



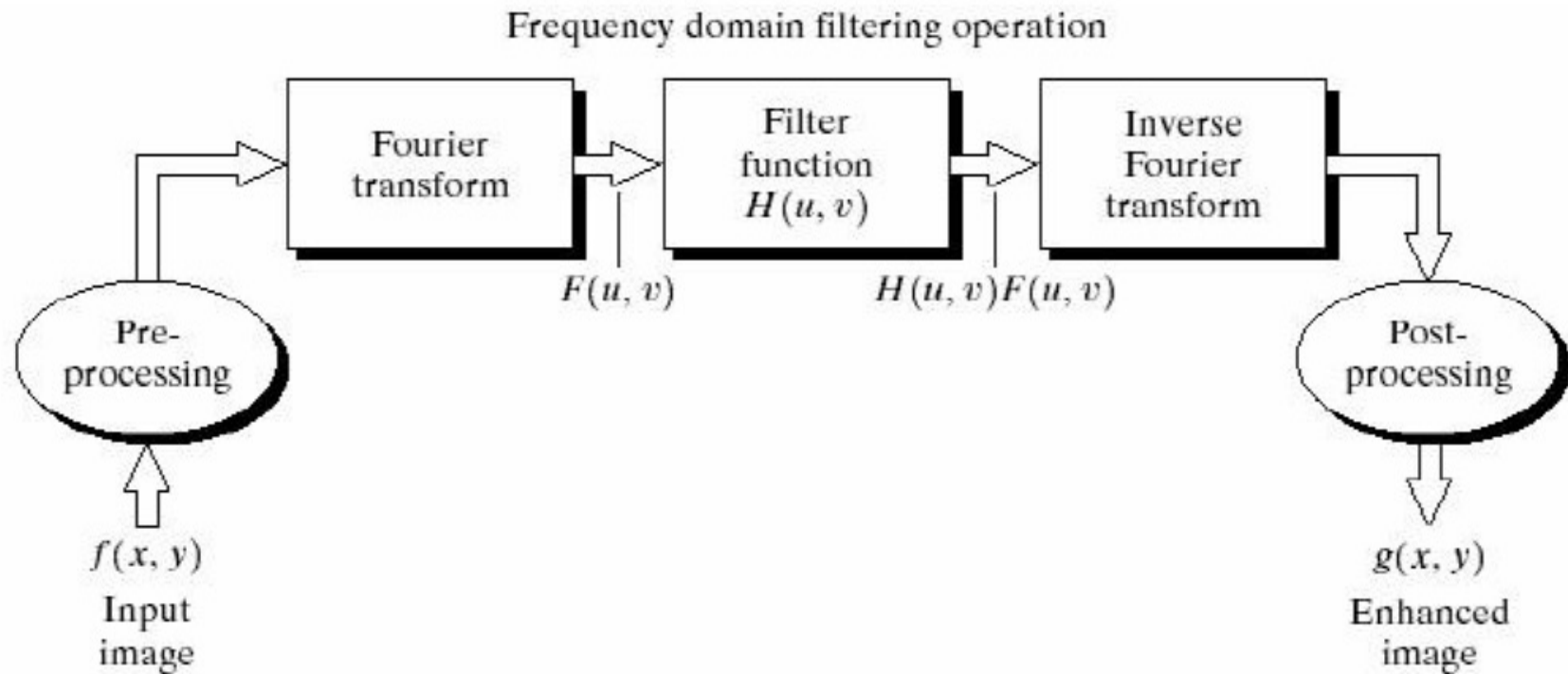
Aula 6

Melhoria de imagens por filtragens: no domínio da frequência

Análise de Imagens - 2015

Aura Conci

Filtragem no Domínio da Frequência



Filtragem no Domínio da Frequência

Filtragem Passa Baixa

Filtragem Passa Alta

Outros filtros no domínio da frequência

Filtro de Gabor

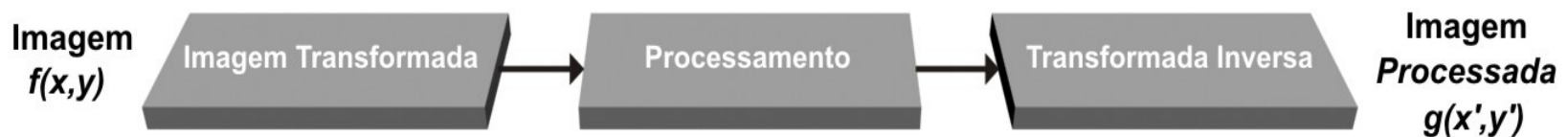
Objetivo da Filtragem

Melhorar as imagens através da:

- ampliação do seu **contraste**;
- eliminação de **ruídos** e **padrões periódicos** ou aleatórios;
- melhoria na **nitidez** e acentuação de características.

Filtragem no Domínio da Frequência

- 1- A imagem é **transformada do domínio espacial** para o da **frequência** (transformada de Fourier).
- 2- Operações de filtragem são realizadas nessa imagem.
- 3- Realiza-se o processo inverso, a imagem no domínio da frequência **volta para o domínio espacial**.



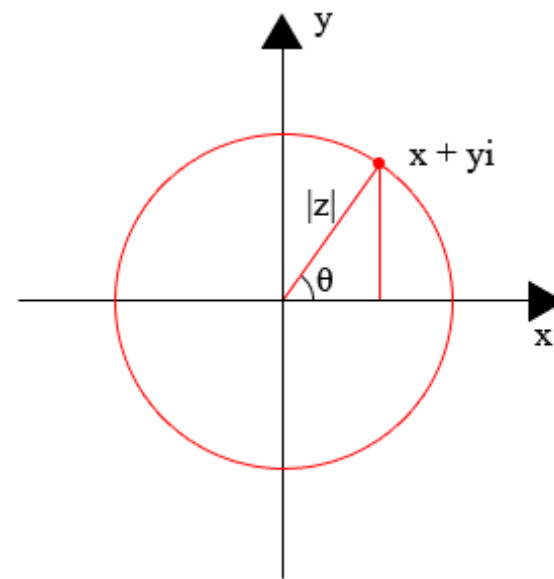
Esquema de processamento no domínio da frequência usando a transformação de imagens

Relembrando: Números Complexos

- São os elementos do conjunto \mathbf{C} , uma extensão do conjunto dos \mathbf{R} , onde existe um elemento que representa a raiz quadrada de -1 (chamado imaginário)
- Cada número complexo C pode ser representado na forma: $a + b i$
- onde a e b são números reais conhecidos como *parte real* e *parte imaginária* de \mathbf{C} e i é o imaginário

Plano complexo

- também chamado de **plano de Argand-Gauss** é uma representação do conjunto dos números complexos.
- Da mesma forma como a cada ponto da reta está associado um ponto do conjunto dos reais , \mathbf{R} , o plano complexo , \mathbf{C} , associa o ponto (x,y) ao número complexo $x+iy$.



Transformada de Fourier



Jean-Baptiste Joseph Fourier foi matemático e físico francês, iniciou estudos de decomposição de funções em séries trigonométricas.

A TF ou FT deve esse nome em sua homenagem.

Em **processamento de sinais** usa-se a notação j para o imaginário i

A transformada de Fourier $F(u)$, de uma função contínua $f(x)$ de uma variável real x pode ser definida como:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp[-j2\pi u x] dx \quad \text{onde } j = \sqrt{-1}$$

A partir de $F(u)$, pode-se obter $f(x)$ através da transformada **inversa** de Fourier:

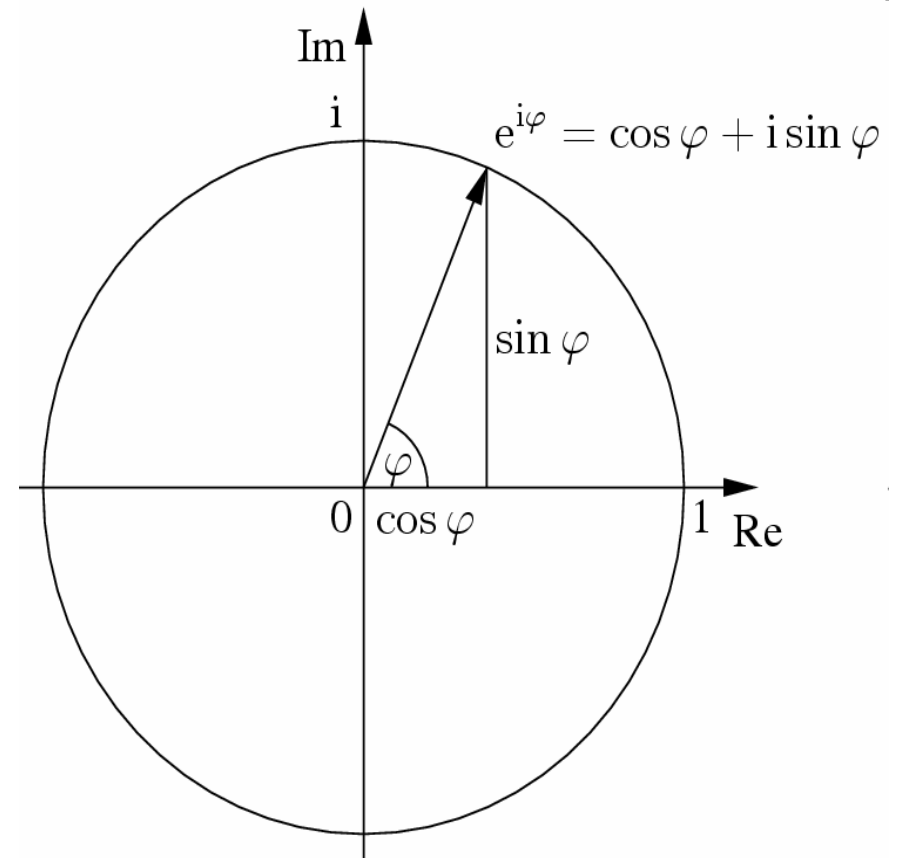
$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \exp[j2\pi u x] du$$

Essas duas equações são chamadas de **par de transformada de Fourier** e podem existir se ambas forem integráveis e se $f(x)$ for contínua.

Fórmula de Euler

- mostra a relação entre a função exp e senos e cosenos:

$$e^{ix} = \cos(x) + i \operatorname{sen}(x)$$



Algumas transformadas de Fourier

$$\delta(x) = 0 \text{ se } x \neq 0$$

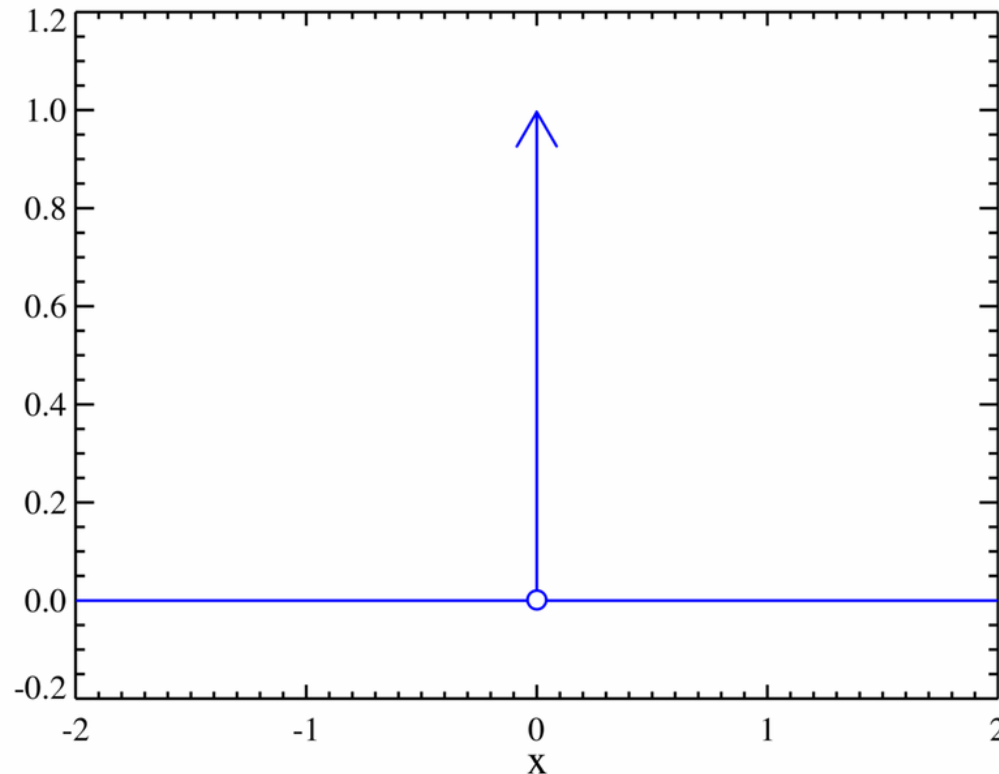
$$\delta(0) = \infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

Delta de Dirac

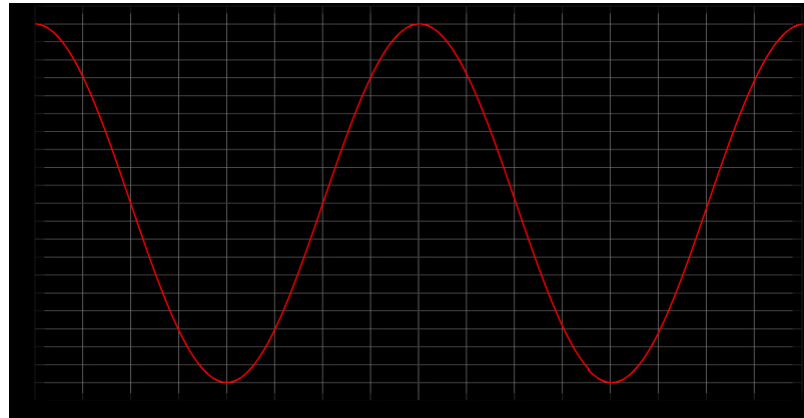
(introduzida por Paul Dirac)

| $f(x)$ | $F(u)$ |
|-------------|--------|
| $\delta(x)$ | 1 |



$$f(x) = \delta(x)$$

Algumas transformadas de Fourier



Função coseno

| $f(x)$ | $F(u)$ |
|---------------|--|
| $\cos(u_0 x)$ | $\pi[\delta(u - u_0) + \delta(u + u_0)]$ |

A transformada de Fourier de uma função $f(x)$ é uma função **complexa**, *i.e.* tem parte **real** e **imaginária**:

$$F(u) = R(u) + j I(u) \quad j = \sqrt{-1}$$

Como outras funções complexas pode ser **escrita** na forma também na **forma exponencial**:

$$F(u) = |F(u)| e^{j\theta(u)} = |F(u)| \exp[j\theta(u)]$$

Chama-se **espectro de Fourier**, **ângulo de fase** e **espectro da potência** , respectivamente a:

$$|F(u)| = [R^2(u) + I^2(u)]^{1/2}$$

$$\phi(u) = \tan^{-1} [I(u) / R(u)]$$

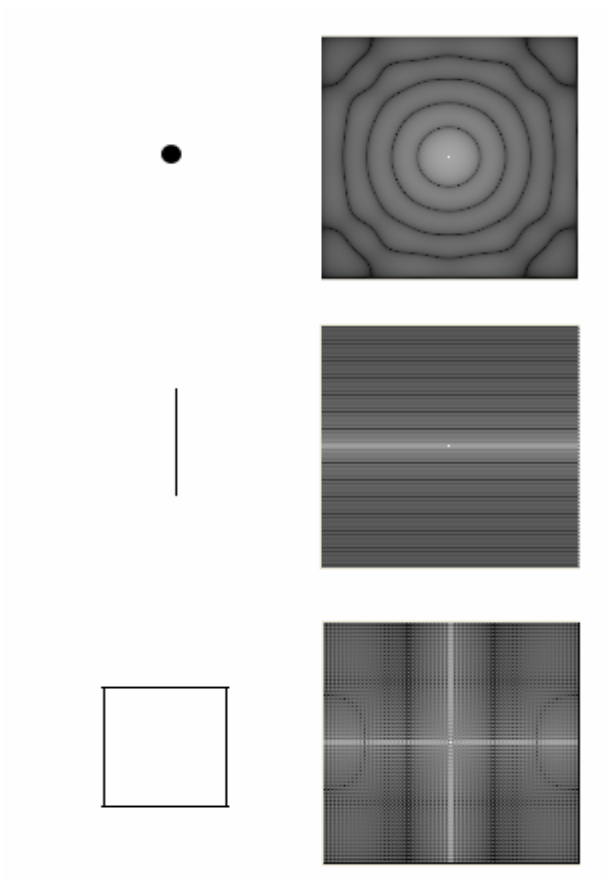
$$P(u) = R^2(u) + I^2(u)$$

Transformada de Fourier **bidimensional**:

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-j2\pi(ux + vy)] dx dy$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) \exp[j2\pi(ux + vy)] du dv$$

Transformada de Fourier 2D



Algumas imagens representadas como
funções bidimensionais e seus
espectros de Fourier.

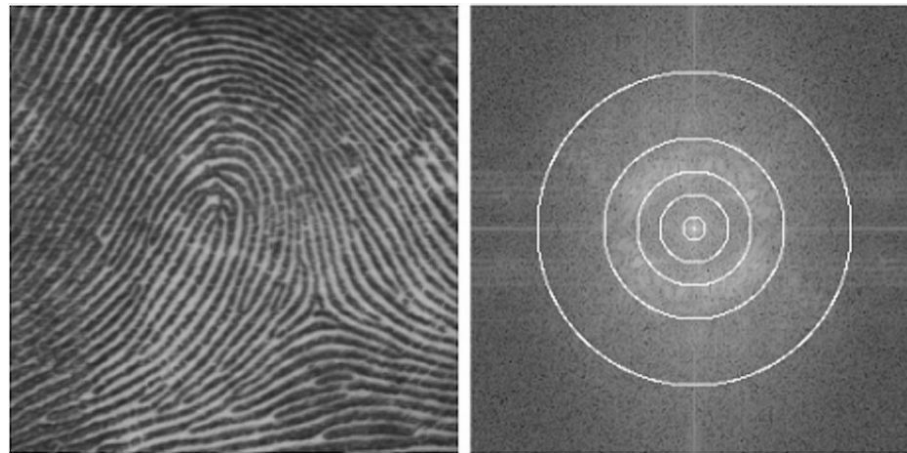
Tem-se o **espectro de Fourier**, o **ângulo de fase** e o **espectro da potência bidimensionais**:

$$|F(u, v)| = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{1/2}$$

$$\phi(u, v) = \tan^{-1} [I(u, v) / R(u, v)]$$

$$P(u, v) = R^2(u, v) + I^2(u, v)$$

A maior parte da informação de uma imagem normal se concentra em baixas frequências

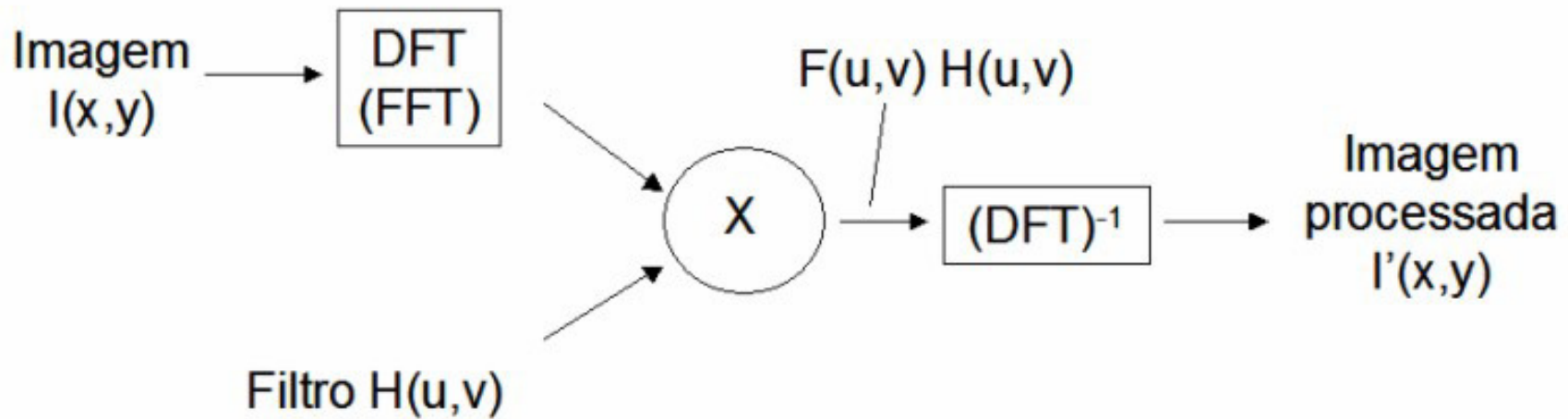


| Raio | Energia |
|------|---------|
| 5 | 94.18% |
| 15 | 94.70% |
| 25 | 96.09% |
| 40 | 99.62% |
| 70 | 99.95% |

Imagens e seu espectro de Fourier, os círculos são falsamente incluídos para se ter uma idéia em que frequência se concentram

Processamento de imagens no domínio de Fourier

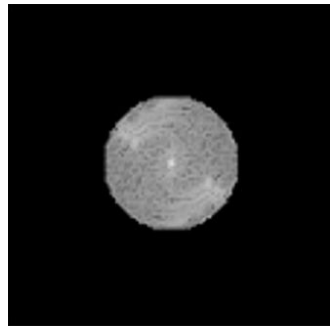
- 1- A imagem $I(x,y)$ é transformada para o **domínio de Fourier** usando transformada **discreta**: DFT.
- 2- A imagem no domínio de Fourier é representada por $F(u,v)$ e é convoluída com o **filtro** $H(u,v)$.
- 3- Depois do produto $F(u,v) H(u,v)$ é aplicada a **inversa da transformada** de Fourier para retornar ao **domínio espacial**, onde se tem a imagem processada $I'(x,y)$.



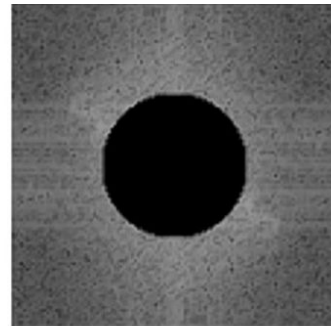
Esquema ilustrando os passos da filtragem no domínio de Fourier

Tipos de filtro quanto a frequencia:

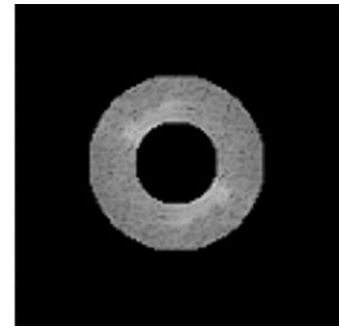
- Passa baixa,
- Passa alta e
- Passa faixa



(a)



(b)



(c)

Filtros Passa Baixa – Filtros de Suavização

Objetivos:

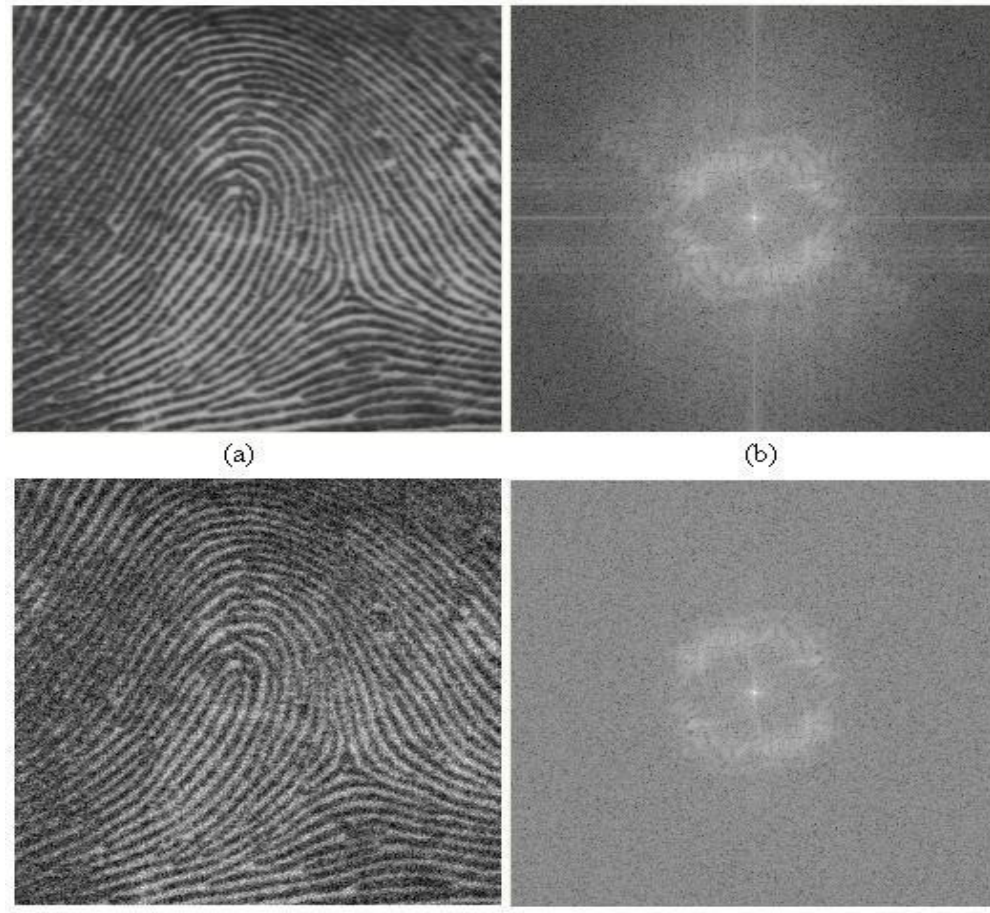
- **Suavizar** a imagem pela **redução das variações nos de níveis de cinza** que dão à aparência de “serrilhado” nos patamares de intensidade.
- Atenuar as **altas frequências**, que correspondem às transições abruptas.
- Minimizar ruídos.

Filtragem Passa Baixa

- Utilizando um **filtro passa baixa** obtém-se uma imagem **mais suavizada**.
- Os **detalhes finos** (ex: bordas, lados e outras transições abruptas de nível de cinza) da imagem correspondem a **altas frequências**.
- Pode-se ter uma perda de detalhes que são os componentes de altas frequências.

Filtragem Passa Baixa

- Na filtragem **passa baixa**, os componentes de baixa frequência da transformada de Fourier **não são alterados**, enquanto os de **alta frequência são removidos**.
- Isto faz com que as partes **constantes** da imagem sejam enfatizados.

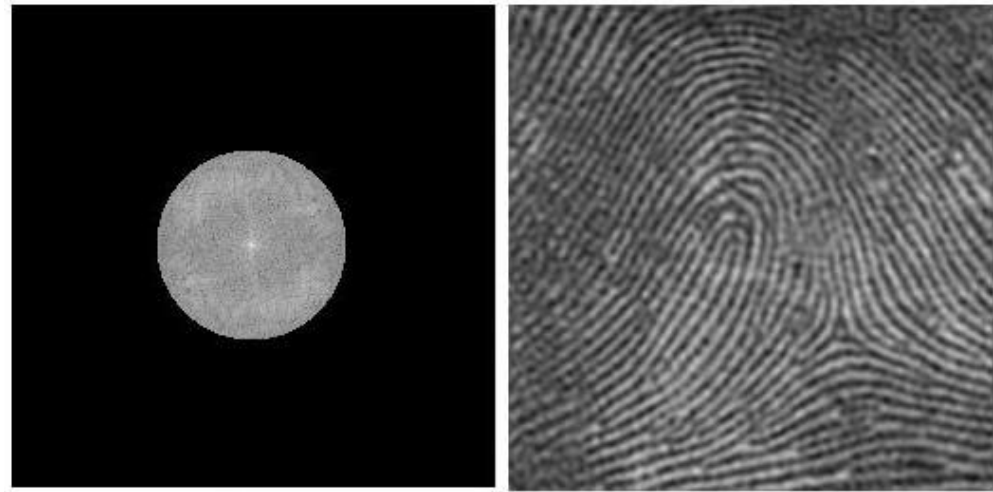


Comparação da imagem e do seu espectro de Fourier **depois** e **antes** de um filtro passa baixa.

Filtro passa baixa ideal:

$$H(u, v) = 1 \text{ se } u^2 + v^2 < r^2$$

$$H(u, v) = 0 \text{ se } u^2 + v^2 \geq r^2$$



(a)

(b)

Resultado da filtragem passa baixa

Filtragem Passa Alta

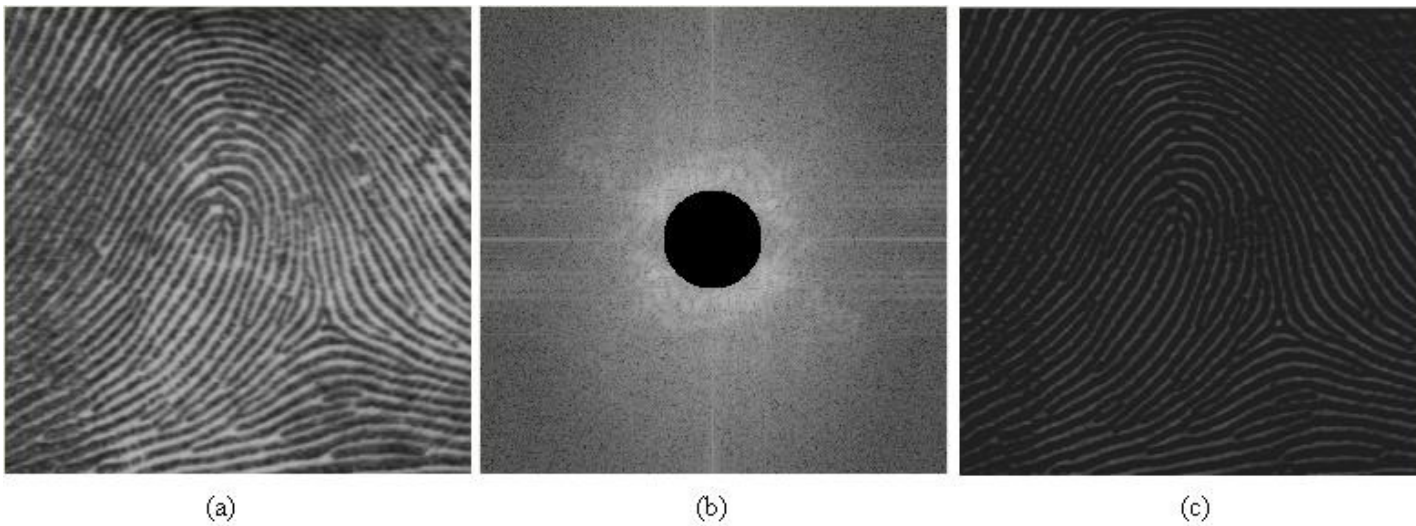
Na filtragem **passa alta**, os componentes de alta frequência da transformada de Fourier **não são alterados**, enquanto os de baixa frequência são removidos.

Isto faz com que os detalhes finos da imagem sejam enfatizados.

Filtro passa alta ideal:

$$H(u,v) = 0 \text{ se } u^2 + v^2 < r^2$$

$$H(u,v) = 1 \text{ se } u^2 + v^2 \geq r^2$$



Resultado da filtragem passa alta.

Outros filtros no domínio de frequência

Filtros pontuais

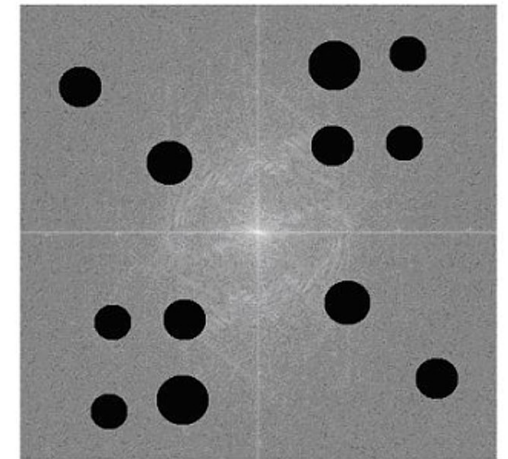
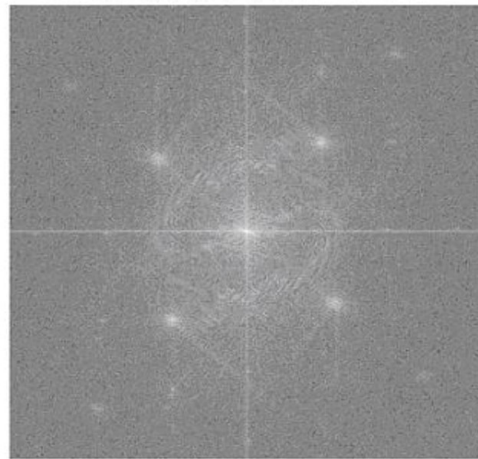
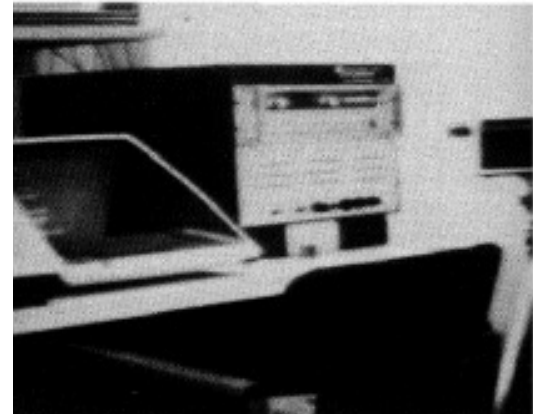
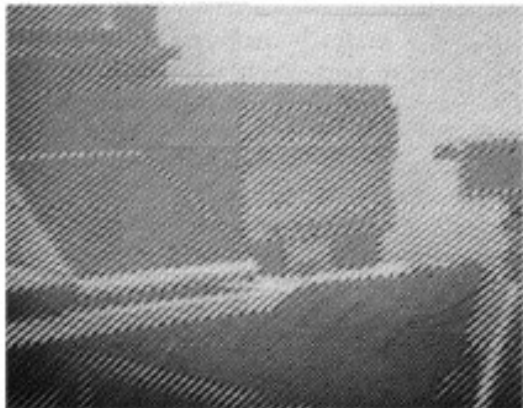


Imagem e seu espectro de Fourier.

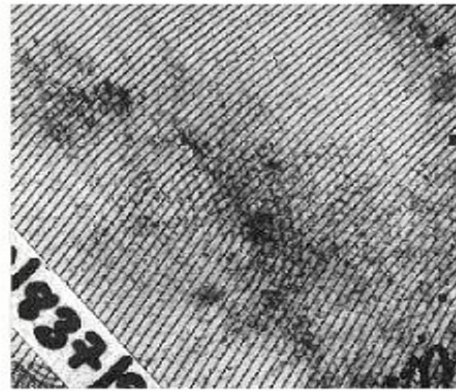
Resultado da filtragem utilizando filtro circular não centrado na origem.



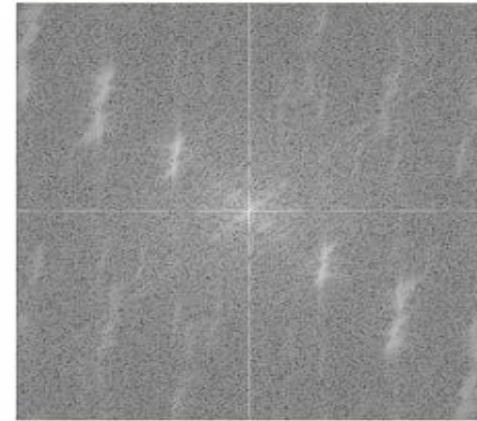
Mas para algumas coisas precisaremos da filtragem em frequência por exemplo: retirar ruído com frequência como no exemplo acima definida

Outros filtros no domínio de frequência

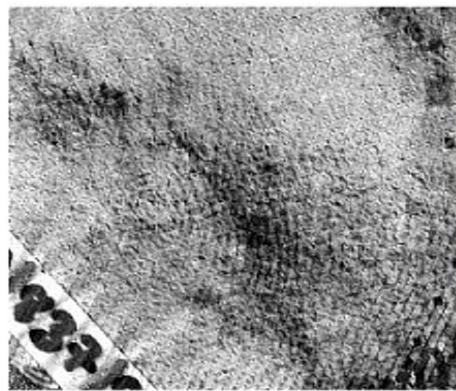
Filtros *fan* ou setor circular



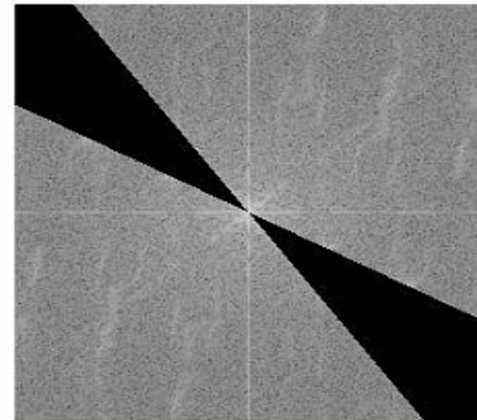
(a)



(b)



(c)

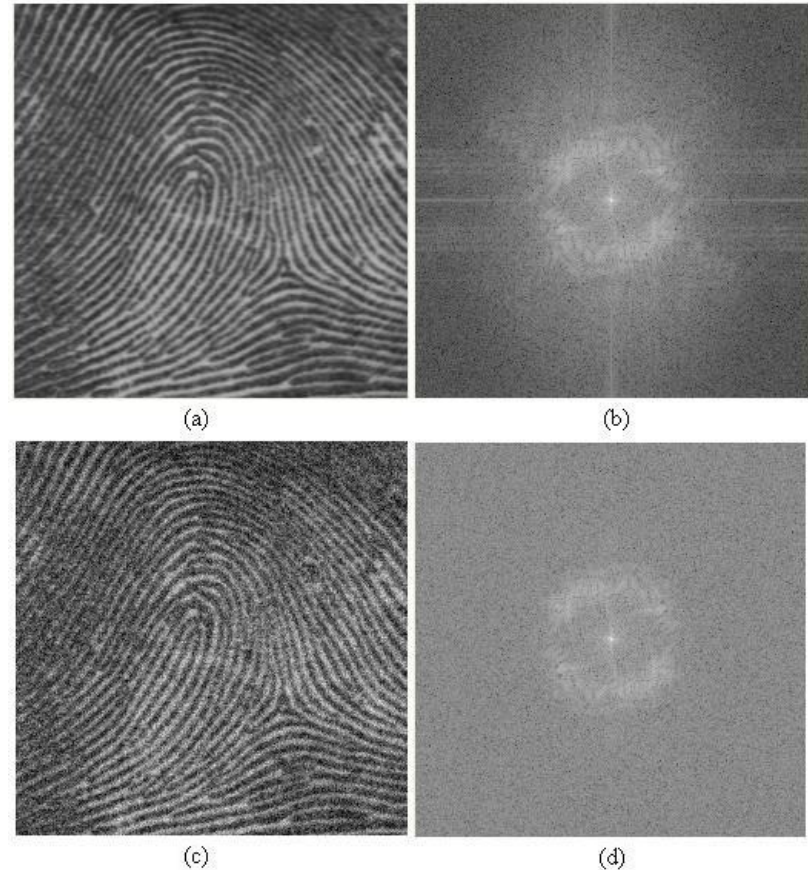


(d)

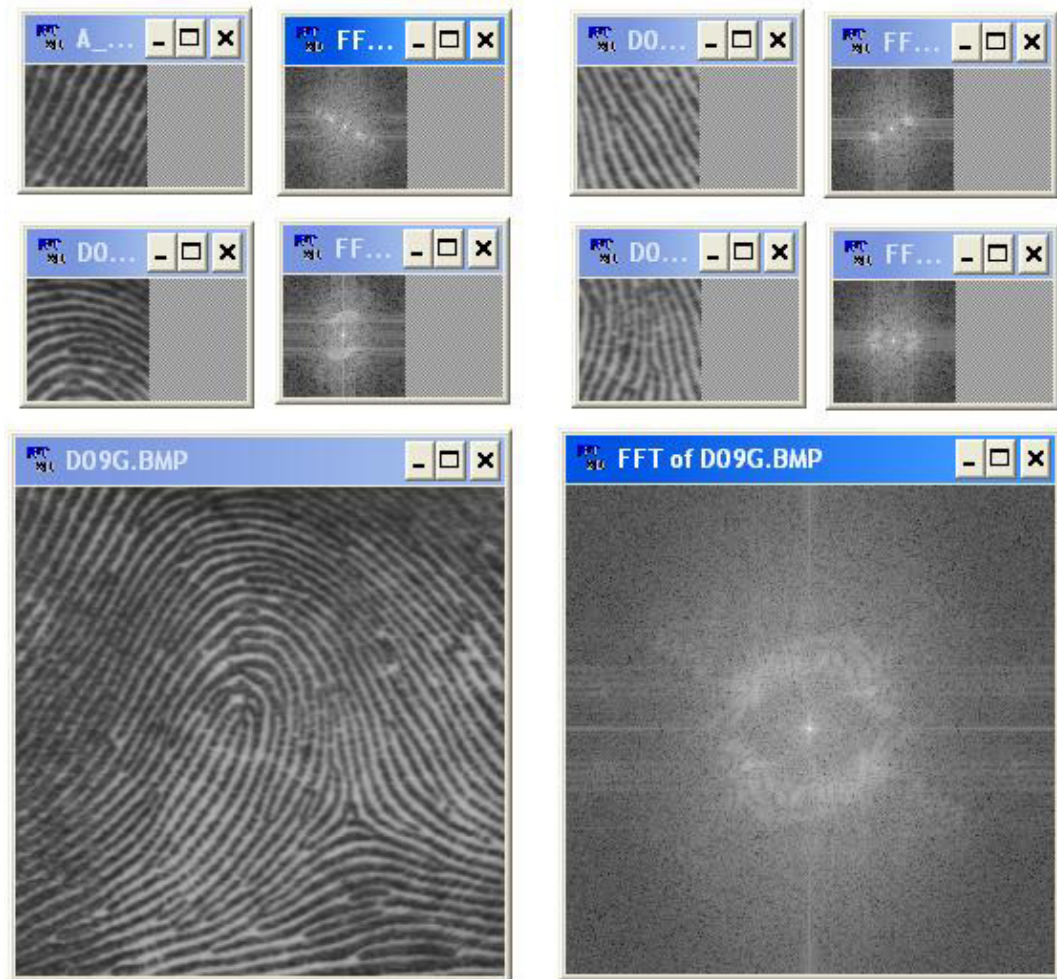
Resultado da filtragem utilizando filtro setor angular.

Caracterizando elementos das Imagens pelo seu espectro de Fourier

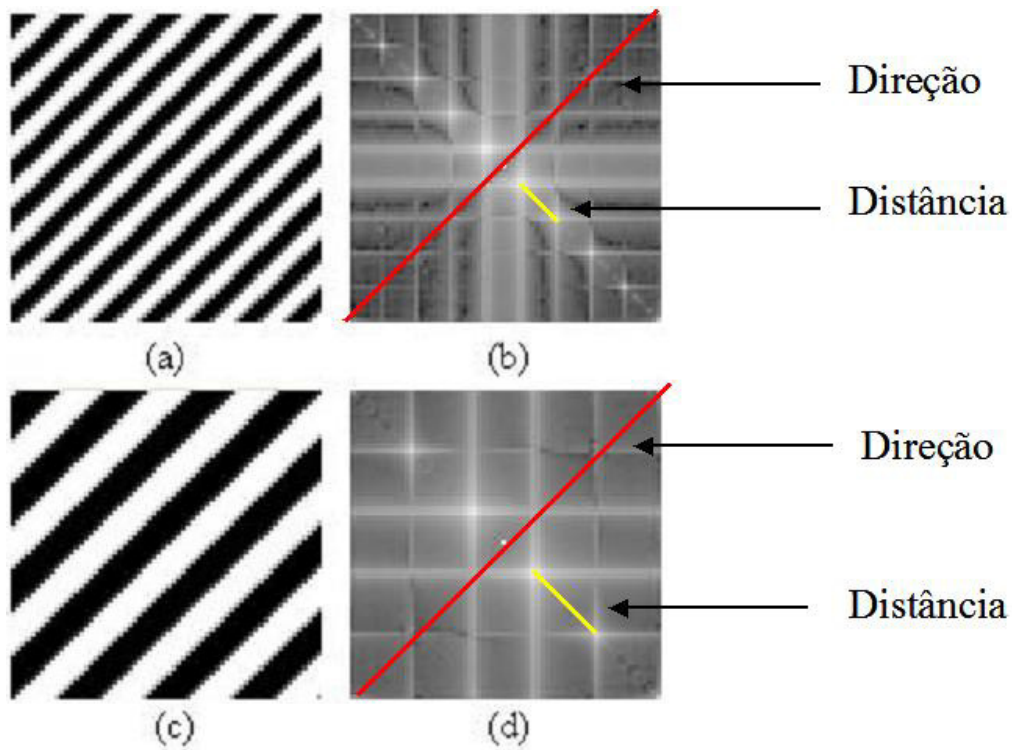
Observa-se no espectro de Fourier de uma impressão digital um **acúmulo de energia** em torno de um **anel**. Isso é devido ao fato das cristas se comportarem como **senóides**, apresentando frequências bem definidas.



Nos espectros de Fourier, de partes desta imagem, aparecem dois picos de intensidade simétricos, em relação à origem.

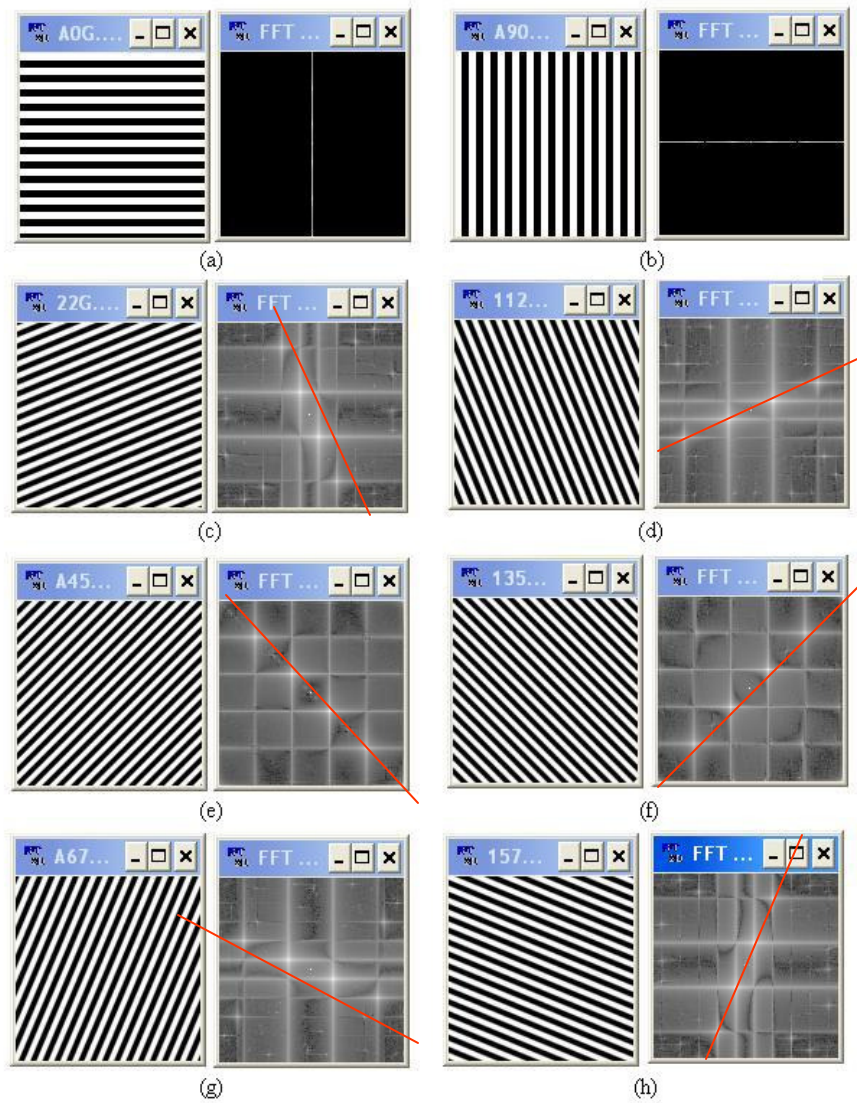


Fragmentos de uma impressão digital e seus espectros de Fourier.



De acordo com a localização desses picos têm-se: a distância e a direção das cristas na região.

Imagens sintéticas representando um fragmento de impressão digital e seus espectros de Fourier.



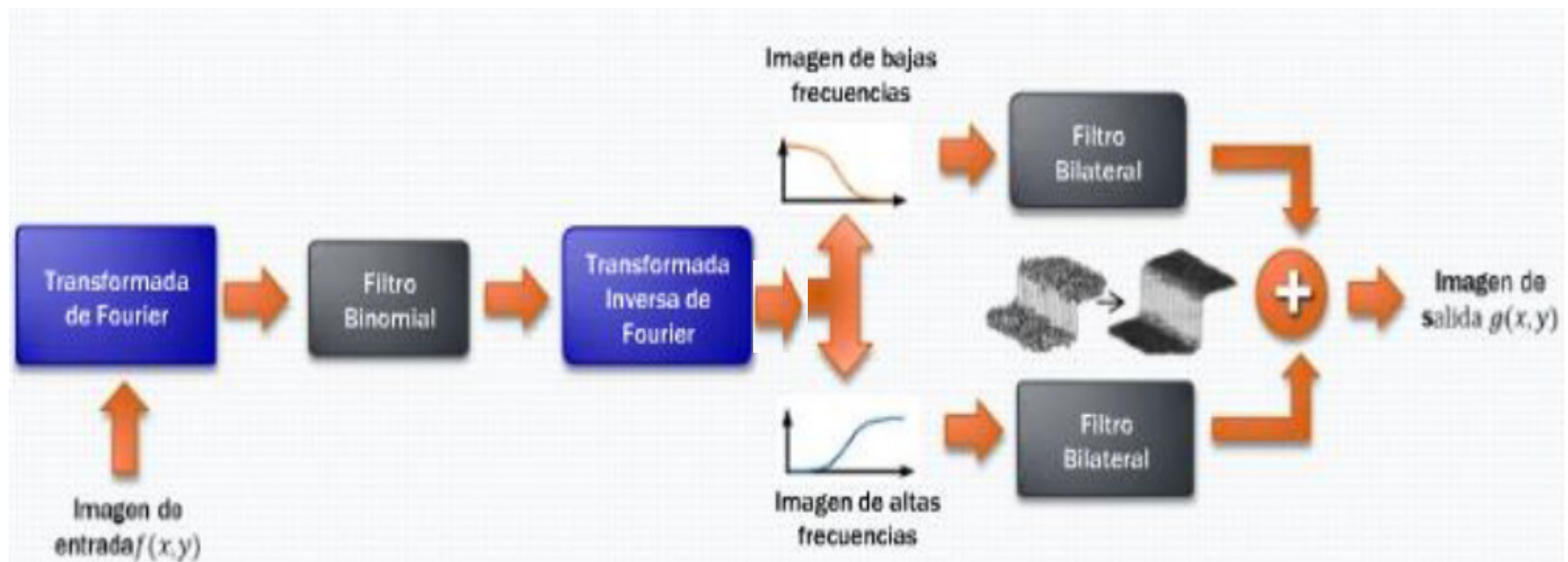
Imagens sintéticas com listras inclinadas e seus espectros de Fourier.

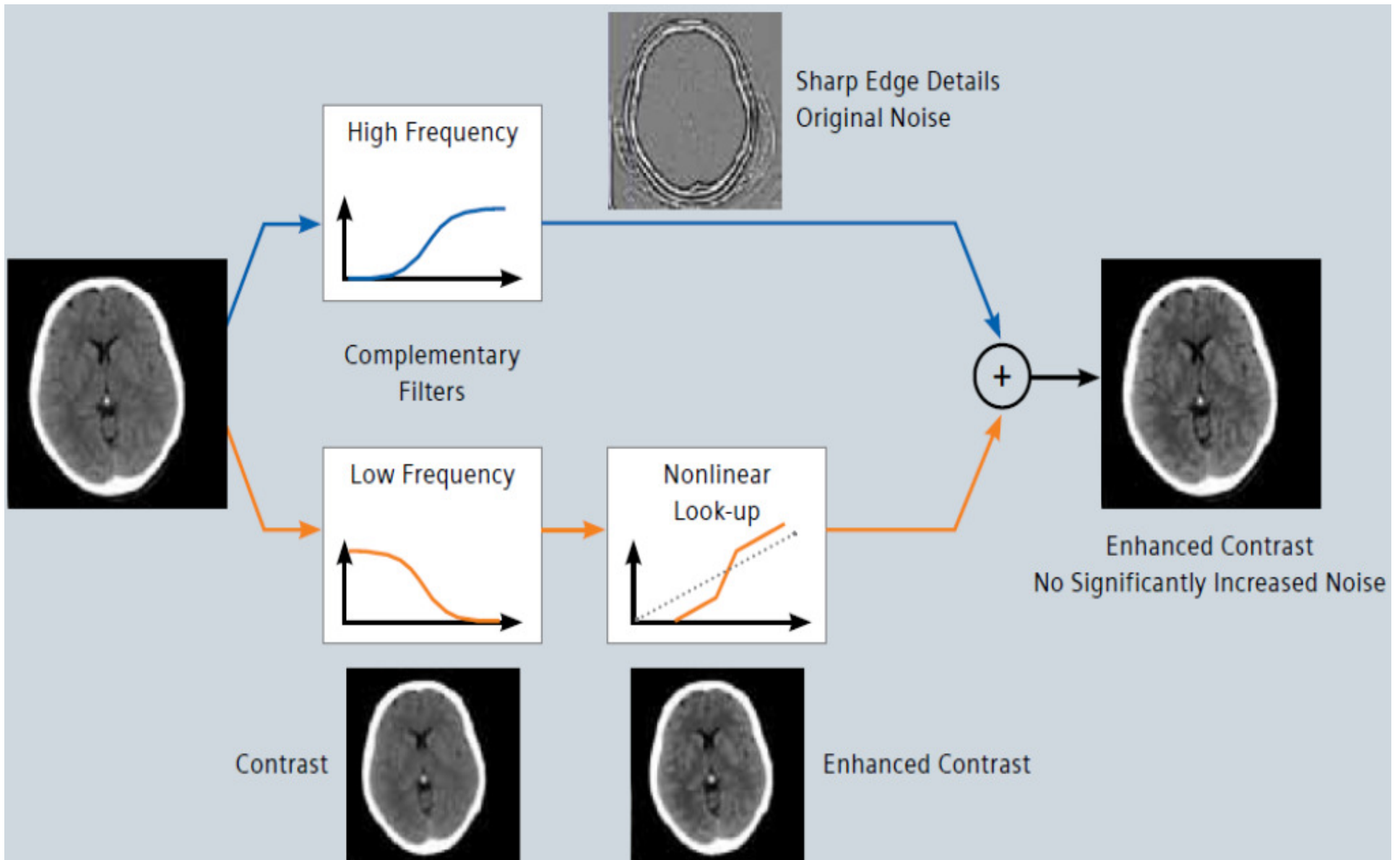
Filtros Compostos

- **Filtro Bilateral – FB**

FB fue propuesto en 1995 por Tomasi y Manduchi, [Tomasi, C., Manduchi, R.: **Bilateral filtering for gray and color images. In: Proc. of International Conference on Computer Vision, IEEE (1998) 839–846.**] y es capaz de preservar los bordes de la imagen y disminuir el ruido en regiones uniformes. El FB ha sido usado para filtrar imágenes de TC, al igual que otros métodos como el de la transformada Wavelet y el de las medias no locales, demostrando estos últimos ser computacionalmente más lentos por requerir una cantidad mayor de operaciones.

La idea principal del Filtro Bilateral es que cada píxel se procesa teniendo en cuenta un criterio de distancia espacial así como una medida de la diferencia en intensidades de gris. Si la intensidad es parecida, de acuerdo con un parámetro predefinido, los píxeles efectivamente tratarán de igualar sus intensidades. Si las intensidades son muy distintas (por ejemplo en los bordes de una imagen), ambos píxeles preservarían sus intensidades originales. En los últimos años el uso de este filtro en la tecnología de imágenes médicas ha venido en aumento.





Filtro de Gabor

- Filtro linear bi-dimensional e não variante ao deslocamento.
- Pode ser entendido como o produto de uma função gaussiana, simétrica em relação à origem e uma função cossenoidal.

Aplicações:

- Segmentação de imagens
- Reconhecimento de faces
- Reconhecimento de assinaturas
- Melhoria e identificação de impressões digitais

Forma geral:

$$G(x, y, f, \theta, \sigma) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_\theta^2}{\sigma_x^2} + \frac{y_\theta^2}{\sigma_y^2}\right)\right] \cdot \exp[2.\pi.j.f(x_\theta)]$$

Onde:

$$x_\theta = x \cos \theta + y \sin \theta \quad y_\theta = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

e x, y são as coordenadas espaciais da imagem, $j = \sqrt{-1}$

Parâmetros:

- 1) f é a frequência da onda no plano senoidal;
- 2) θ_k é a orientação do filtro;
- 3) σ_x e σ_y é o desvio padrão da função gaussiana ao longo dos eixos x e y , respectivamente.

Este filtro pode ser decomposto em componentes reais e imaginários:

$$G_{real}(x, y, f, \theta, \sigma) = \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x_{\theta}^2}{\sigma_x^2} + \frac{y_{\theta}^2}{\sigma_y^2}\right]\right\} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot x_{\theta})$$

$$G_{imag}(x, y, f, \theta, \sigma) = \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x_{\theta}^2}{\sigma_x^2} + \frac{y_{\theta}^2}{\sigma_y^2}\right]\right\} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot x_{\theta})$$

sendo $G_{complexo} = G_{real} + j G_{imag}$

$$G_{real}(x, y, f, \theta, \sigma) = W(x, y, \theta, \sigma) \cdot V(x, f)$$

então é possível visualizar a função gaussiana:

$$W(x, y, \theta, \sigma) = \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x_{\theta}^2}{\sigma_x^2} + \frac{y_{\theta}^2}{\sigma_y^2}\right]\right\}$$

e a função cossenoidal:

$$V(y, f) = \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot x_{\theta})$$

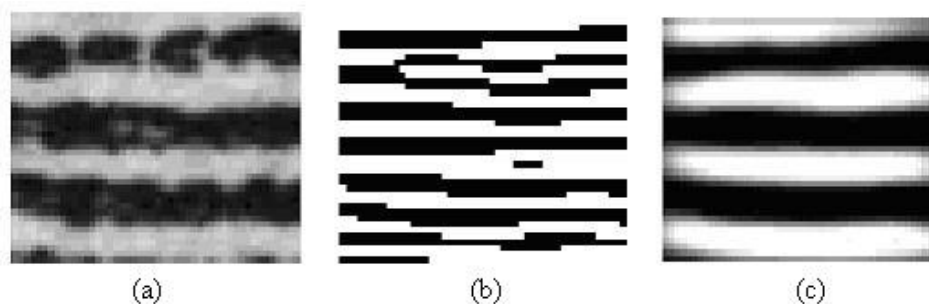
Como a função:

$$G_{real}(x, y, f, \theta, \sigma)$$

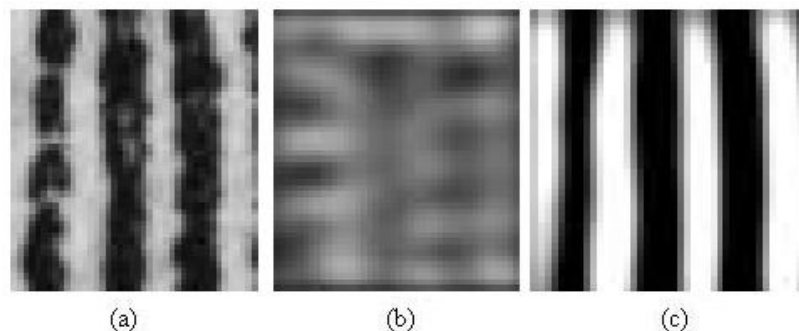
é obtida pelo produto de uma gaussiana por uma cossenoidal de frequência f , então pode ser representada no domínio da frequência e sua transformada de Fourier pode ser obtida pela convolução da transformada de Fourier dessas duas funções.

O resultado dessa convolução é um **filtro passa banda**, que realça as senóides com frequências em torno de f , suprimindo seus ruídos.

Uma das dificuldades para utilização do filtro de Gabor é a escolha ou obtenção de seus parâmetros.



Resultado de uma imagem de impressão digital filtrada por um filtro de Gabor com o parâmetro f incorreto e com parâmetro f correto.



Resultado de uma imagem de impressão digital filtrada por um filtro de Gabor com o parâmetro θ incorreto e com parâmetro correto.

Bibliografia

Gonzaga, S. L. de O.; Viola, F.; Conci, A. ***“An approach for Enhancing Fingerprint Images using adaptive Gabor Filter parameters”***. [Pattern Recognition and Image Analysis](#), ISSN 1054-6618 [Vol. 18, No. 3](#), pp. 497-506

Bhonsle D., Chandra V., Sinha G.R. Medical Image Denoising Using Bilateral Filter. IJ. Image, Graphics and Signal Processing, 2012, 6, 36-43.

Chenyang Xu and Jerry L. Prince. Gradient Vector Flow Deformable Models. Handbook of Medical Imaging, Academic Press, September 2000.

Kass Michael, Witkin Andrew, Terzopoulos Demetri. Snakes: Active contour models. International Journal of Computer Vision, vol 1, n4, p321-331, 1987.