Universidade Federal Fluminense
Instituto de Computação

Carlos Alberto Martinhon

ALGORITMOS RANDÔMICOS EM OTIMIZAÇÃO COMBINATÓRIA

mart@dcc.ic.uff.br

Departamento de Ciência da Computação – IC/UFF

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Embora se conheça aplicações envolvendo algoritmos randômicos desde épocas primitivas (Shallit[1992]) os primeiros artigos sobre este assunto datam do final da década de 70 com os trabalhos de Rabin[1976] e Solavay e Strassen[1977] para o problema do reconhecimento de números primos (*Primality Test*). As décadas de 1980 e 1990 testemunharam, a partir de então, um enorme crescimento da área de algoritmos randômicos. Eles emergiram de aplicações voltadas unicamente à teoria dos números e geometria computacional para problemas nas mais diversas áreas de interesse. Uma gama enorme de pesquisadores tem utilizado, cada vez mais, técnicas e ferramentas oriundas de modelos probabilísticos, sejam eles seqüenciais ou paralelos. Como exemplo, pode-se citar aplicações em algoritmos *on-line*, otimização combinatória, criptografia, geometria computacional, teoria dos números, estrutura de dados, processamento paralelo e distribuído entre outras (Karp[1991], Gupta et. al. [1994], Motwani&Raghavan [1995]).

Ao executar um algoritmo determinístico repetidas vezes para uma mesma entrada, obtém-se sempre, uma mesma saída com tempo de processamento sempre constante. Isto não ocorre com os algoritmos randômicos ou probabilísticos onde cada execução poderá produzir, dependendo da aplicação, uma saída diferente baseada em eventos aleatórios. Nestas situações, os tempos de processamento e/ou os resultados obtidos definem uma “função randômica” da entrada. Surpreendentemente, para uma grande quantidade de problemas, a utilização de algoritmos randômicos se constitui na forma mais simples e/ou mais rápida de implementação! Nestes casos, sua utilização implica em uma melhora de desempenho quando comparada a algoritmos puramente determinísticos !

Em um algoritmo randômico, além da entrada de dados associada a um problema, uma fonte de *bits* randômicos é utilizada com o propósito de realizar escolhas aleatoriamente. Desta forma, é inevitável que a análise de desempenho de tais algoritmos utilize conceitos e ferramentas oriundos de teoria de complexidade e probabilidade. Com o propósito de auxiliar o leitor ainda não familiarizado com estes tópicos, faremos, na primeira parte do trabalho, uma breve introdução destes conceitos.

No Capítulo I discutiremos alguns dos modelos de máquina utilizados (máquina RAM determinística e probabilística). Definiremos complexidade local e assintótica, bem como algumas de suas propriedades associadas. Será dada também, uma atenção especial à complexidade de algoritmos recursivos, em particular, ao algoritmo *Quicksort* para o problema de ordenação. Este exemplo será estudado novamente no Capítulo III, quando sua versão probabilística for apresentada (*Quicksort randômico*). De maneira geral, o conceito de recorrência é mais amplo e pode ser estendido a modelos probabalísticos (Recorrência Probabilística-Karp [1994]).

No Capítulo II, daremos uma atenção especial ao estudo de distribuições de probabilidade discretas. A máquina RAM probabilística ou máquina de Turing probabilística, analogamente aos modelos determinísticos, trabalham apenas com valores inteiros. Assim, solução gerada e tempo de processamento de um algoritmo são quantidades enumeráveis e podem ser representadas convenientemente por variáveis aleatórias discretas.

No Capítulo III, fazemos uma breve introdução aos algoritmos randômicos. Definimos os métodos de *Monte Carlo e Las Vegas* e apresentamos algumas aplicações associadas. No método de Las Vegas, estudamos o *Quicksort* Randômico, o problema da coloração de conjuntos e o problema da Geração de Orientações Acíclicas em Grafos. No método de Monte Carlo, consideramos várias aplicações de interesse, entre elas, abordamos o problema de Corte Mínimo em Grafos, o problema da determinação de Emparelhamentos Perfeitos em um Grafos, o problema de Multiplicação de Matrizes (versão decisão) entre outras. Finalizamos o capítulo definindo algumas classes de complexidade no modelo probabilístico que são de fundamental importância na classificação de problemas de decisão.

No Capítulo IV, estudamos os algoritmos randômicos aproximativos, técnica que vem sendo cada vez mais utilizada na solução de problemas combinatórios NP-Árduos. Começamos tratando dos algoritmos aproximativos determinísticos, apresentando seus principais conceitos e definições. Em seguida, aplicamos os algoritmos randômicos aproximativos ao problema *MAX-SAT* e ao problema Geral de Recobrimento (*General Covering Problem*), mais especificamente, ao problema de Recobrimento de Conjuntos (*Set Covering Problem*). Na abordagem aqui apresentada, formula-se inicialmente uma relaxação linear do problema. Estas soluções (relaxadas) irão definir probabilidades para algum procedimento randômico, utilizado logo a seguir. Trata-se, na verdade, de uma aplicação do *Método Probabilístico*, desenvolvido inicialmente por Erdös&Spencer[1974]. Nele, o objetivo principal será garantir a existência de objetos combinatórios. Em seguida, utilizando-se o método das probabilidades condicionais, pode-se construir uma versão determinística para o problema original (*Derandomization techniques*). Em nosso trabalho, as versões determinísticas para os problemas MAX-SAT e Recobrimento serão implementadas através do método das Expectâncias Condicionais.

Vários tópicos interessantes sobre o assunto, ainda não foram considerados nesta primeira versão do trabalho. Entre eles, podemos citar a utilização de algoritmos randômicos em Programação Linear (Motwani e Raghavan[1995]), a utilização de Programação de Semidefinida na relaxação de problemas combinatórios (Goemans&Willianson [1994/95]), Amostra Randômica (*Random Sampling*) em Grafos (Karger[1995]), percursos aleatórios em grafos, entre outros.

Os modelos probabilísticos de computador podem ser vistos como uma extensão dos modelos puramente determinísticos. Sua utilização e aplicação na resolução de problemas algorítmicos constitui, sem dúvida alguma, um tema fascinante de pesquisa e que vem despertando, cada vez mais, o interesse da comunidade científica.