by: Simone Vasconcelos (Dr.)

Matrizes de Co-Ocorrência

1. Introdução

Uma **Matriz de Co-Ocorrência** , ou de **ocorrência simultânea** é uma tabulação de quantas combinações diferentes de valores de intensidade dos pixels (níveis de cinza) ocorrem em uma imagem. O uso principal da Matriz de Co-ocorrência é caracterizar texturas em uma imagem através de um conjunto de estatísticas para as ocorrências de cada nível de cinza em pixels diferentes ao longo de diferentes direções. As matrizes de co-ocorrência são ferramentas para a classificação de imagens. No entanto, elas possuem alto custo computacional a medida que o numero de tons de cinza crescer no imagem.

2. Definição da Matriz de Co-ocorrência

A Matriz de Co-ocorrência de textura considera a relação entre dois pixels por vez, um chamado de pixel referência e o outro de pixel vizinho. O pixel vizinho escolhido pode, ser vizinho em qualquer direção: por exemplo a leste (direita), a oeste (esquerda), a norte (acima), a sul (abaixo) , ou na diagonal, ou seja a nordeste, noroeste, sudoeste e sudeste de cada pixel referência. Também a vizinhança não precisa ser exatamente de 1 pixels, pode ser de 2, 3, ou qualquer valor. Cada pixel dentro da imagem torna-se o pixel referência, iniciando no canto superior esquerdo e procedendo até o inferior direito. Haverá é claro alguns casos particulares, como por exemplo, os pixels situados na margem direita que não têm vizinhos da direita.

A co-ocorrência, na sua forma geral, pode ser especificada por uma matriz de freqüências relativas P (i, j; d, θ), na qual dois elementos de textura vizinhos, separados por uma distância d em uma orientação θ ocorrem na imagem, um com propriedade i e o outro com propriedade j. Instanciando essa definição para co-ocorrência de níveis de cinza, os elementos de textura são pixels e as propriedades são os níveis de cinza. Por exemplo, para um relacionamento com um ângulo $\theta = 0^o$, e vizinhança considerado 1 pixel, tem-se: P (i, j; 1, 0).

Em outras palavras a matriz de co-ocorrência pode ser definida como P(i, j, d, θ) onde: i e j são pixels vizinhos de acordo com a distância d. Esta distância entre os pixels i e j é analisada de acordo com uma direção θ. Os valores possíveis para θ são apresentados na figura abaixo.

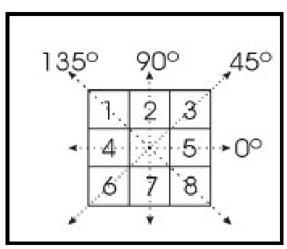

Figura 1 - Ângulos para o cálculo na matriz de co-ocorrência.

Desta forma, a matriz (obrigatoriamente quadrada) de co-ocorrência, representa em cada elemento aij o número de vezes que ocorreu uma transição do nível de cinza Zi para Zj considerando a distância d entre os pixels vizinhos i e j na direção θ.

Essas matrizes podem ser normalizadas através da divisão de cada entrada da matriz pelo número total de pares de pontos de pixels vizinhos que satisfaçam P(i, j, d, θ). Desta forma cada valor será a probabilidades de uma transição, da forma especificada θ, do nível de cinza i para o nível de cinza j, com uma distância d pixels.

3. Construção da Matriz de Co-ocorrência

A partir da definição de matriz de co-ocorrência e os conceitos de vizinhos imediatos e combinação de níveis de cinza, a construção da matriz de co-ocorrência torna-se bem simples.

Para iniciar a construção, é preciso ter uma imagem com Zn níveis de cinza. Para este exemplo será utilizada a imagem ilustrada na figura abaixo (originaria de Gonzalez e Woods , 2002 p. 363). Como se pode observar, essa imagem possui apenas 3 níveis de cinza: $Z_0 = 0$, $Z_1 = 1$ e $Z_2 = 2$.

0	0	0	1	2
1	1	0	1	1
2	2	1	0	0
1	1	0	2	0
0	0	1	0	1

Figura 2 - Imagem com níveis de cinza de 0 1 e 2.

O próximo passo é construir a matriz de co-ocorrência, que será obviamente uma matriz quadrada, pois conterá o mesmo número de linhas e de colunas que equivalem ao número total de níveis de cinza. A combinação possível de níveis de cinza que forma a matriz é ilustrada a seguir:

	0	1	2
0	Ocorrência do tom 0 (zero) em Z_0 e Z_1	Ocorrência do tom 0 (zero) em Z_0 e do tom 1 (um) em e Z_1	Ocorrência do tom 0 (zero) em Z_0 e do tom 2 (dois) em e Z_1
1	Ocorrência do tom 1 (um) em Z_0 e do tom 0 (zero) em e Z_1	Ocorrência do tom 1 (um) em Z_0 e Z_1	Ocorrência do tom 1 (um) em Z_0 e do tom 2 (dois) em e Z_1
2	Ocorrência do tom 2 (dois) em Z_0 e do tom 0 (zero) em e Z_1	Ocorrência do tom 2 (dois) em Z_0 e do tom 1 (um) em e Z_1	Ocorrência do tom 2 (dois) em Z_0 e Z_1

Para esse exemplo, vamos considerar primeiro que a distância será definida como d = 1. Para cada imagem sempre haverá quatro matrizes de co-ocorrência, uma para cada direção, ou seja, uma matriz para $\theta = 0^o$, $\theta = 45^o$, $\theta = 90^o$ e $\theta = 135^o$. Sendo a direção $\theta = 0^o$, para cada pixel analisado, deve-se que verificar o pixel imediatamente à direita , pois a distância é 1 e a direção é 0^o.

Cada posição da matriz de co-ocorrência conterá a variação dos níveis de cinza referentes aos parâmetros informados no parágrafo anterior, considerando os índices da matriz. Então, por exemplo, a posição (0, 0) da matriz de co-ocorrência conterá a quantidade de vezes que houve a ocorrência do nível de cinza 0 com vizinho no nível de cinza 0 na horizontal à direita ou à esquerda. Nesse exemplo, a repetição do valor (0, 0) será igual a 4, pois, como pode ser visto na imagem, essa situação ocorre nas posições a seguir:

$I_{(0,0)} \rightarrow I_{(0,1)}$, $I_{(0,1)} \rightarrow I_{(0,2)}$, $I_{(2,3)} \rightarrow I_{(2,4)}$, $I_{(4,0)} \rightarrow I_{(4,1)}$

Nesse exemplo, a repetição do valor (0, 1) será igual a 4, pois, como pode ser visto na imagem, essa situação ocorre nas posições a seguir:

$I_{(0,2)} \rightarrow I_{(0,3)}$, $I_{(,1,2)} \rightarrow I_{(1,3)}$, $I_{(4,1)} \rightarrow I_{(4,2,)}$, $I_{(4,3)} \rightarrow I_{(4,4)}$

E assim por diante....

Se d = 2 ocorreriam M(0,0) = 3 vezes, como apresentado a seguir:
$I_{(0,0)} \rightarrow I_{(0,2)}$; $I_{(3, 2)} \rightarrow I_{(3,4)}$; $I_{(4,1)} \rightarrow I_{(4,3)}$

Em algumas formulações os valores da diagonal principal serão contados em dobro, isto porque a diagonal principal contém a análise das transições de níveis de cinza iguais, uma única vez, enquanto nas demais regiões da matriz eles acabam sendo diferenciados. Assim se ocorre os tons 1,1 da direita para esquerda, sempre ocorrerá da esquerda para a direita. Enquanto que nas outras posições da matriz, há duas possibilidades de computação, por exemplo 1,2 e 2,1.

Desta forma, sendo $Z_0 = 0$, $Z_1 = 1$ e $Z_2 = 2$, uma transição $Z_0 \rightarrow Z_0$ será analisada nos dois sentidos para uma mesma direção, ou seja, $Z_0 \rightarrow Z_0$ e $Z_0 \leftarrow Z_0$. Já uma transição $Z_0 \rightarrow Z_1$ é diferente de uma transição $Z_1 \rightarrow Z_0$.

A matriz resultante para d = 1 e $\theta = 0^o$ é (na formulação que dobra os valores da diagonal principal):

	0	1	2
0	8	4	1
1	4	6	1
2	1	2	2

Na posição (0,1) da matriz de co-ocorrência encontra-se o valor P(0,1) = 4. Esse valor é obtido do seguinte modo: o valor P(0,1) da matriz de co-ocorrência é incrementado em uma unidade, se o valor do elemento adjacente à direita for igual a 1, para cada elemento da matriz da imagem com valor 0.

Ou na formulação, que não faz esta consideração:

	0	1	2
0	4	4	1
1	4	3	1
2	1	2	1

As matrizes com um pixel de vizinhança e nas direção 45^o, 90^o e 135^o são, respectivamente:

	0	1	2
0	6	5	2
1	5	4	4
2	2	4	0

	0	1	2
0	2	5	1
1	5	1	2
2	1	3	0

	0	1	2
0	4	2	0
1	2	3	2
2	1	2	0

Para chegar-se a forma final da matriz de co-ocorrência precisa-se dividir cada elementos pelo número total , ou seja matriz de co-ocorrência é dada pela matriz quadrada de probabilidade $P_{i,j,}$ onde cada elemento (i,j) representa a probabilidade de um certo valor aparecer na matriz, sendo então calculado pela equação:

$$P_{i,j} = \frac{M_{i,j}}{\sum_{i,j=0}^{N-1} (M_{i,j})}$$

Onde:
• i é o número da linha e j o número da coluna
• M é o conteúdo da célula (i, j)
• $P_{i,j}$ é a probabilidade da célula (i, j)
• N é o número de linhas ou colunas, uma vez que M é uma matriz quadrada

Desta forma, tem-se uma matriz normalizada, obtida pela divisão de cada posição da matriz pelo numero total de valores. A partir das matrizes obtidas neste exemplo, a matriz de direção $\theta = 135^o$ normalizada é dada a seguir:

	0	1	2
0	0,25	0,125	0,0
1	0,125	0,1875	0,125
2	0,0625	0125	0,0

Diversos atributos de textura foram propostos utilizando os valores calculados a partir da matriz de co-ocorrência. A tabela abaixo apresenta alguns, onde R corresponde à quantidade de elementos que compõem a matriz e $\sum i$ e $\sum j$ equivalem a $\sum^{Ng} i$ e $\sum^{Ng} j$, respectivamente.

Tabela 1 - Valores calculados a partir da matriz de co-ocorrência.

Valores Calculados	
$p(i,j)$	Elemento (i,j) normalizado, $P(i,j)/R$.
$p_x(i)$	Soma dos valores da i-éssima linha, $\sum_j p(i,j)$.
$p_y(j)$	Soma dos valores da j-éssima coluna, $\sum_i p(i,j)$.
N_g	Número de níveis de cinza que compõem a imagem.
$p_{(x+y)}(k)$	$\sum_i \sum_j p(i,j)$, se $i+j=k$.
$p_{(x-y)}(k)$	$\sum_i \sum_j p(i,j)$, se $\|i-j\|=k$.

4. Propriedades da Matriz de Co-ocorrência

Algumas propriedades importantes da matriz de co-ocorrência são:
▪ Toda matriz de co-ocorrência é uma matriz quadrada.
▪ O número de linhas e de colunas é igual ao nível de quantização da imagem.
▪ A matriz de co-ocorrência é simétrica ao redor da diagonal.

5. Exemplo de Utilização da Matriz de Co-ocorrência

Uma das áreas que utiliza Matriz de Co-ocorrência é a determinação das características de textura de uma imagem, tais como: homogeneidade, contraste, organização estrutural, complexidade e a natureza das transições dos níveis de cinza.

▪ Segundo Momento Angular e Energia: Tanto o segundo momento angular (SMA) quanto a energia usam Pi,j como pesos. Valores elevados de SMA ou energia ocorrem quando a imagem está muito ordenada.

▪ Contraste: É uma estimativa das variações locais ao quadrado dos níveis de cinza entre pares de pixels. Esta medida é também chamada de soma do quadrado da variância. Medidas relacionadas a contraste usam pesos relacionados com a distância da diagonal da Matriz de Co-ocorrência. Valores na diagonal da Matriz de Co-ocorrência representam pouco contraste, aumentando quando a distância da diagonal aumenta.

▪ Correlação: O coeficiente de correlação utilizado em estatística é uma medida do grau de associação linear (negativa ou positiva) entre duas variáveis quantitativas. A correlação em textura mede a dependência linear de pixels em relação a sua vizinhança.

▪ Variância: A variância quando utilizada na textura executa a mesma tarefa que a variância utilizada na estatística descritiva. Ela baseia-se na dispersão dos dados numéricos em torno de um valor médio, de valores dentro da Matriz de Co-ocorrência. Entretanto, a variância da Matriz de Co-ocorrência, trata especificamente das combinações do pixel de referência e do seu vizinho. Então, isso não é o mesmo que a simples variância de níveis de cinza na imagem original.

▪ Homogeneidade: Os valores dos pesos da homogeneidade são inversamente proporcionais aos pesos do contraste, com pesos diminuindo exponencialmente quanto mais distantes da diagonal. Dissimilaridade e contraste resultam em grandes valores para imagens compostas principalmente por níveis de cinza diferentes (por exemplo, brancos e pretos), enquanto que a homogeneidade resulta em grandes valores para níveis de cinza similares. Se os pesos diminuem distantes da diagonal, o resultado será maior para imagens com pouco contraste.

6. Considerações Finais

Para construir uma matriz de Co-ocorrência é preciso identificar o número de níveis de cinza presentes na imagem. A matriz de co-ocorrência irá conter um número de linhas e de colunas de acordo com o número de níveis de cinza da imagem. Desta forma, se a imagem possui k níveis de cinza, sua matriz de co-ocorrência possui k linhas e k colunas, sendo, portanto uma matriz $k \times k$, ou seja, uma matriz quadrada.

A matriz de Co-ocorrência é muito utilizada para extrair características de texturas de imagens, definidas através de um conjunto de medidas calculadas utilizando-se matrizes de Co-ocorrência.

Referências Bibliográficas

Nascimento, J.P.R.; Madeira, H.M.F.; Pedrini, H. **Classificação de Imagens Utilizando Descritores Estatísticos de Textura.** Anais XI SBSR, p. 2099 - 2106. Belo Horizonte, 2003.

Rocha, A.R.; Leite, N.J. **Classificação de texturas a partir de vetores de atributos e função de distribuição de probabilidades.** Instituto de Computação – Unicamp. Campinas, SP.

Ferrero, C.A.; Lee, H.D.; Chung, W.F.; Coy, C.S.R; Fagundes, J.J; Góes, J.R.N. **Seleção de Características Baseadas em Textura para a Identificação de Anormalidades em Imagens de Colonoscopia.**

Stein, T. **Avaliação de Descritores de Textura para Segmentação de Imagens.** Dissertação de Mestrado em Informática, Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2005.