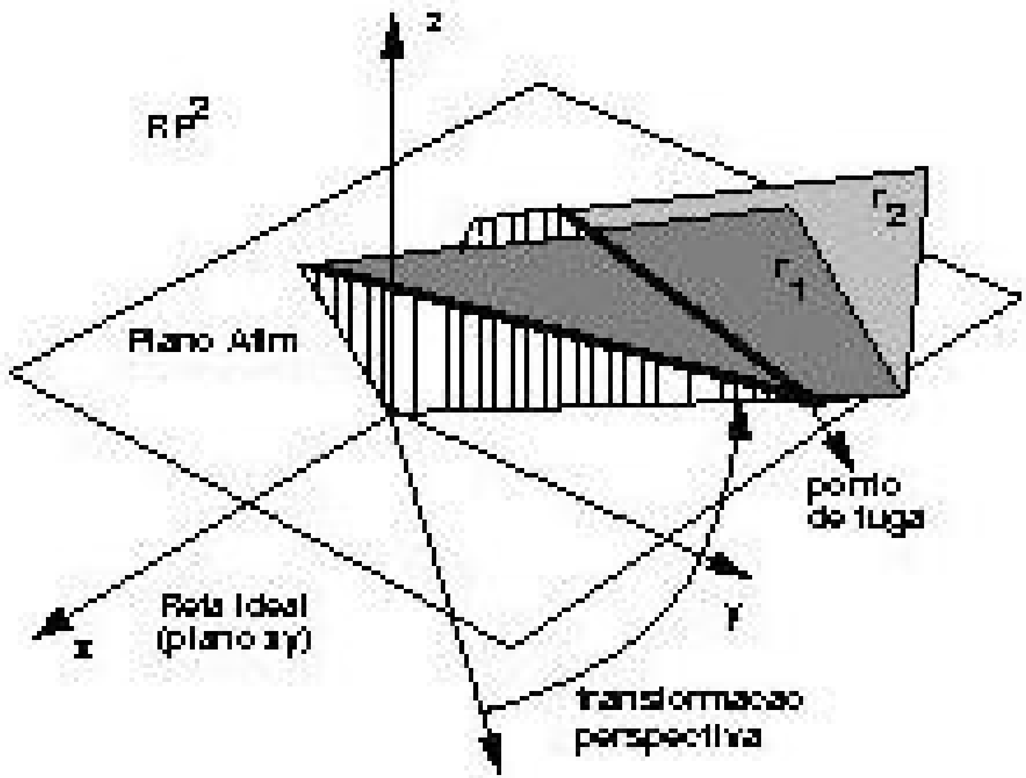
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ p & q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ px+qy \end{pmatrix}$$

Pontos de Fuga

- Um ponto no infinito pode ser levado em um ponto P_0 do plano afim.
- Família de retas paralelas que se intersectam no infinito são transformadas numa família de retas incidentes em P_0.
  - P_0 é chamado de **ponto de fuga**.
  - Ponto de fuga principal corresponde a uma direção paralela aos eixos coordenados.
    - Imagem de $[x,0,0]$ ou $[0,y,0]$.

Fim da aula 3 :

Ponto de Fuga

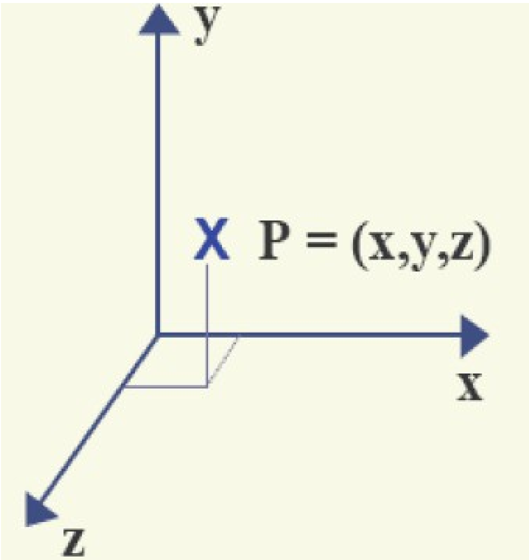


Espaço 3D

- Um ponto do espaço 3D é definido como:

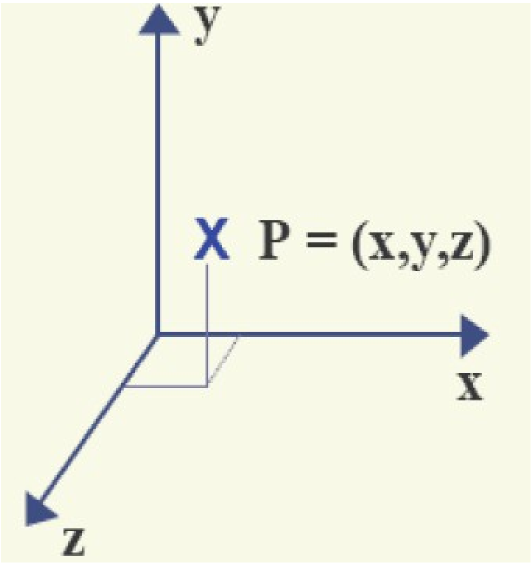
$$P=\left\{\left(x,y,z,\lambda\right);\lambda\neq 0,\left(x/\lambda,y/\lambda,z/\lambda,1\right)\right\}$$

  - Denotado por P = [x,y,z,w] em coordenadas homogêneas.



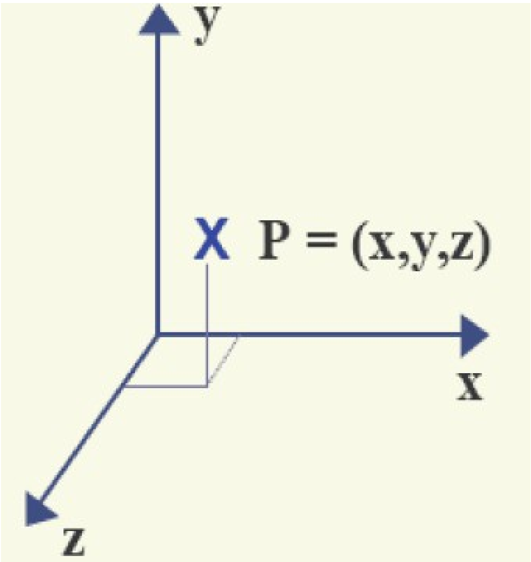
Translação no Espaço 3D

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

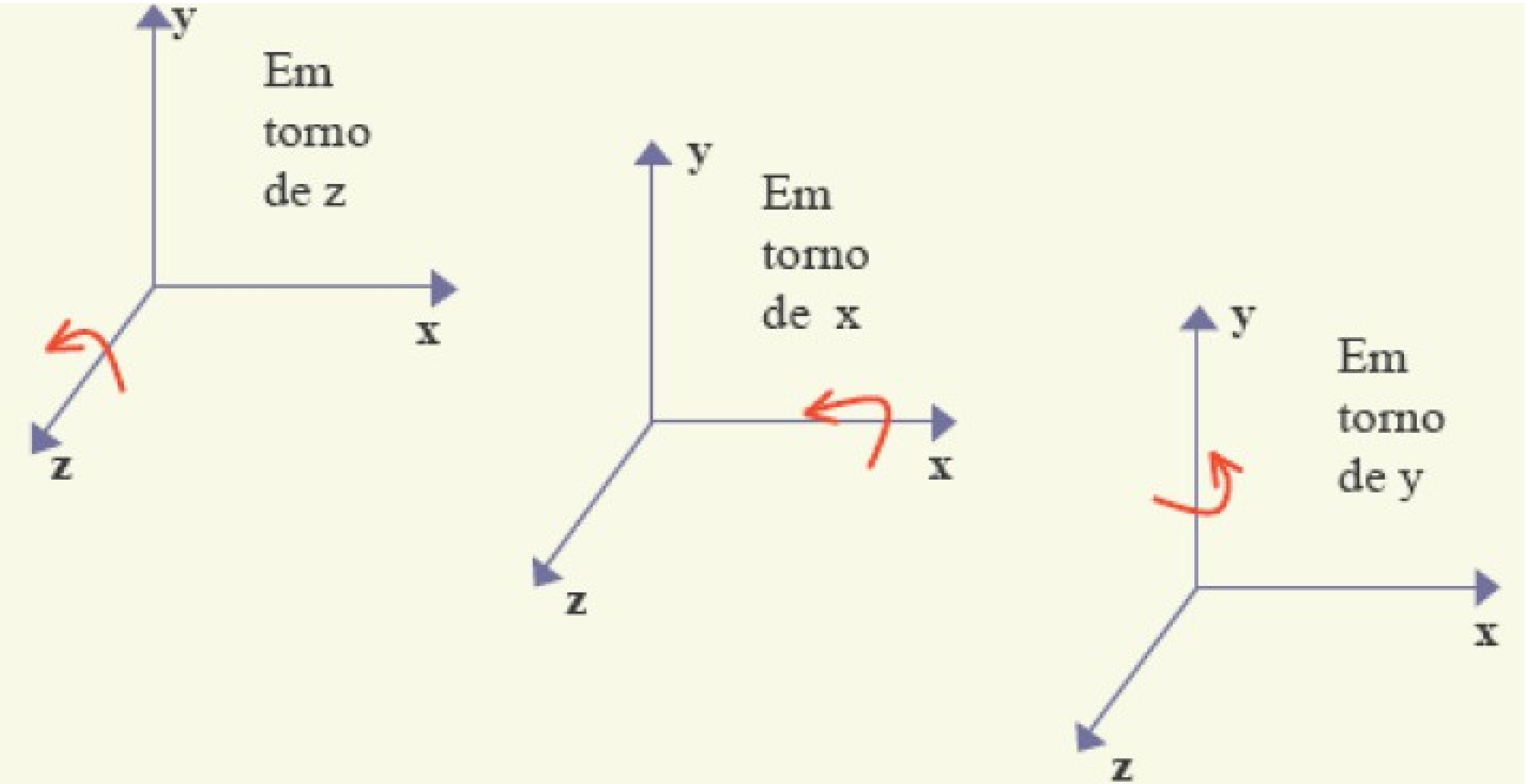


Escala em torno da origem do Espaço 3D

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



Rotações no Espaço 3D (ângulos de Euler)



Em torno de Z

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Em torno de X

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Em torno de Y

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

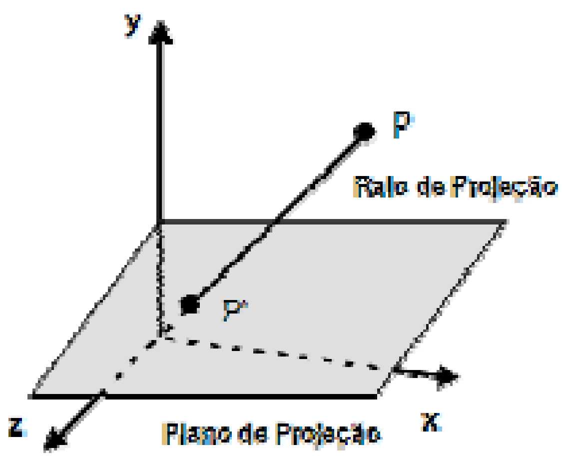
Em torno de Y

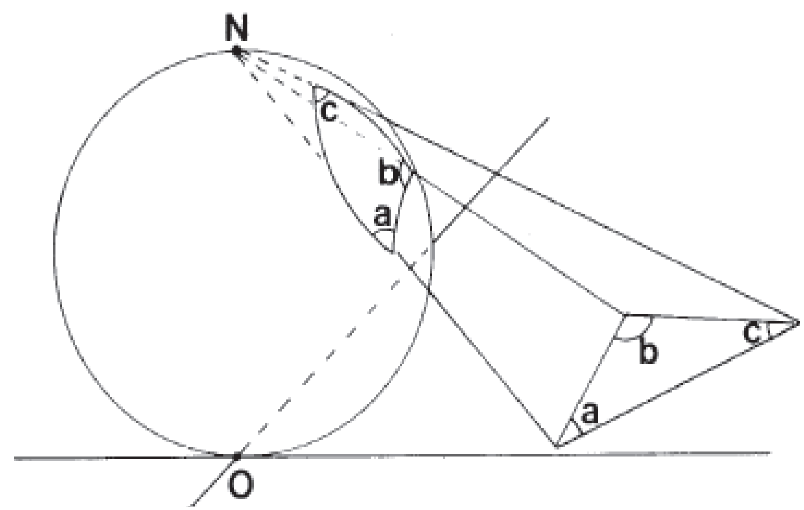
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Projeções:

Elementos básicos:

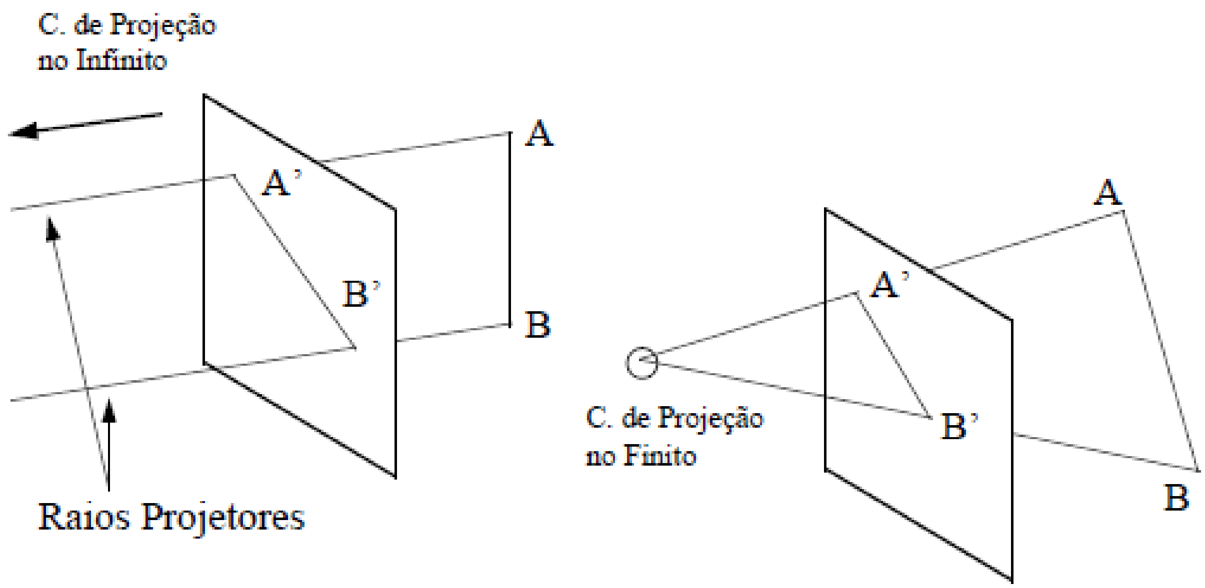
- **Plano de projeção:** Superfície onde será projetado o objeto. Onde ele será representado em 2D;
- **Raios de projeção:** São as retas que passam pelos pontos do objeto e pelo centro de projeção;
- **Centro de projeção:** É o ponto fixo de onde os raios de projeção partem.

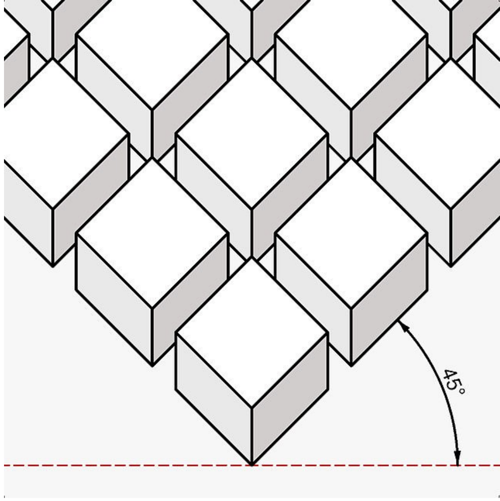




Classificação:

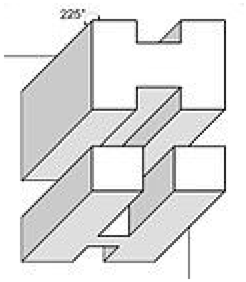
- Projeções paralelas e projeções perspectivas

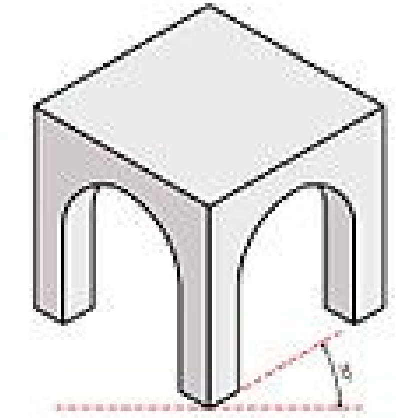




Características:

- Projeções Paralelas
  - O centro de projeção é localizado no infinito
  - Todas as linhas de projeção são paralelas entre si;
  - São tradicionalmente usadas em engenharia e desenhos técnicos;
  - Em alguns casos preservam as dimensões do objeto;
  - Não produzem imagem realista.





Perspectiva (tela do museu de Montreal)

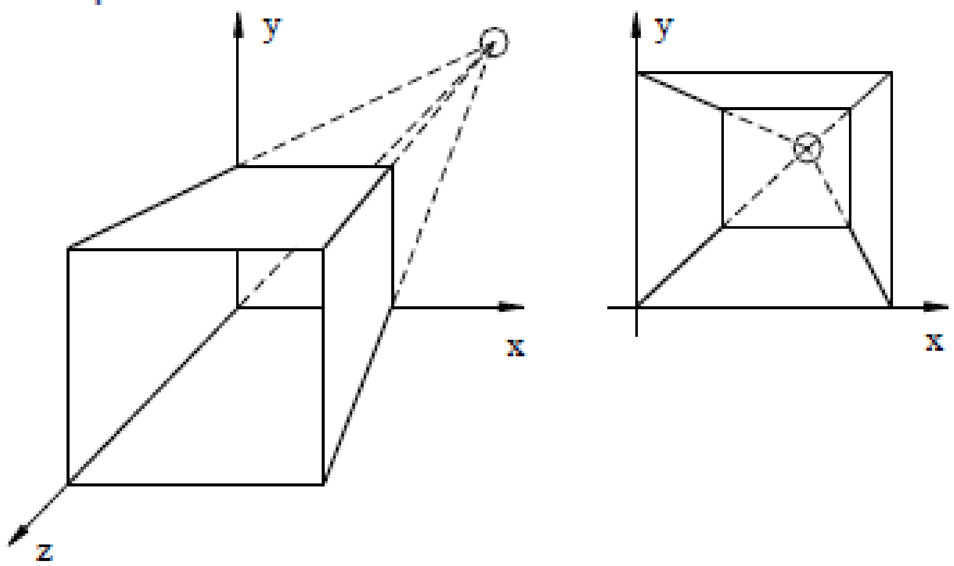
Perspectiva (tela do museu de Montreal)

Características

- Projeções Perspectivas
  - Todos os raios de projeção partem do centro de projeção e interceptam o plano de projeção com diferentes ângulos;
  - Representam a cena vista de um ponto de observação a uma distância finita;
  - Os raios projetores não podem ser paralelos.
  - Baseiam-se no número de pontos de fuga da imagem projetada;
  - São mais realísticas na representação de objetos;
  - Não reproduzem as verdadeiras medidas do objeto;

Ponto de fuga

- Ilusão de que conjuntos de linhas paralelas (não-paralelas ao plano de projeção) convergem para um ponto;
- Pontos de fuga principais são aqueles que dão a ilusão de intersecção entre um conjunto de retas paralelas com um dos eixos principais.



O que são eixos principais?

Maior e menor momento de inércia.

Não há produto de inércia para os eixos principais

Podem ser entendidos como os do menor BB possível para o objeto de interesse.

Dois pontos de fuga:

Foto de uma rua de

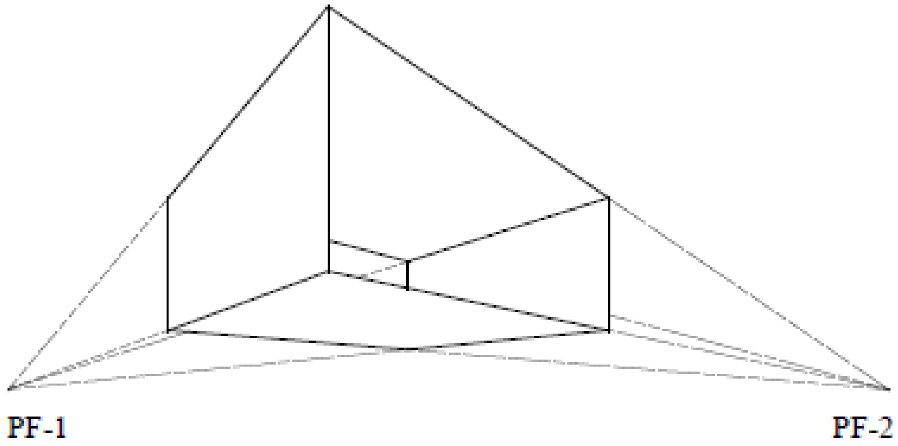
(Podgorica)

Montenegro

2014

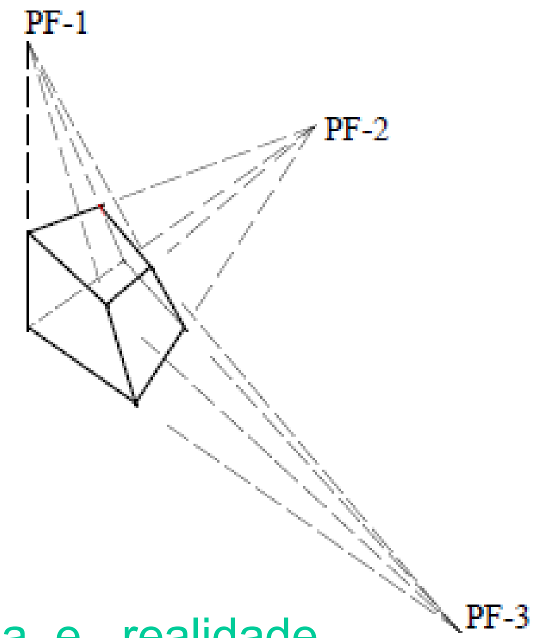
Pontos de fuga principais

– Nota-se que cada conjunto de linhas paralelas no espaço pode ter associado um ponto-de-fuga. Assim, com o objetivo de definir um critério de classificação, somente as linhas paralelas aos eixos são consideradas.



Possível mas não é muito realista

Projeções perspectivas de três pontos-de-fuga são usadas menos frequentemente, dado que elas acrescentam pouco realismo ao já alcançado pelas projeções de dois pontos-de-fuga.



3 pontos de fuga e realidade

Mas ocorre se o observador estiver muito perto do objeto:

Museu
De
Mont.
real

Matriz Projetiva

- Uma transformação projetiva M do R^3 é uma transformação linear do R^4.
- A matriz 4 x 4 de uma transformação projetiva representa uma transformação afim tridimensional.

$$M = \begin{pmatrix} a & d & g & m \\ b & e & h & n \\ c & f & i & o \\ p & q & r & s \end{pmatrix}$$

Transformação Perspectiva

- Ponto P do espaço afim é levado no hiperplano $w = r\,z + 1$
- Se $z = -1/r$, então P é levado em um ponto no infinito.
- Pontos do espaço afim com $z = 0$ não são afetados.

$$M \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ rz+1 \end{pmatrix}$$

Ponto de Fuga Principal

- A imagem do ponto ideal, correspondendo a direção z, tem coordenadas $[0, 0, 1/r, 1]$
  - Este é o ponto de fuga principal da direção z.
  - Semi-espaço infinito $0 < z \leq \infty$ é transformado no semi-espaço finito $0 < z \leq 1/r$.

$$M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ r \end{pmatrix}$$

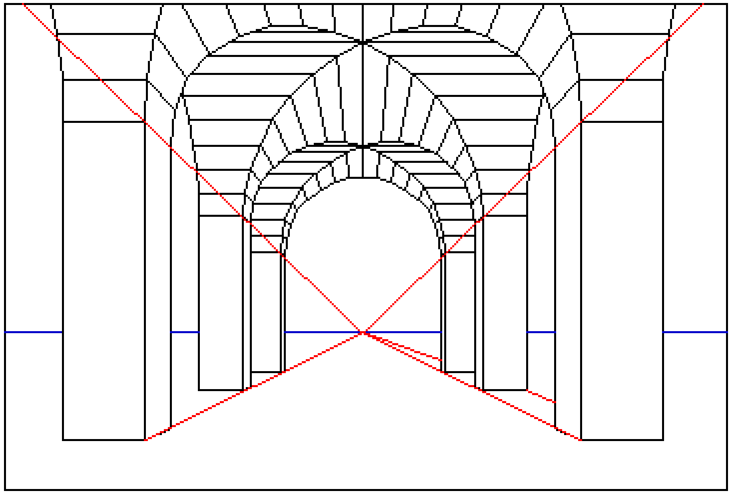
Mais de Um Ponto de Fuga

- A transformação perspectiva com 3 pontos de fuga, possui 3 centros de projeção:
  - $[-1/p, 0, 0, 1]$
  - $[0, -1/q, 0, 1]$
  - $[0, 0, -1/r, 1]$
- O mesmo resultado é obtido com a aplicação em cascata de 3 transformações perspectivas, com um único ponto de fuga em cada eixo.

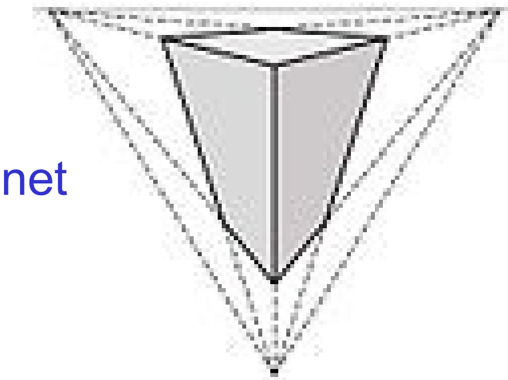
Basta Implementar Transformações Com um Único Ponto de Fuga

- Transformações perspectivas com dois pontos de fuga equivalem a combinação de:
  - rotação ao redor de um eixo perpendicular ao eixo que contém o centro de projeção.
  - transformação perspectiva com um único ponto de fuga.
- Com duas rotações, obtêm-se transformações com três pontos de fuga.

Projetar Sempre Acarreta Perder de Informação



http://isgg.net



International Society for Geometry and Graphics

ISGG

Bibliografia:

Anton, H. Rorres, C. Algebra linear com aplicações, Bookman, Porto Alegre 2001

E. Azevedo, A. Conci, Computação Gráfica: teoria e prática, Campus ; - Rio de Janeiro, 2003

J.D.Foley,A.van Dam,S.K.Feiner,J.F.Hughes. Computer Graphics- Principles and Practice, Addison-Wesley, Reading, 1990.

Gardan, Y. , Numerical Methods for CAD , MIT press, Cambridge, 1985.