

Um Estudo sobre Metodologias de Codificação Fractal

Aura Conci

Curso de Geometria Fractal

IC/UFF

Motivação

- **Reduzir o número de bits necessários à representação de imagens (transmissão e armazenamento)**
- **A velocidade de transmissão e o espaço de armazenamento de um arquivo são proporcionais ao seu tamanho**
- **Imagens comprimidas têm um custo computacional menor**

Objetivo

- **Implementar técnicas de compressão fractal automáticas**
- **Comparar a eficiência das diversas técnicas implementadas**
- **Introduzir o conceito de DF local nesta compressão**
- **Implementar a compressão de imagens coloridas**

Organização

- **Compressão fractal clássica**
- **Teorema da Colagem**
- **Problema Inverso**
- **Modificações efetuadas na compressão clássica para uma codificação mais eficiente**
- **Aliasing**
- **Técnicas conhecidas implementadas**
- **Técnicas analisadas**
- **Técnica desenvolvida neste trabalho**
- **Compressão colorida**
- **Resultados**
- **Conclusões**
- **Sugestões para trabalhos futuros**

Organização

- **Compressão fractal clássica**

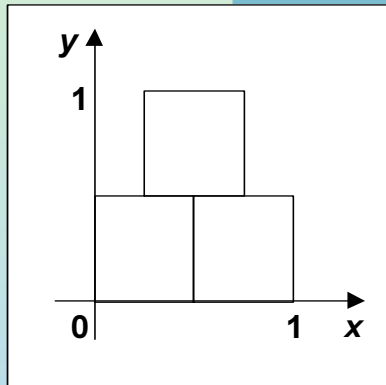
Compressão Fractal Clássica

- **Imagens monocromáticas**
- **Busca auto-semelhanças geométricas em diferentes escalas**
- **Um Sistema de Funções de Iteração (SFI) é formado por um conjunto de transformações afins, cada uma com o seguinte aspecto:**

$$w(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Exemplo: o Triângulo de Sierpinski pode ser gerado por um SFI com 3 transformações.

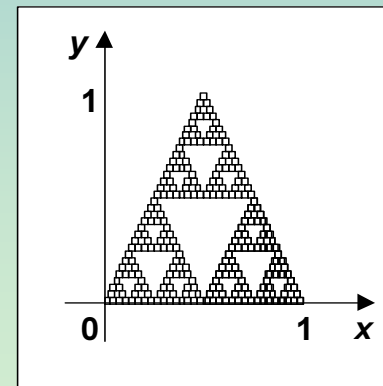
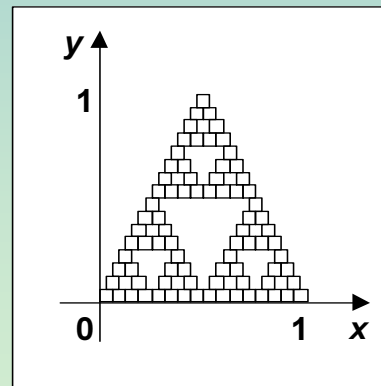
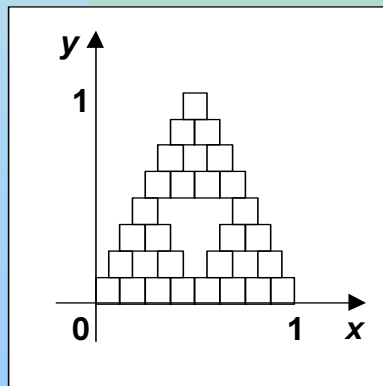
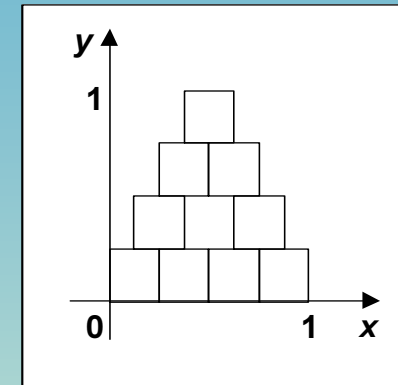
Geração do Triângulo de Sierpinski



$$w_1(x, y) = (1/2 x, 1/2 y)$$

$$w_2(x, y) = (1/2 x + 1/2, 1/2 y)$$

$$w_3(x, y) = (1/2 x + 1/4, 1/2 y + 1/2)$$



Código Fractal

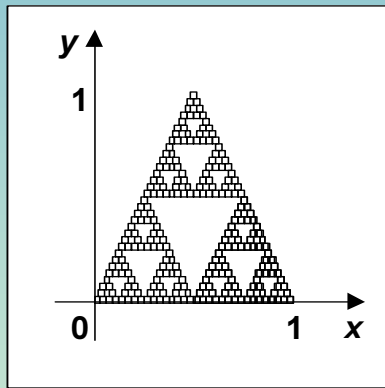
O código fractal, de uma imagem, são os coeficientes das transformações do SFI

Transf.	a	b	c	d	e	f
w_1	$1/2$	0	0	$1/2$	0	0
w_2	$1/2$	0	0	$1/2$	$1/2$	0
w_3	$1/2$	0	0	$1/2$	$1/4$	$1/2$

Organização

- **Compressão fractal clássica**
- **Teorema da Colagem**

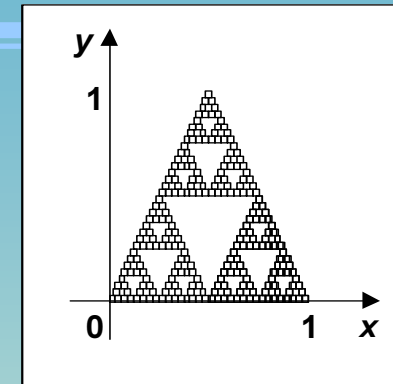
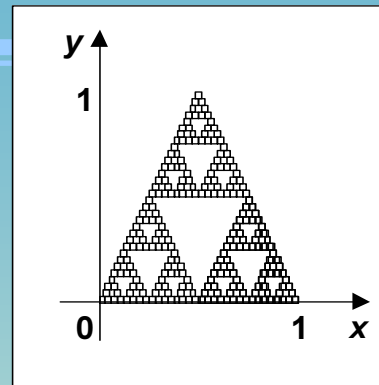
Teorema da Colagem



$$w_1(x, y) = (1/2 x, 1/2 y)$$

$$w_2(x, y) = (1/2 x + 1/2, 1/2 y)$$

$$w_3(x, y) = (1/2 x + 1/4, 1/2 y + 1/2)$$



$$w_4(x, y) = (1/4 x, 1/4 y)$$

$$w_5(x, y) = (1/4 x + 1/4, 1/4 y)$$

$$w_6(x, y) = (1/4 x + 1/8, 1/4 y + 1/4)$$

$$w_7(x, y) = (1/4 x + 1/2, 1/4 y)$$

$$w_8(x, y) = (1/4 x + 3/4, 1/4 y)$$

$$w_9(x, y) = (1/4 x + 5/8, 1/4 y + 1/4)$$

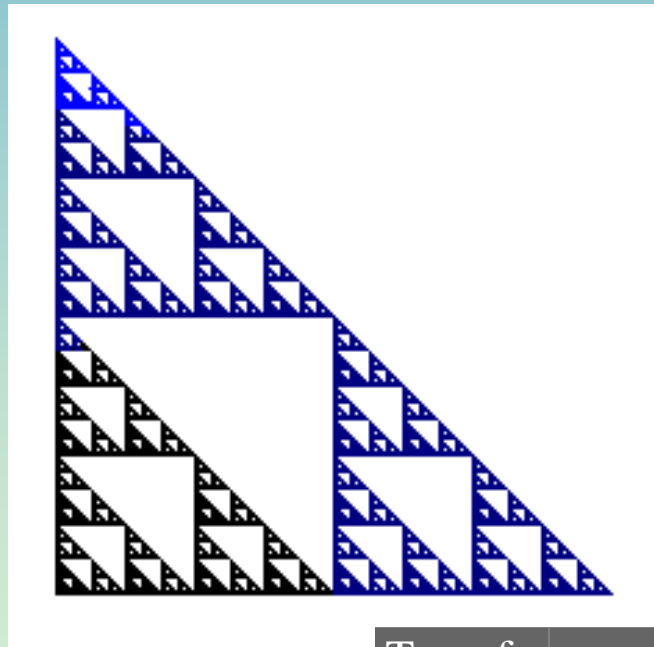
$$w_{10}(x, y) = (1/4 x + 1/4, 1/4 y + 1/2)$$

$$w_{11}(x, y) = (1/4 x + 1/2, 1/4 y + 1/2)$$

$$w_{12}(x, y) = (1/4 x + 3/8, 1/4 y + 3/4)$$

SFI com Probabilidades

- Para permitir o aparecimento de imagens em tons de cinza ou coloridas, podemos acrescentar probabilidades aos SFI.



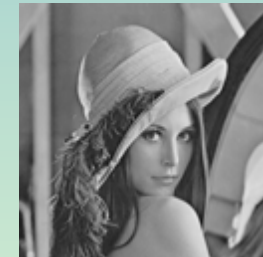
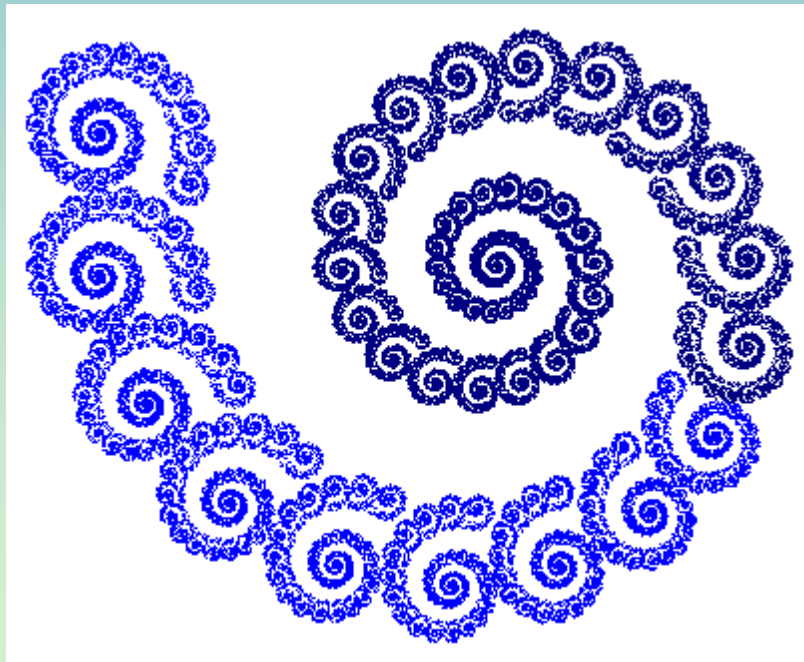
Transf.	a	b	c	d	e	f	P
w_1	1/2	0	0	1/2	0	0	0,33
w_2	1/2	0	0	1/2	1/2	0	0,33
w_3	1/2	0	0	1/2	0	1/2	0,34

Organização

- **Compressão fractal clássica**
- **Teorema da Colagem**
- **Problema Inverso**

Problema Inverso

- Dado um conjunto S , é possível encontrar o SFI W , que possua um atrator A , que aproxime este conjunto S com uma precisão desejada em uma métrica d apropriada ?

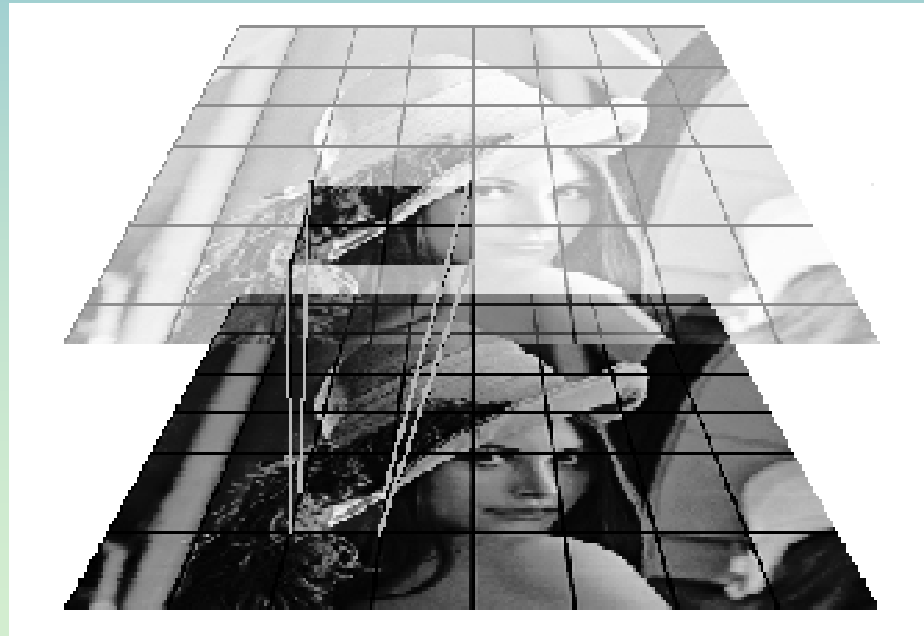


Organização

- **Compressão fractal clássica**
- **Teorema da Colagem**
- **Problema Inverso**
- **Modificações efetuadas na compressão clássica para uma codificação mais eficiente**

Compressão Fractal Automática

- **Utiliza um Sistema de Funções de Iteração Particionado (SFIP)**
- **Busca as semelhanças existentes entre diferentes partes da imagem**
- **Permite que imagens em tons de cinza sejam comprimidas**



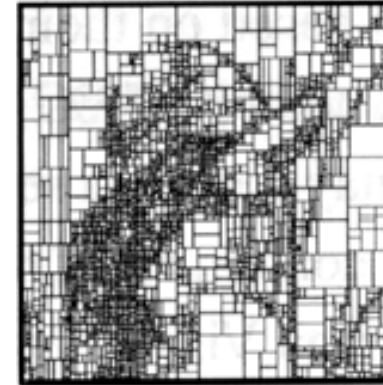
Diferentes Formas de Particionamento de uma Imagem



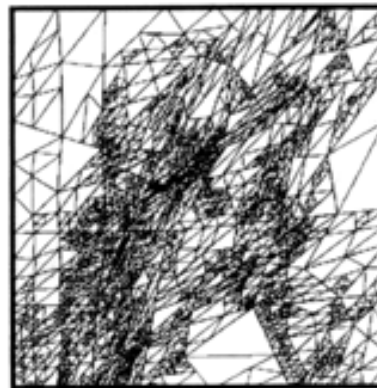
Original Lena



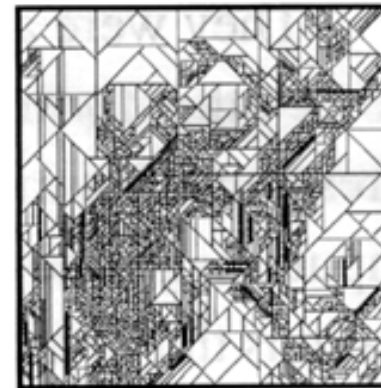
Quadtree



HV



Triangle



Polygon

Procedimento Básico de uma Compressão Fractal

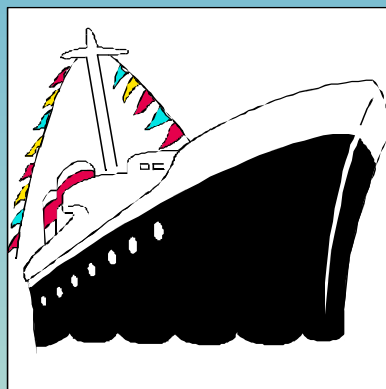
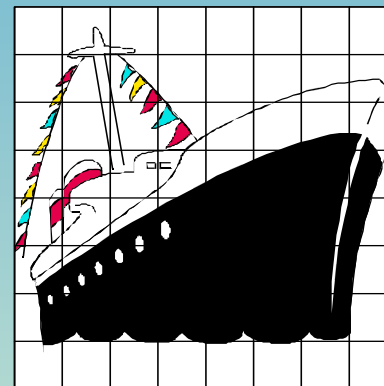
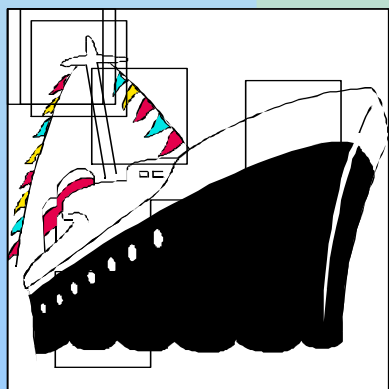


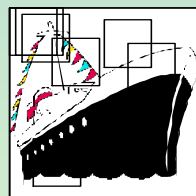
Imagem Original



Malha Homogênea de Blocos Molde



Blocos Domínio



Blocos Domínio Reduzidos

Modificações Efetuadas na Compressão Clássica

À transformação afim geométrica

$$w(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

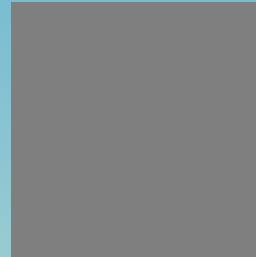
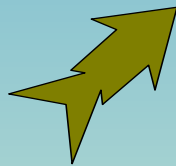
adiciona-se a transformação em tons de cinza

$$w(z) = s \cdot z + o$$

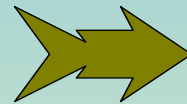
resultando na transformação tridimensional:

$$w(x, y, z) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \\ o \end{pmatrix}$$

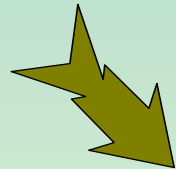
Fator de Contraste



$S = 0$

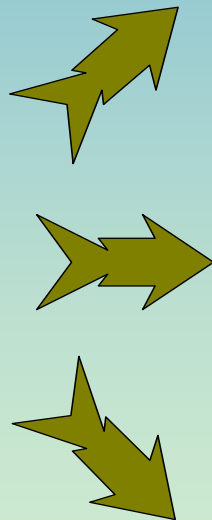


$S < 1$



$S > 1$

Coeficiente de Brilho



$$0 < 0$$

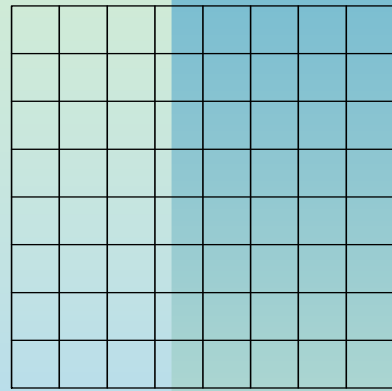


$$0 = 0$$



$$0 > 0$$

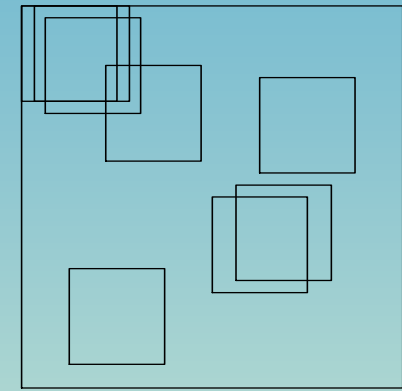
Compressão Fractal Automática



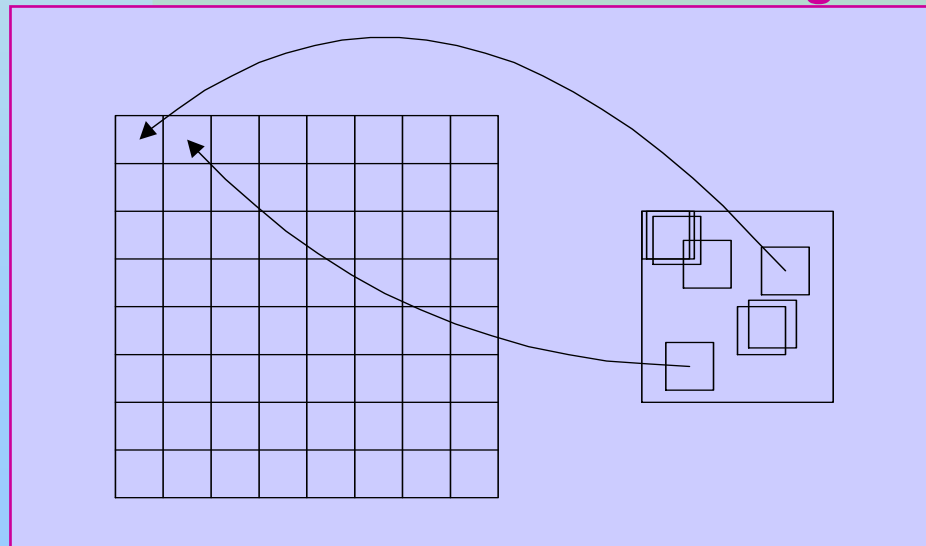
Blocos Molde



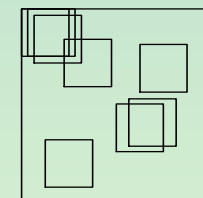
Imagem



Blocos Domínio

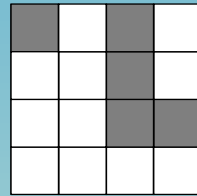


Formação de um Par Domínio-Molde

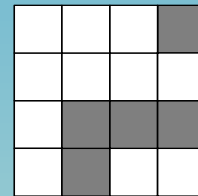


Blocos Domínio Reduzidos

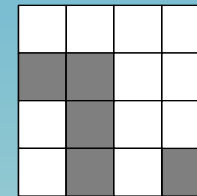
Simetrias de um Bloco



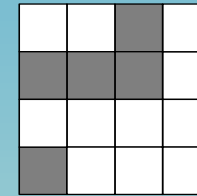
Identidade
(0,0,0)



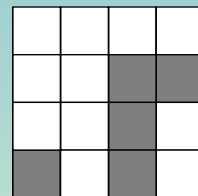
Rotação de 90
(1,1,0)



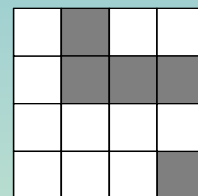
Rotação de 180 **(0,1,1)**



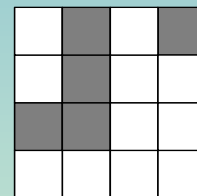
Rotação de 270 **(1,0,1)**



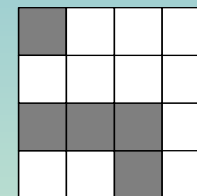
Ref. horizontal
(0,0,1)



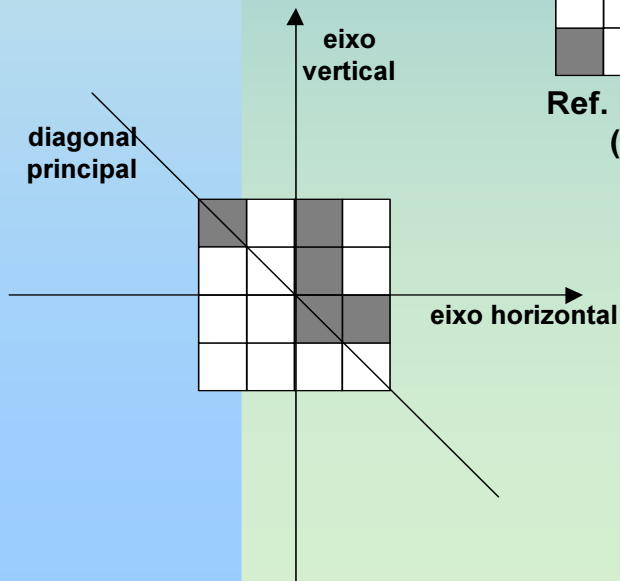
Ref. em cada um dos eixos **(1,1,1)**



Ref. Vertical **(0,1,0)**



Ref. na Diag. Principal **(1,0,0)**



Código Fractal

Transf.	D_x	D_y	s	o	m
w₁	60	34	2	113	7
w₂	23	38	3	42	5
.
.
.
w₁₀₂₄	63	51	3	53	4

Métrica Utilizada na Escolha do Melhor Par Domínio-molde

Programa do Barnsley

$$d(D(x, y), M(x, y)) = \sum_{x=0}^{n-1} \sum_{y=0}^{n-1} [D(x, y) - M(x, y)]^2$$

Programa do Fisher

$$d(D(x, y), M(x, y)) = \sqrt{\frac{1}{n^2} \sum_{x=0}^{n-1} \sum_{y=0}^{n-1} [D(x, y) - M(x, y)]^2}$$

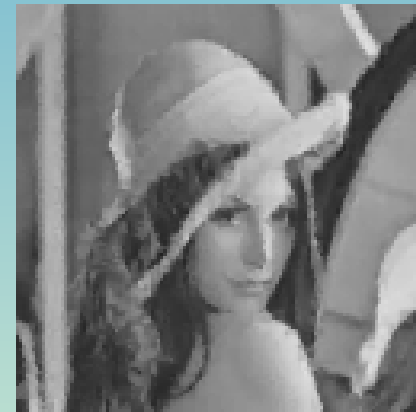
Organização

- **Compressão fractal clássica**
- **Teorema da Colagem**
- **Problema Inverso**
- **Modificações efetuadas na compressão clássica para uma codificação mais eficiente**
- **Aliasing**

Aliasing



Blocos molde de 2 x 2 pixels



Blocos molde de 4 x 4 pixels.

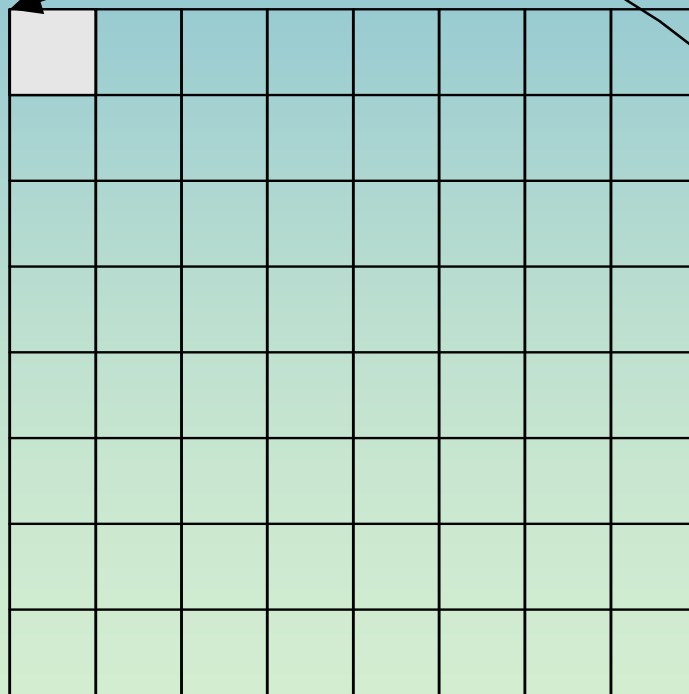
Lena (Blocos Molde de 2 x 2 pixels)			Lena (Blocos Molde de 4 x 4 pixels)		
Tempo (s)	Comp. (bpp)	PSNR (dB)	Tempo (s)	Comp. (bpp)	PSNR (dB)
5,9110	6,2354	34,3935	0,2200	1,4282	27,5964

Organização

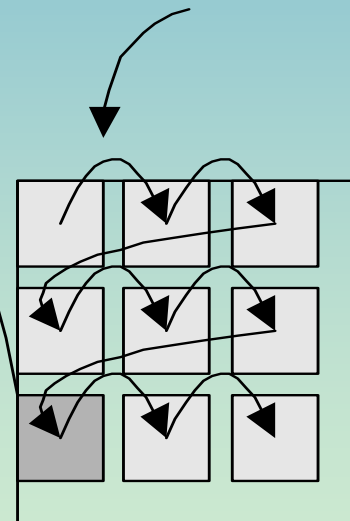
- **Compressão fractal clássica**
- **Teorema da Colagem**
- **Problema Inverso**
- **Modificações efetuadas na compressão clássica para uma codificação mais eficiente**
- **Aliasing**
- **Técnicas conhecidas implementadas**

Método de Busca Exaustiva Leve

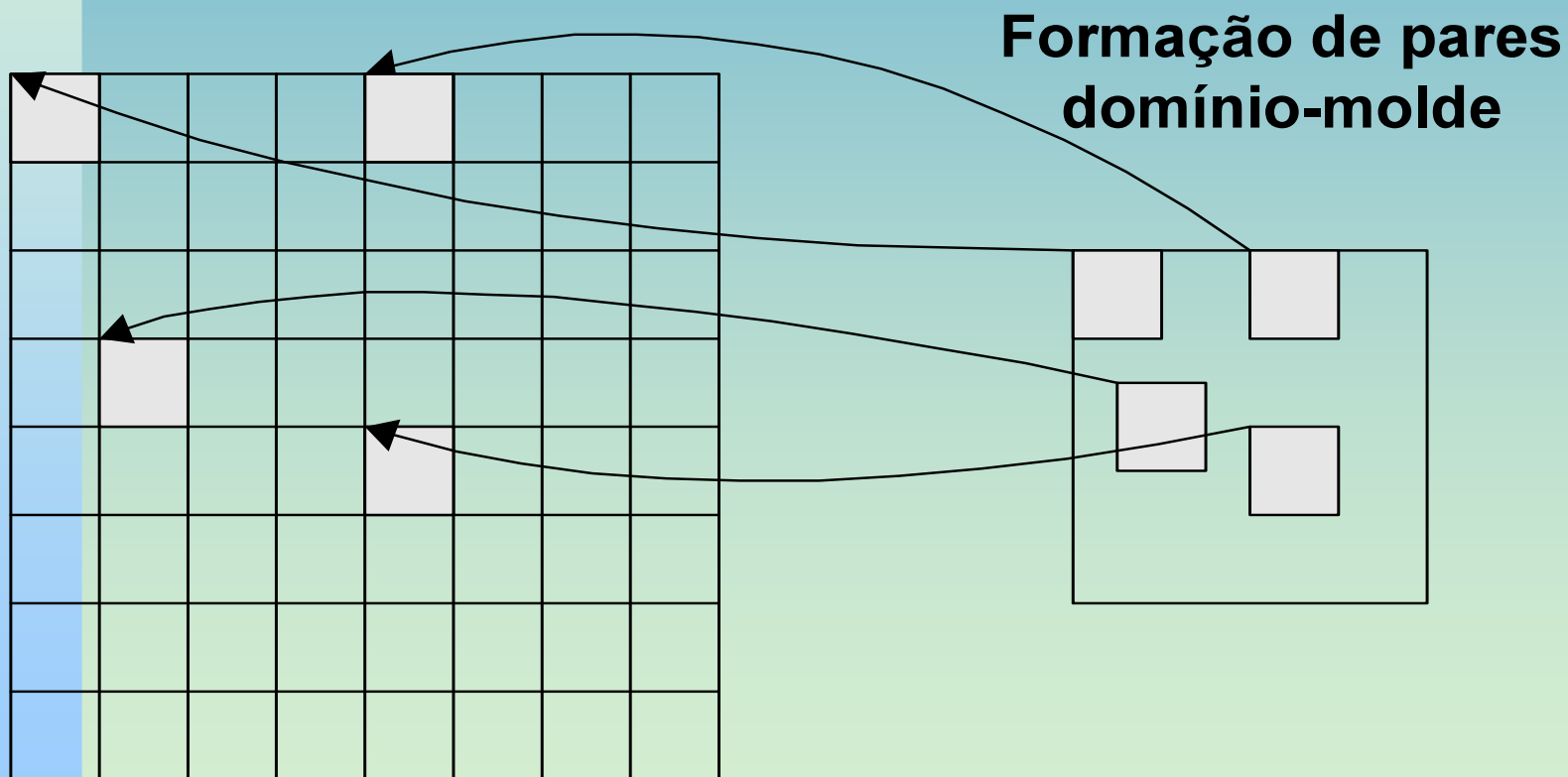
Formação de um par domínio-molde



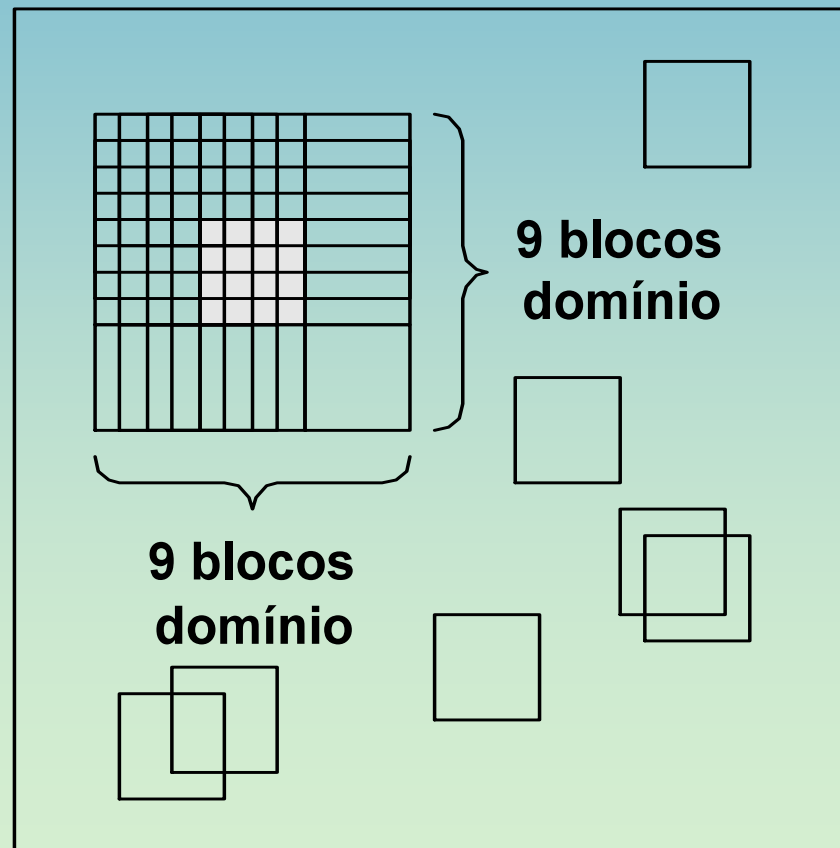
Caminho da busca



Busca Unitária



Método de Busca Local

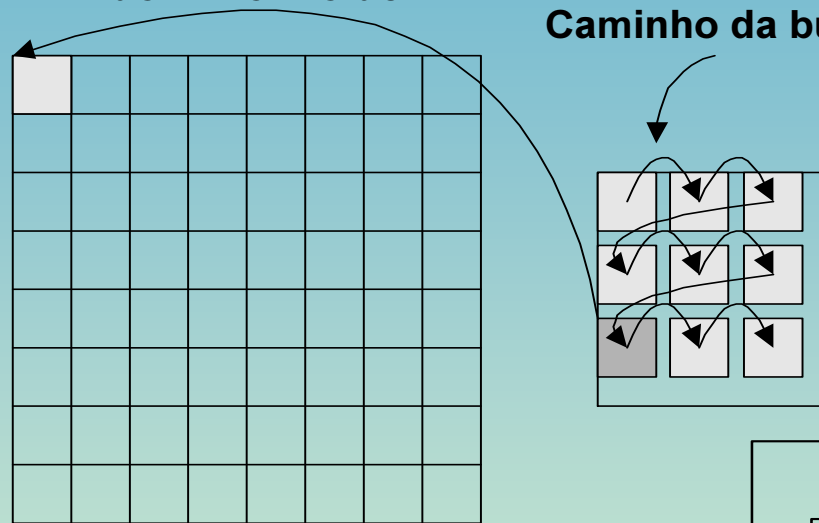


Método de Sub Busca Local

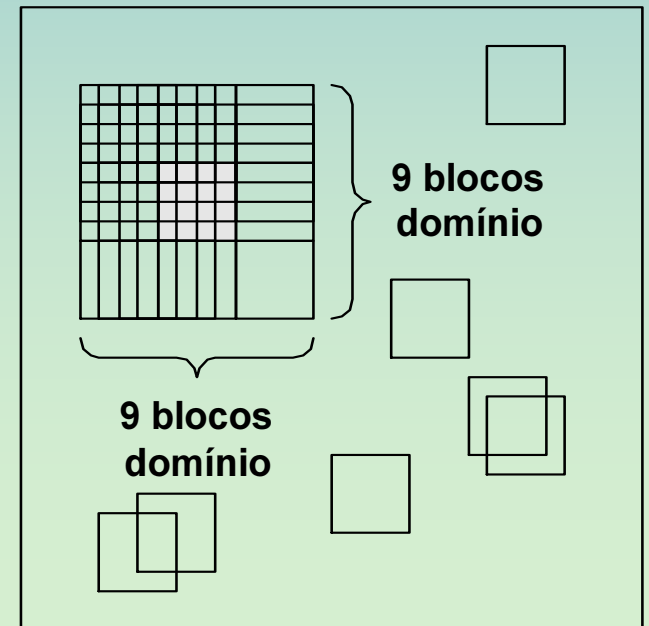
Formação de um par domínio-molde

Caminho da busca

Primeira etapa:

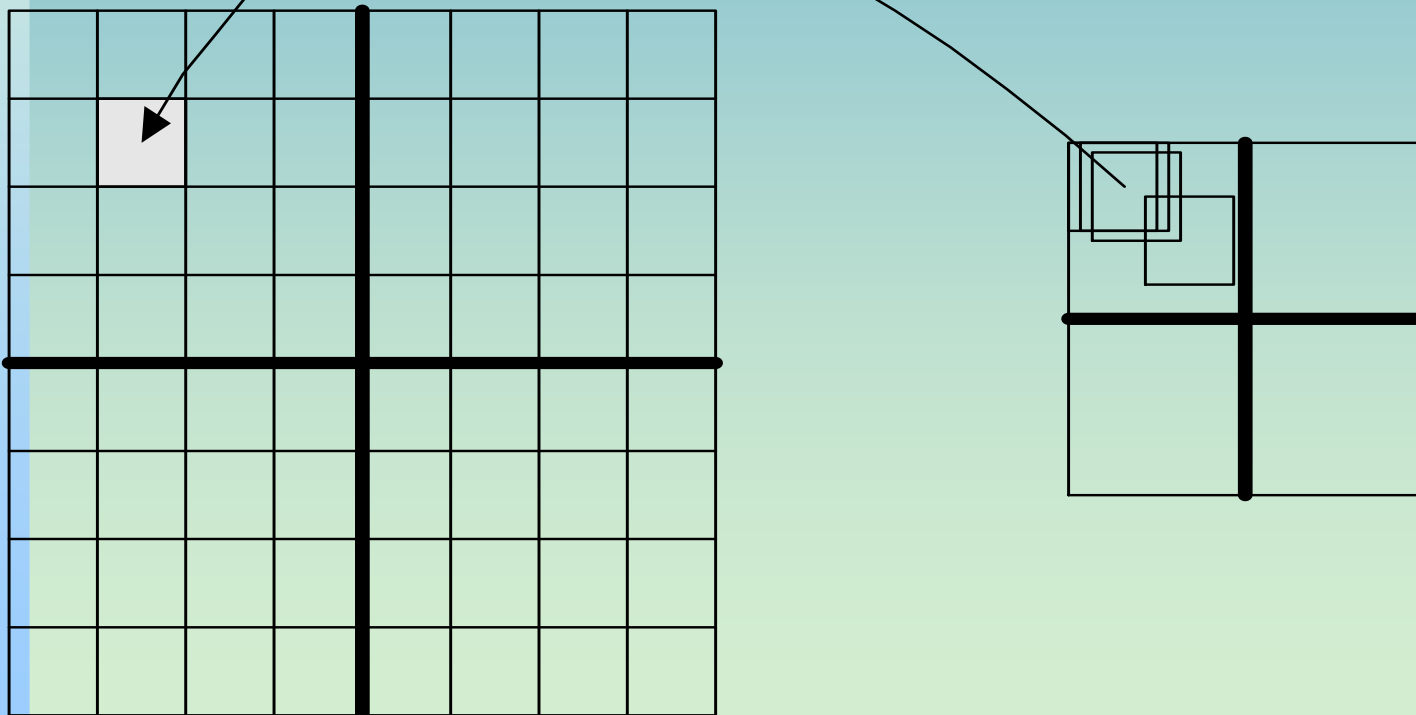


Segunda etapa:



Busca em Área Restrita

Formação do par
domínio-molde

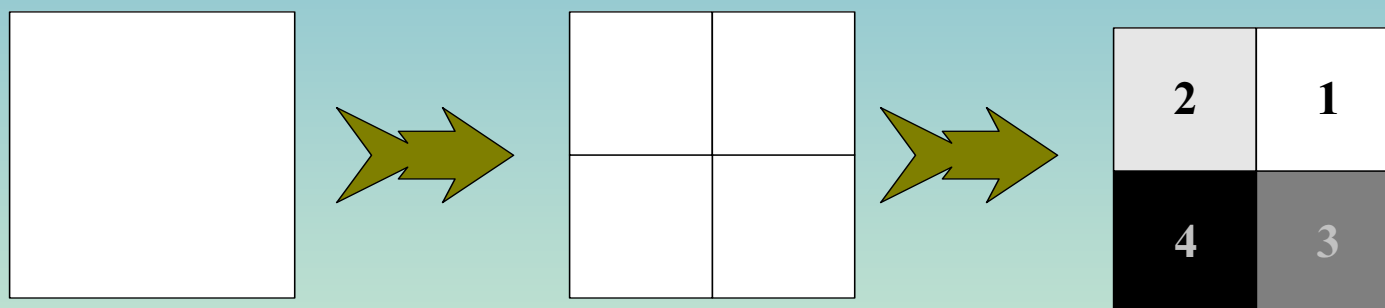


Organização

- **Compressão fractal clássica**
- **Teorema da Colagem**
- **Problema Inverso**
- **Modificações efetuadas na compressão clássica para uma codificação mais eficiente**
- **Aliasing**
- **Técnicas conhecidas implementadas**
- **Técnicas analisadas**

Classificação Canônica através das Intensidades

Classificação dos Quadrantes de um Bloco (Molde ou Domínio)



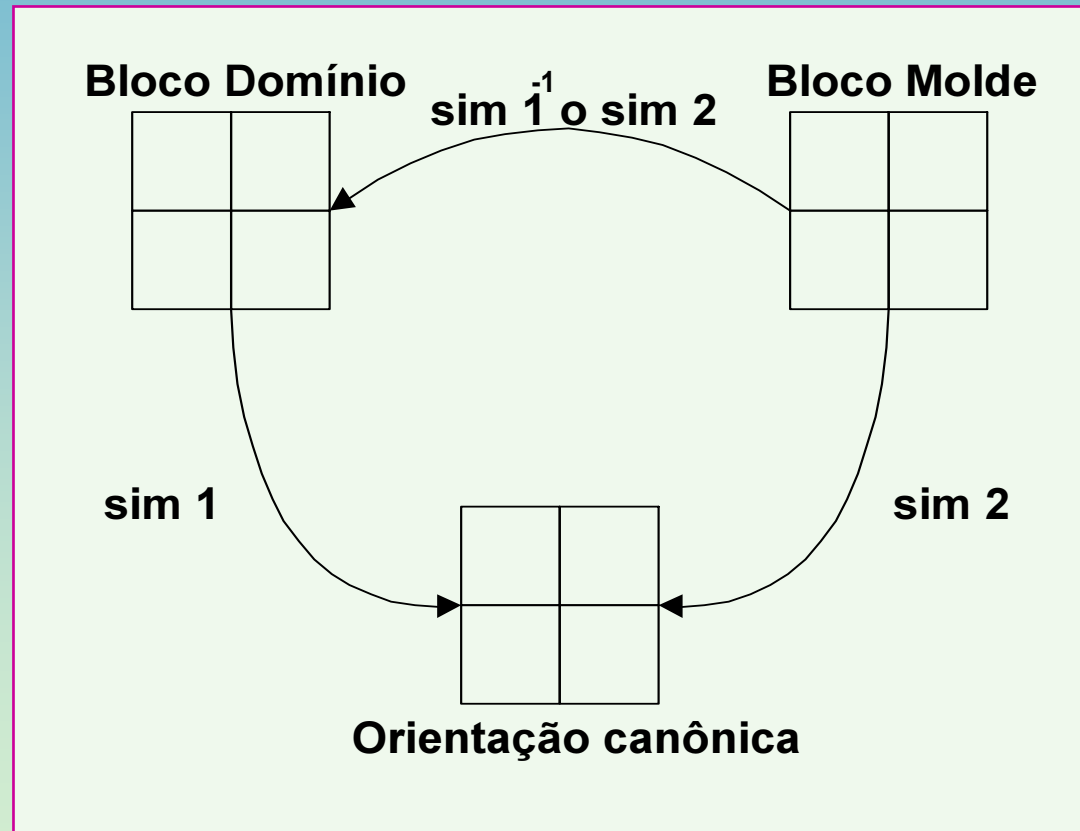
Classificação Canônica através das Intensidades

Simetria	1	a	a ²	a ³	b	a b	a ² b	a ³ b																																
Classe 1	<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>3</td></tr></table>	1	2	4	3	<table border="1"><tr><td>4</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td></tr></table>	4	1	3	2	<table border="1"><tr><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td></tr></table>	3	4	2	1	<table border="1"><tr><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td></tr></table>	2	3	1	4	<table border="1"><tr><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td></tr></table>	2	1	3	4	<table border="1"><tr><td>1</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td></tr></table>	1	4	2	3	<table border="1"><tr><td>4</td><td>3</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr></table>	4	3	1	2	<table border="1"><tr><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>1</td></tr></table>	3	2	4	1
1	2																																							
4	3																																							
4	1																																							
3	2																																							
3	4																																							
2	1																																							
2	3																																							
1	4																																							
2	1																																							
3	4																																							
1	4																																							
2	3																																							
4	3																																							
1	2																																							
3	2																																							
4	1																																							
Classe 2	<table border="1"><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>4</td><td>2</td></tr></table>	1	3	4	2	<table border="1"><tr><td>4</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td></tr></table>	4	1	2	3	<table border="1"><tr><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td></tr></table>	2	4	3	1	<table border="1"><tr><td>3</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td></tr></table>	3	2	1	4	<table border="1"><tr><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td></tr></table>	3	1	2	4	<table border="1"><tr><td>1</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td></tr></table>	1	4	3	2	<table border="1"><tr><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td></tr></table>	4	2	1	3	<table border="1"><tr><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>4</td><td>1</td></tr></table>	2	3	4	1
1	3																																							
4	2																																							
4	1																																							
2	3																																							
2	4																																							
3	1																																							
3	2																																							
1	4																																							
3	1																																							
2	4																																							
1	4																																							
3	2																																							
4	2																																							
1	3																																							
2	3																																							
4	1																																							
Classe 3	<table border="1"><tr><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>4</td></tr></table>	1	2	3	4	<table border="1"><tr><td>3</td><td>1</td></tr><tr><td>4</td><td>2</td></tr></table>	3	1	4	2	<table border="1"><tr><td>4</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td></tr></table>	4	3	2	1	<table border="1"><tr><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>3</td></tr></table>	2	4	1	3	<table border="1"><tr><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>4</td><td>3</td></tr></table>	2	1	4	3	<table border="1"><tr><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>4</td></tr></table>	1	3	2	4	<table border="1"><tr><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td></tr></table>	3	4	1	2	<table border="1"><tr><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td></tr></table>	4	2	3	1
1	2																																							
3	4																																							
3	1																																							
4	2																																							
4	3																																							
2	1																																							
2	4																																							
1	3																																							
2	1																																							
4	3																																							
1	3																																							
2	4																																							
3	4																																							
1	2																																							
4	2																																							
3	1																																							

a - Rotação de 90 no sentido anti-horário

b - Reflexão sobre uma linha média vertical

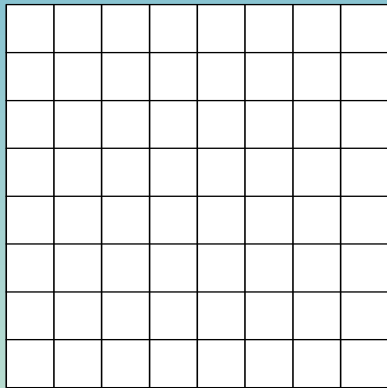
Relação entre as Simetrias dos Blocos Molde e Domínio



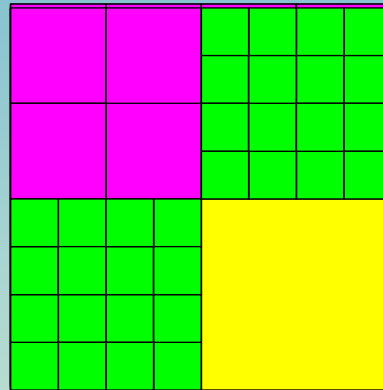
Dupla Classificação Canônica

- **Após a classificação canônica através das intensidades, faz-se uma nova classificação canônica, da mesma forma, utilizando agora a variância**
- **Tem-se:**
 - ⇒ **3 classes canônicas obtidas através da primeira classificação**
 - ⇒ **24 classes obtidas através da segunda classificação**
 - ⇒ **um total de 72 classes**

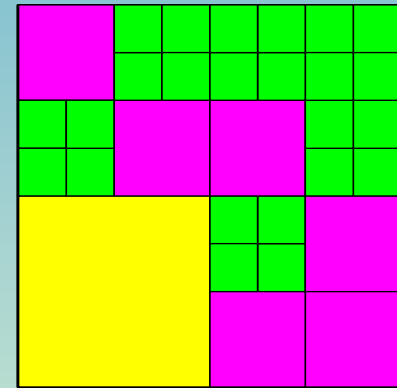
Quadtree



Malha homogênea



Quadtree Completa



Quadtree Parcial

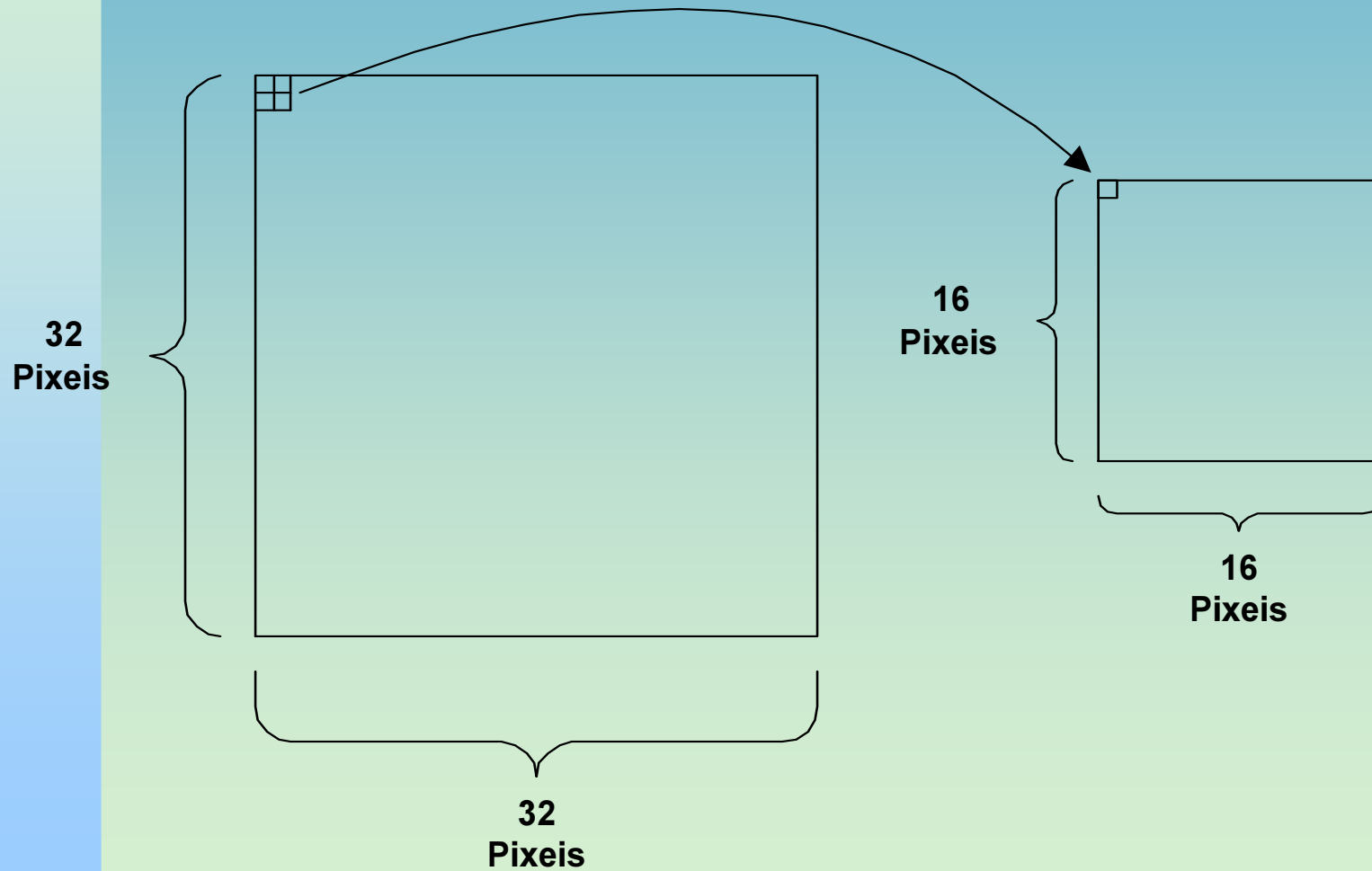
Organização

- **Compressão fractal clássica**
- **Teorema da Colagem**
- **Problema Inverso**
- **Modificações efetuadas na compressão clássica para uma codificação mais eficiente**
- **Aliasing**
- **Técnicas conhecidas implementadas**
- **Técnicas analisadas**
- **Técnica desenvolvida neste trabalho**

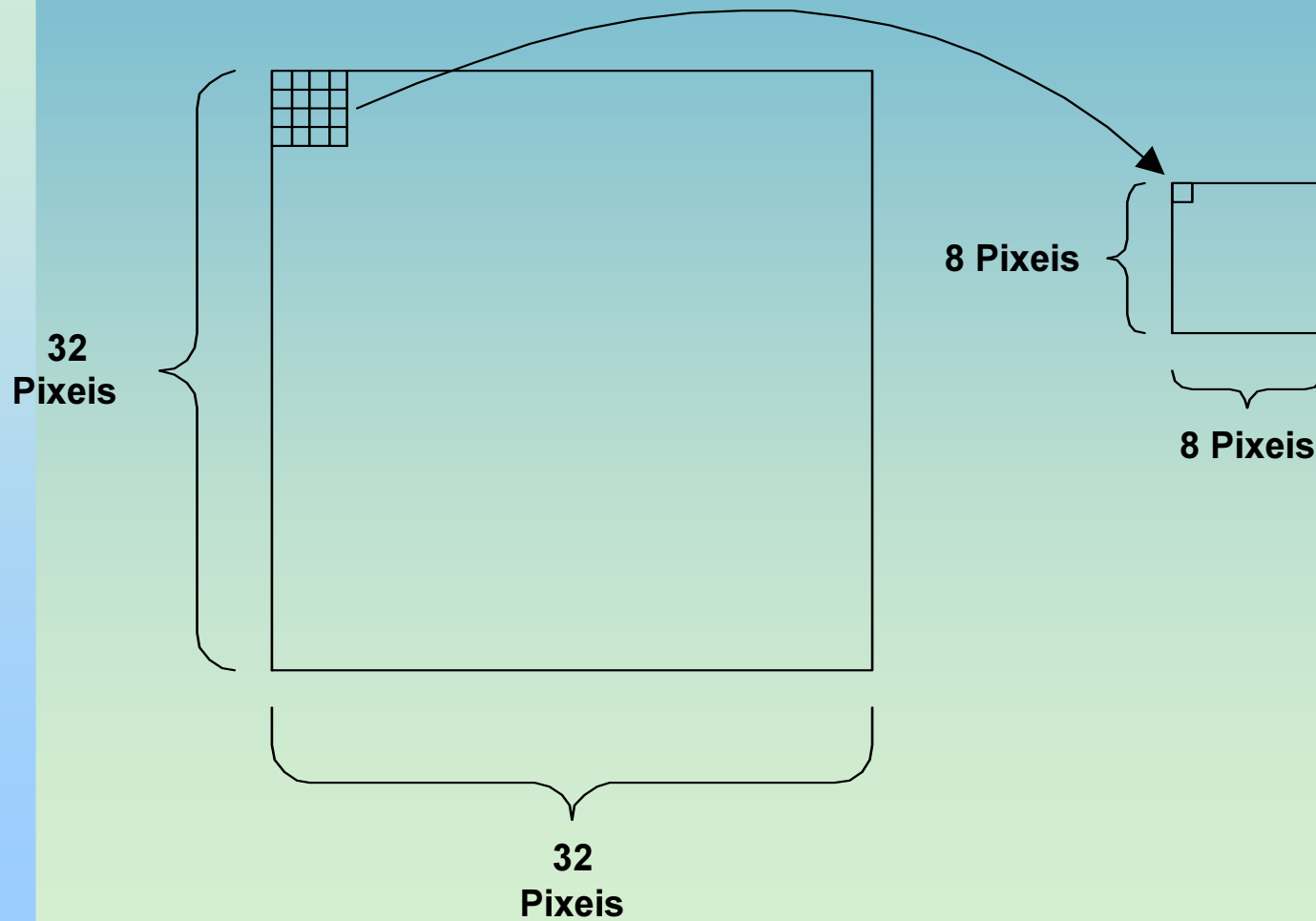
Método de Dimensão Fractal Local

- **Utiliza o conceito de dimensão fractal local**
⇒ A DF de uma imagem pode variar de 2 a 3
- **Aplica diversos fatores de contração espacial:**
 - ⇒ 1/4, 1/8
 - ⇒ 1/3, 1/4, 1/5, 1/6
 - ⇒ 1/4, 1/5, 1/6

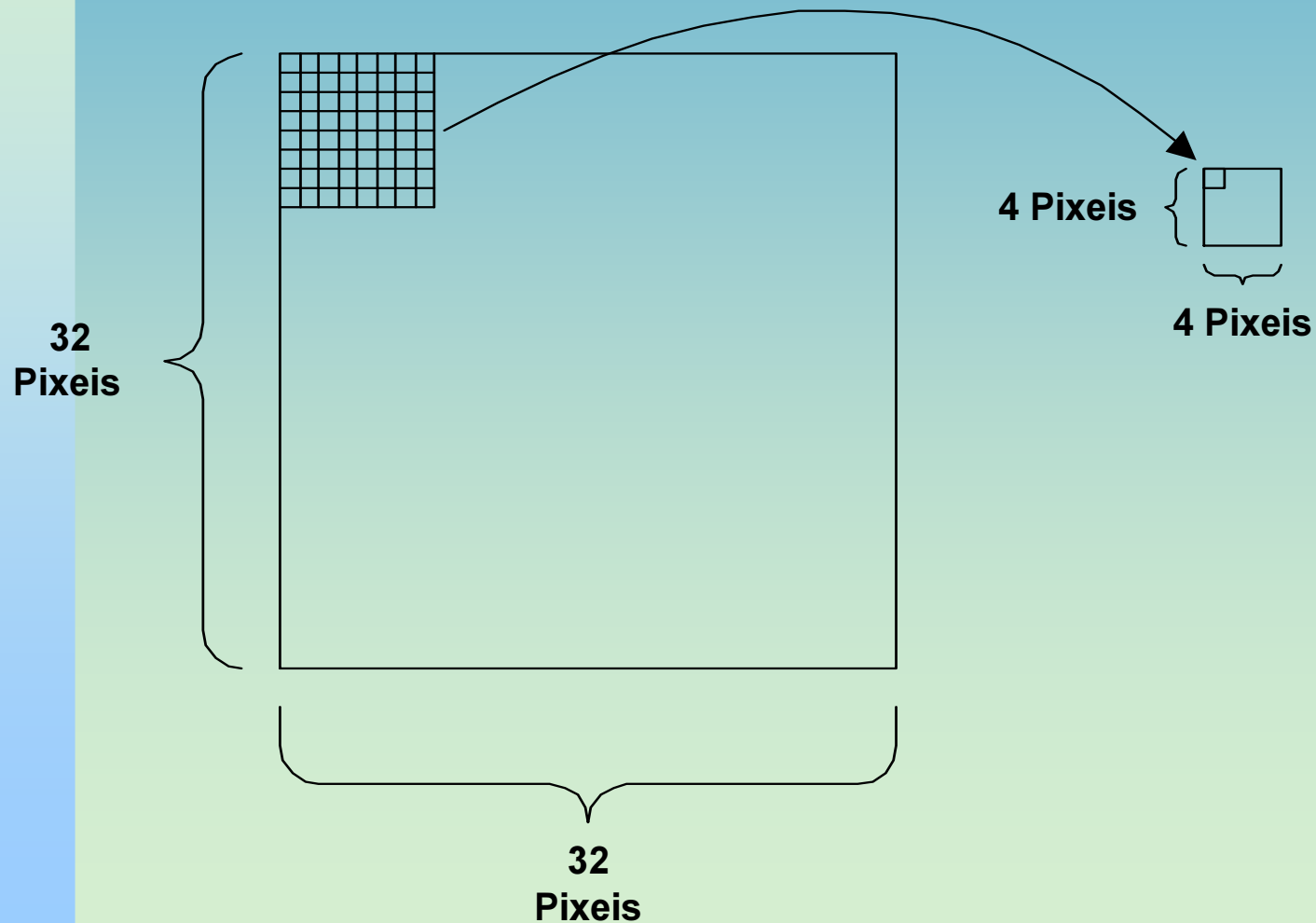
Aplicação de um Fator de Contração Espacial Igual a 1/2



Aplicação de um Fator de Contração Espacial Igual a 1/4



Aplicação de um Fator de Contração Espacial Igual a 1/8



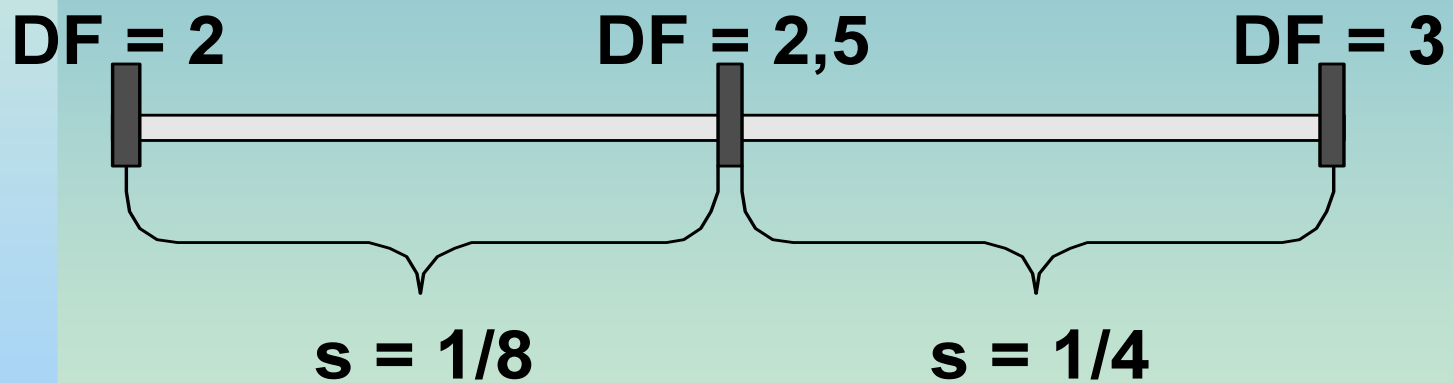
Complexidade e Variedade dos Blocos

- **Quanto maior for a contração:**
 - ⇒ menor será a variedade de elementos do conjunto de blocos domínio reduzidos (domain pool)
 - ⇒ menor será a complexidade dos blocos gerados

- **Quanto menor a contração:**
 - ⇒ maior será a variedade do domain pool
 - ⇒ maior será a complexidade dos blocos gerados

- **Maior complexidade:**
 - ⇒ blocos com frequências mais altas
 - ⇒ DF mais alta

Relacionamento entre DF e Fator de Contração Espacial



Seleção do Fator de Contração Espacial através da Dimensão Fractal Local

2,26	2,77	2,13	2,33
2,17	2,44	2,23	2,58
2,36	2,65	2,84	2,37
2,57	2,08	2,24	2,99

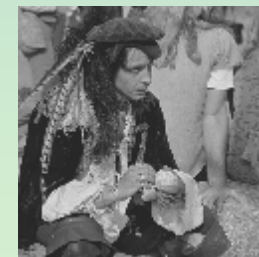
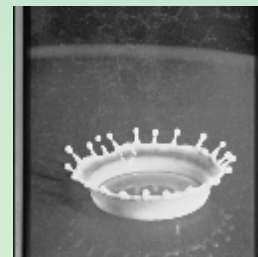
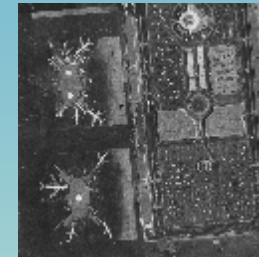
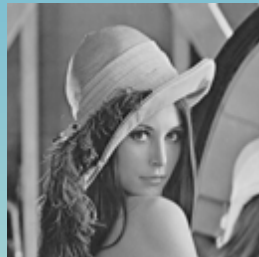


$s = 1/8$



$s = 1/4$

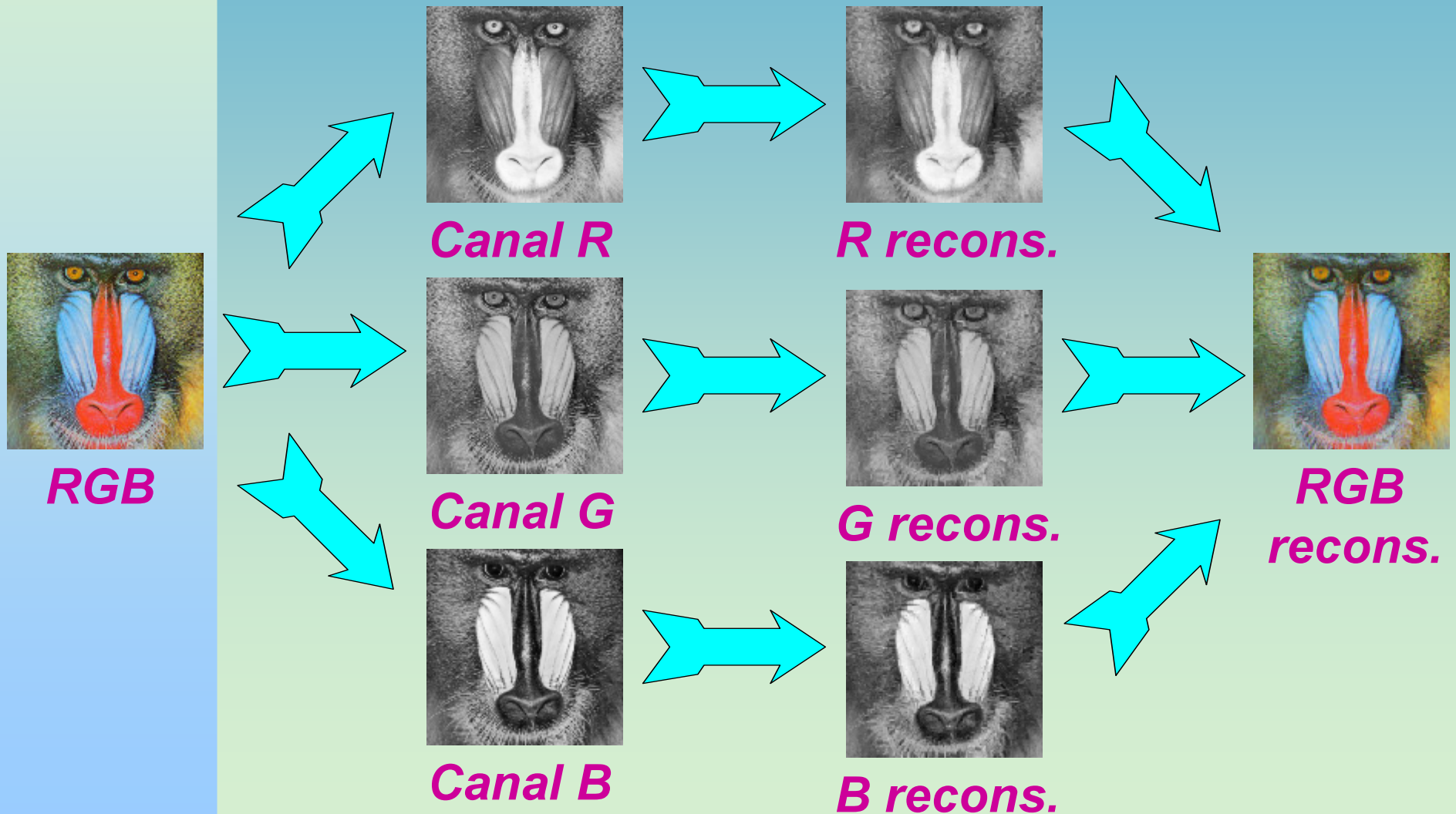
Imagens de Teste (tons de cinza)



Organização

- **Compressão fractal clássica**
- **Teorema da Colagem**
- **Problema Inverso**
- **Modificações efetuadas na compressão clássica para uma codificação mais eficiente**
- **Aliasing**
- **Técnicas conhecidas implementadas**
- **Técnicas analisadas**
- **Técnica desenvolvida neste trabalho**
- **Compressão colorida**

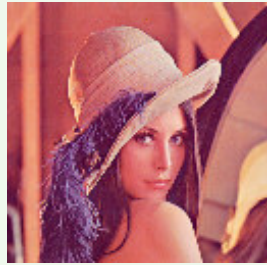
Codificação de Imagens Coloridas



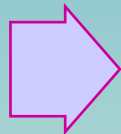
Utilização da Correlação entre os Canais do RGB



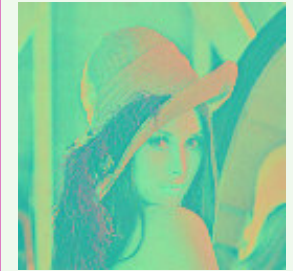
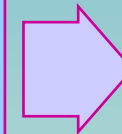
Conversão entre Sistemas de Cores (RGB - YIQ)



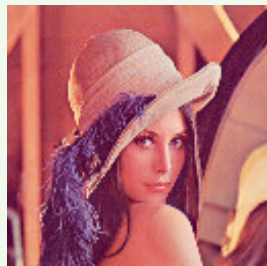
RGB



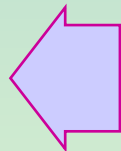
$$\begin{bmatrix} Y \\ I \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ 0.596 & -0.275 & -0.321 \\ 0.212 & -0.523 & 0.311 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix}$$



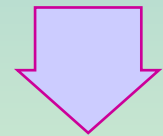
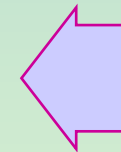
YIQ



RGB



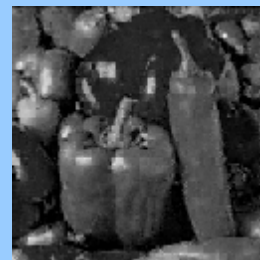
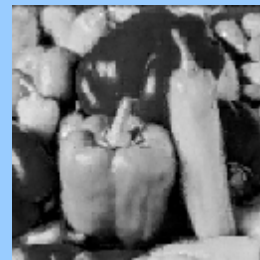
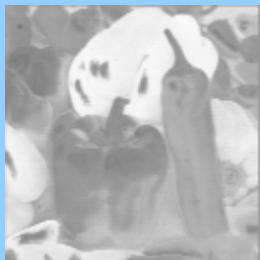
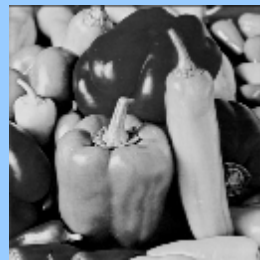
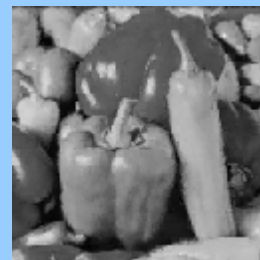
$$\begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.956 & 0.62 \\ 1.0 & -0.272 & -0.647 \\ 1.0 & -1.108 & 1.705 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} Y \\ I \\ Q \end{bmatrix}$$



Utilização da Correlação entre os Canais do YIQ



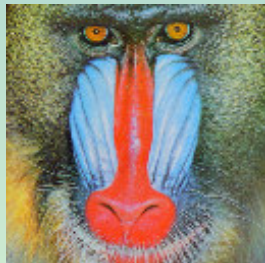
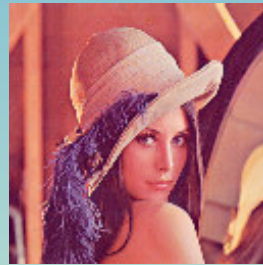
RGB



**RGB
recons.**

RGB → **YIQ** → **YIQ r.** → **RGB r.**

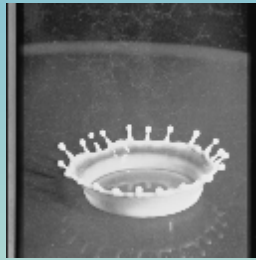
Imagens de Teste (coloridas)



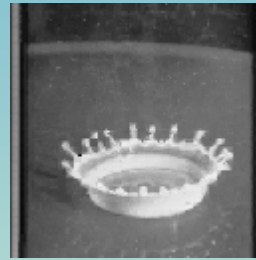
Organização

- **Compressão fractal clássica**
- **Teorema da Colagem**
- **Problema Inverso**
- **Modificações efetuadas na compressão clássica para uma codificação mais eficiente**
- **Aliasing**
- **Técnicas conhecidas implementadas**
- **Técnicas analisadas**
- **Técnica desenvolvida neste trabalho**
- **Compressão colorida**
- **Resultados**

Apresentação dos Resultados



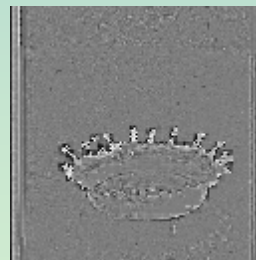
Imagem



Reconstrução



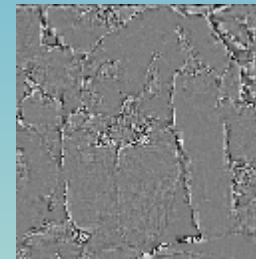
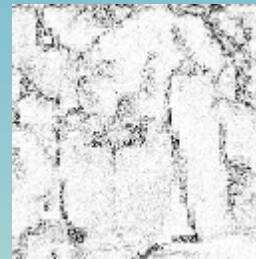
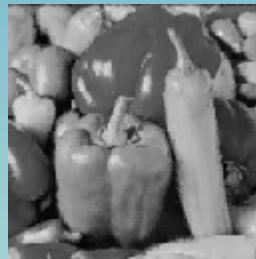
$$5 \cdot |F(x,y) - G(x,y)|$$



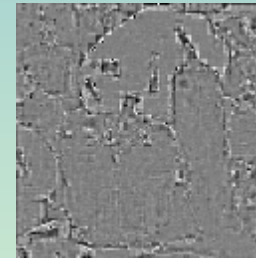
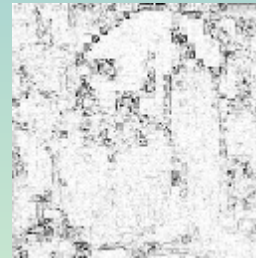
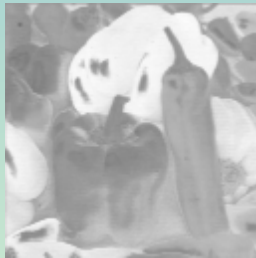
$$(5/2) \cdot [F(x,y) - G(x,y)] + 127$$

Utilização da Correlação entre os Canais YIQ

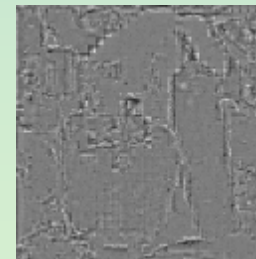
Canal Y



Canal I

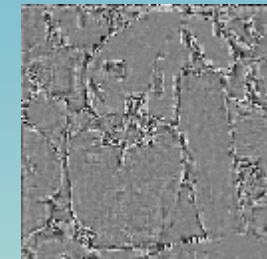


Canal Q

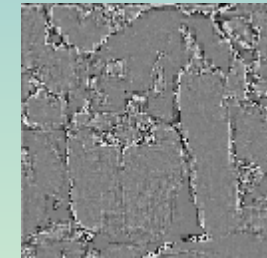
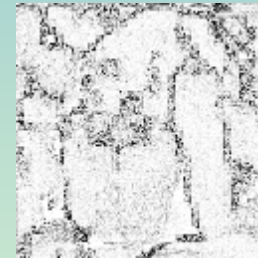
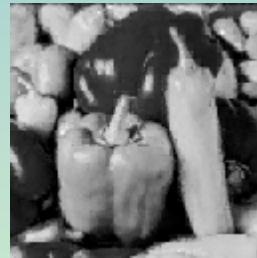


Utilização da Correlação entre os Canais YIQ

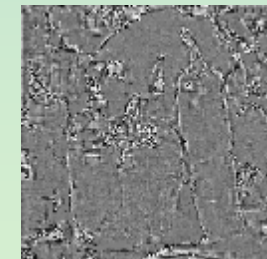
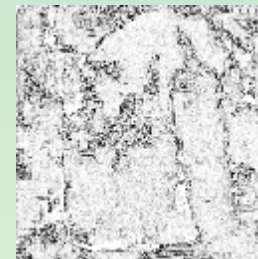
Canal R



Canal G



Canal B



Medições de Qualidade

Erro rms

$$e_{rms} = \sqrt{\left[\frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [G(x, y) - F(x, y)]^2 \right]}$$

Relação Sinal Ruído rms

$$SNR_{rms} = \sqrt{\frac{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} G(x, y)^2}{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} e(x, y)^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} G(x, y)^2}{\sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [G(x, y) - F(x, y)]^2}}$$

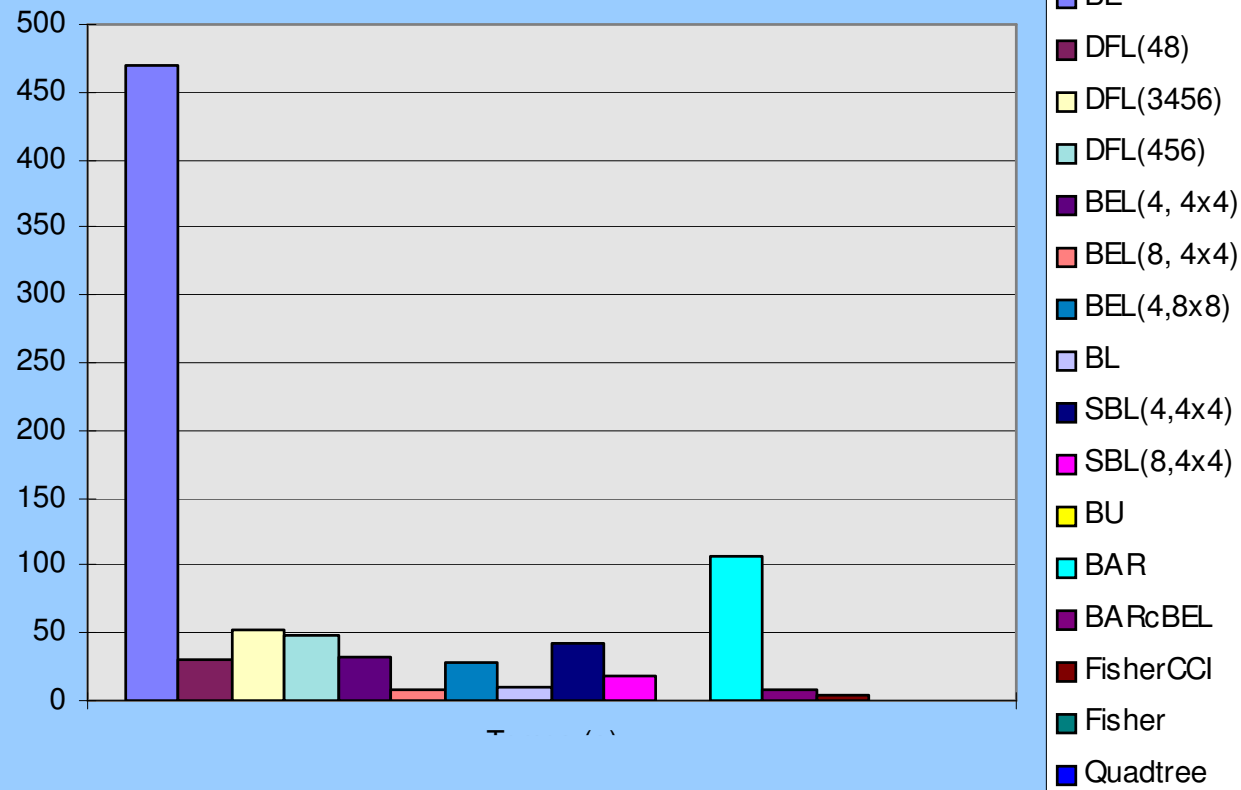
Relação Sinal Ruído de Pico (dB)

$$PSNR = 20 \log_{10} \left(\frac{2^n - 1}{e_{rms}} \right)$$

Resultados

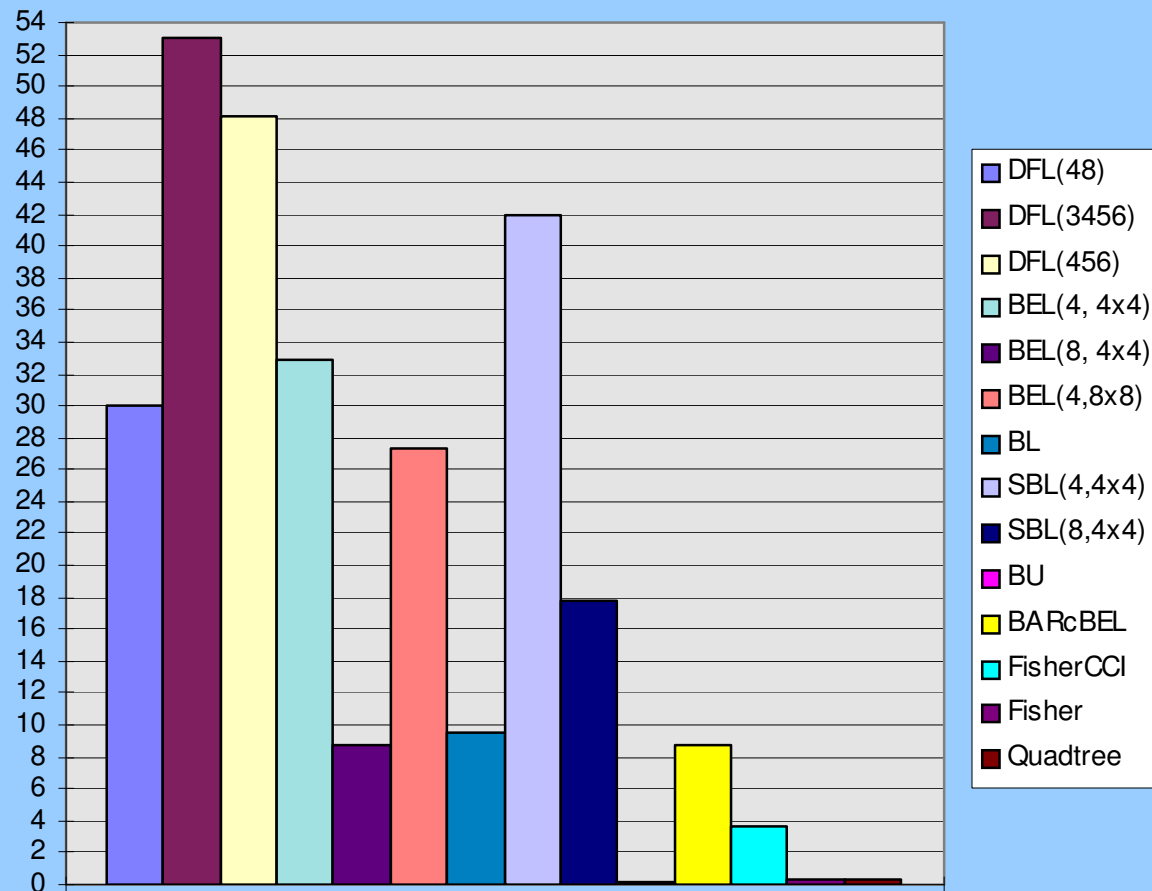
- Tempo médio de codificação de uma imagem de teste

Tempo
(s)



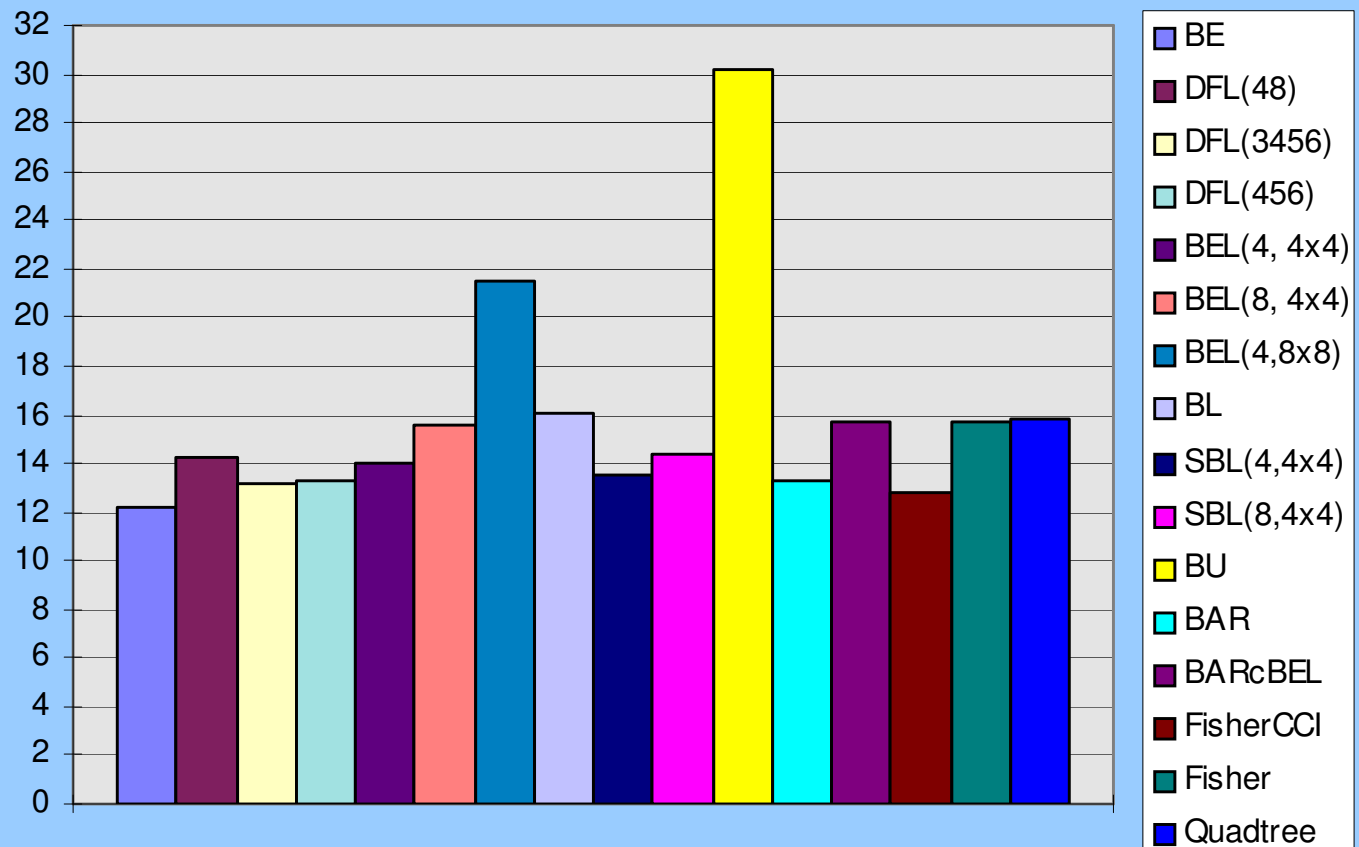
Resultados

Tempo
(s)



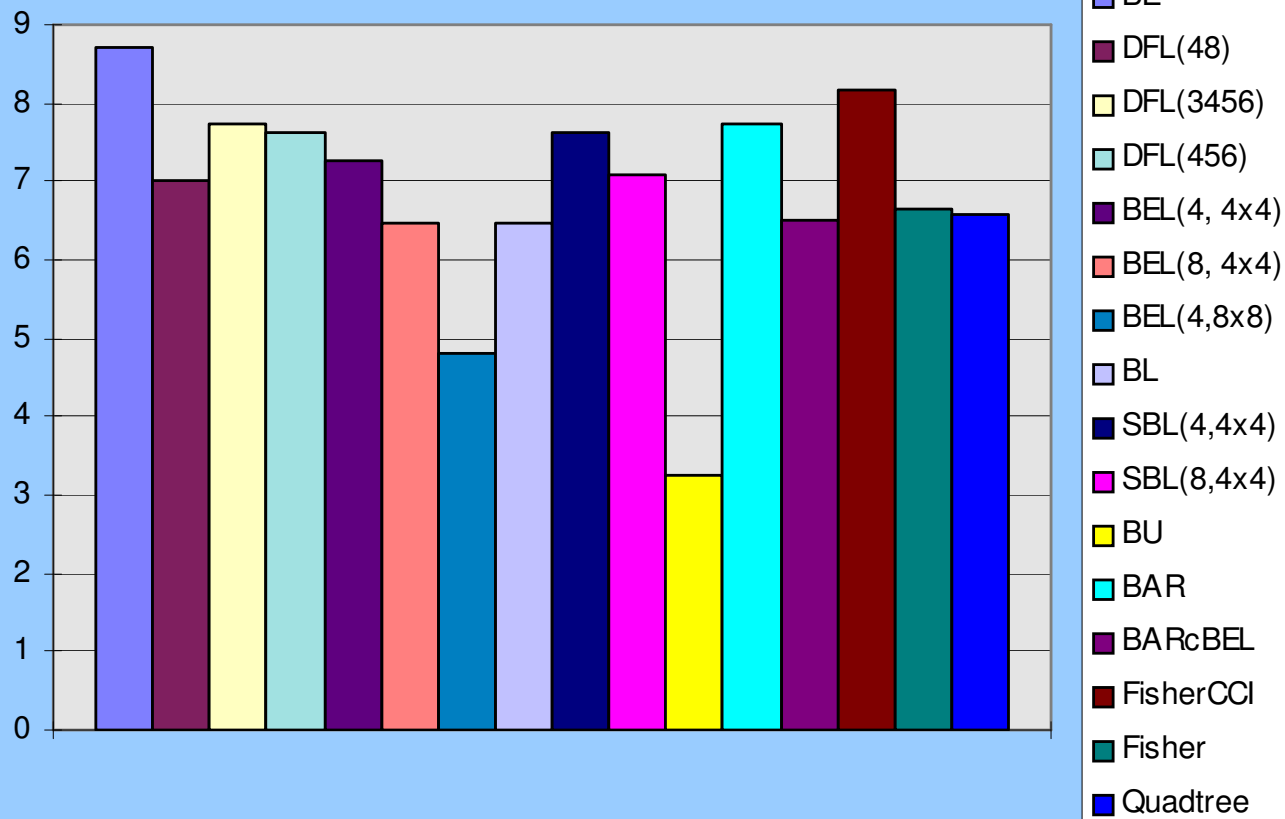
Resultados

Errors



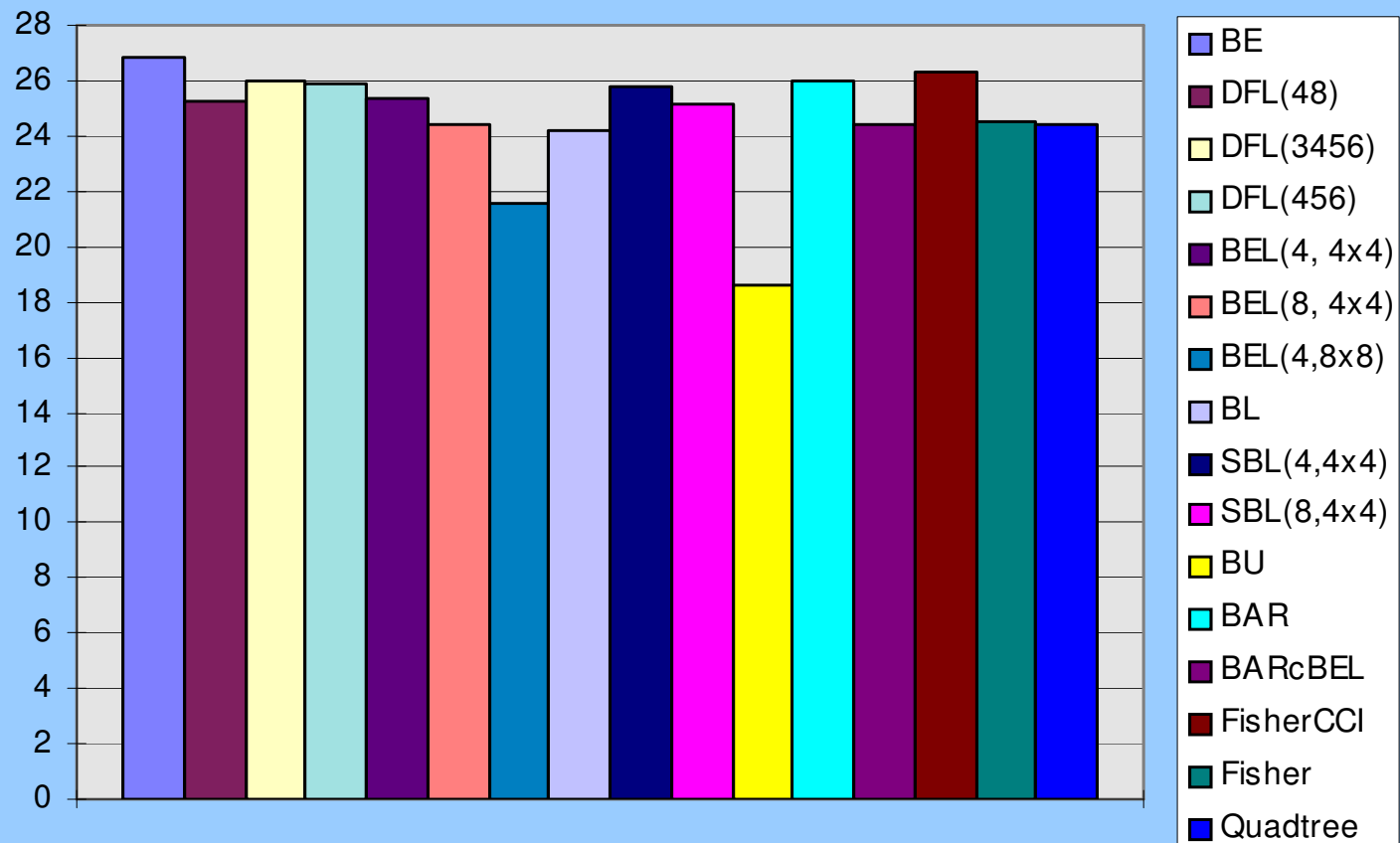
Resultados

SNR
rms



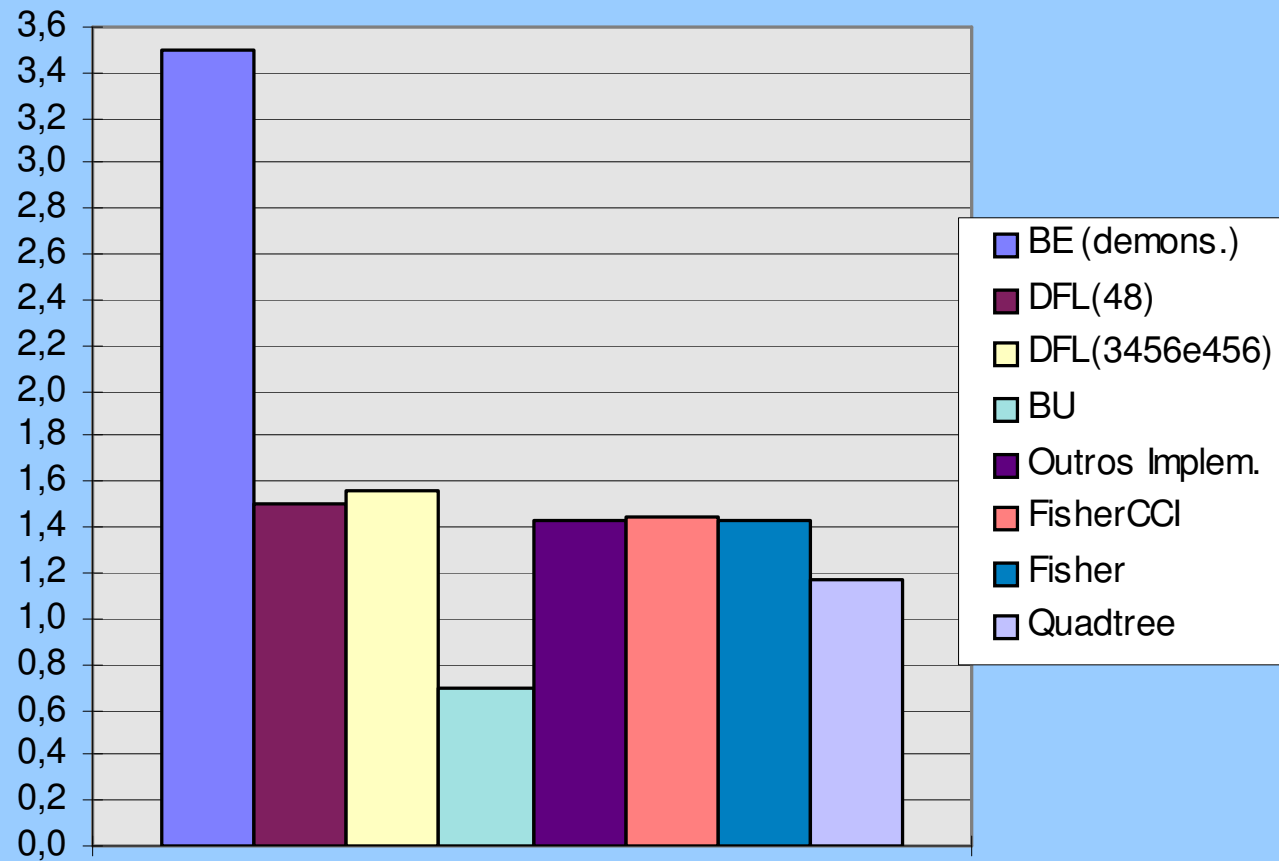
Resultados

PSNR
(dB)



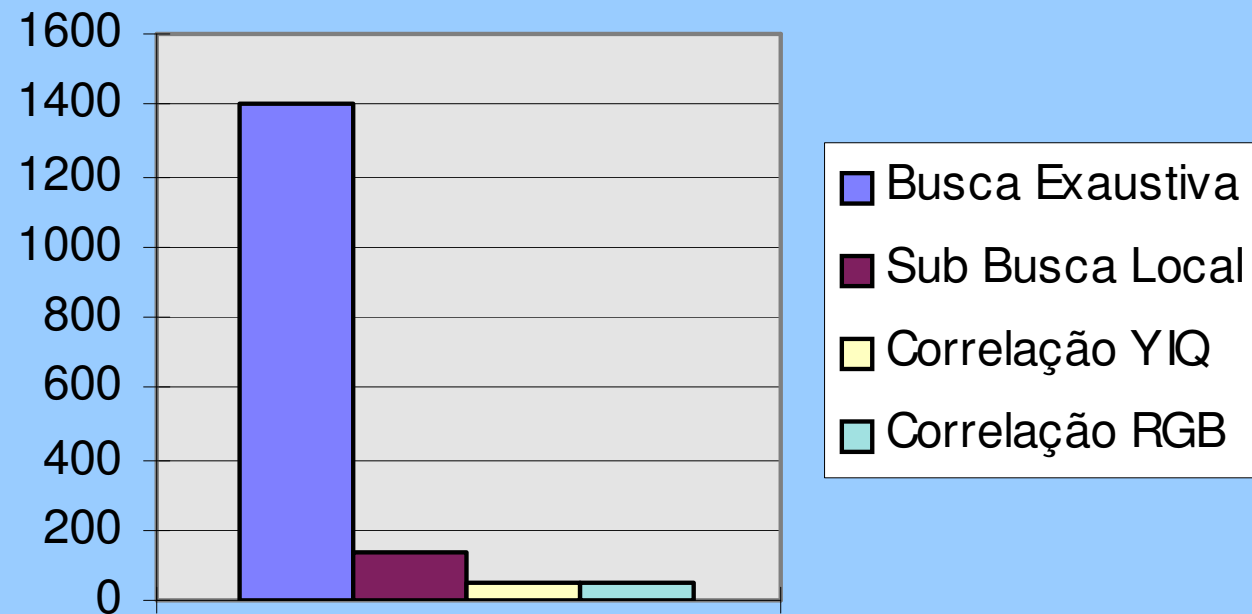
Resultados

Comp.
(bpp)



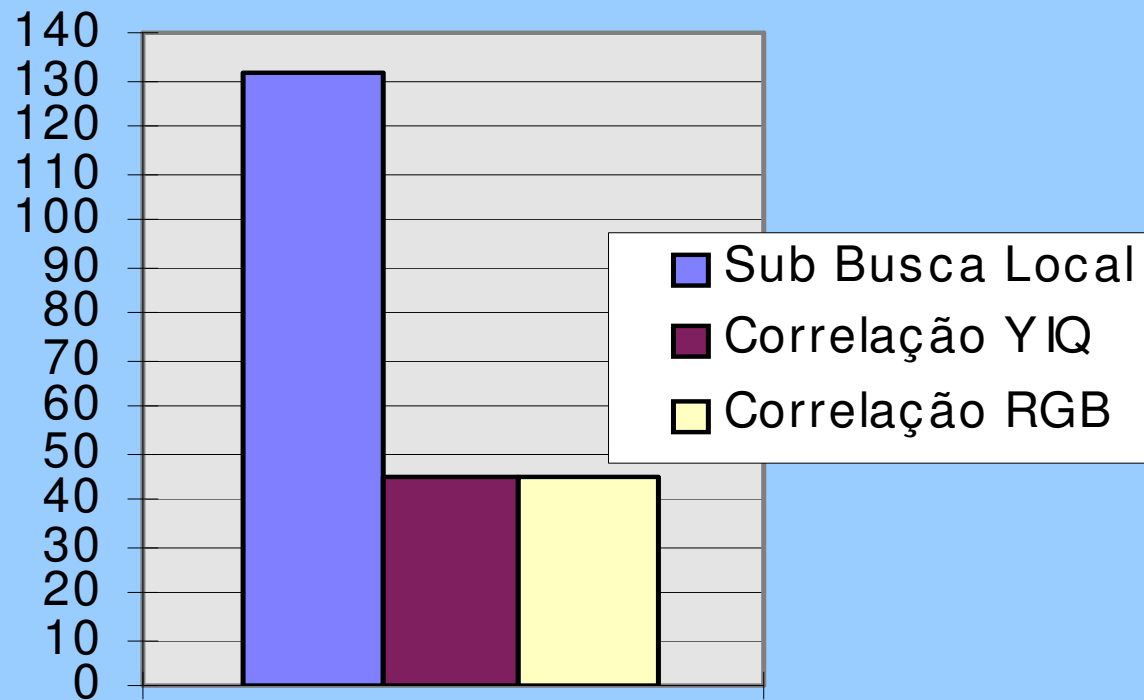
Resultados (coloridas)

Tempo
(s)



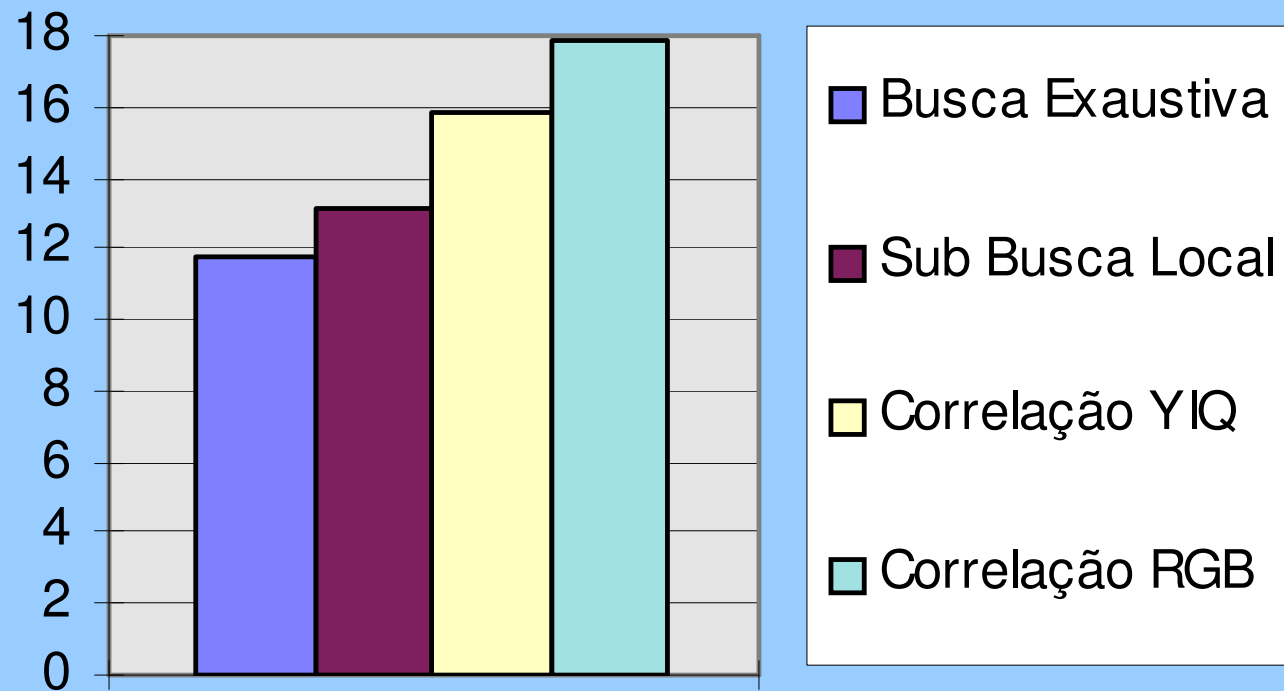
Resultados (coloridas)

Tempo
(s)



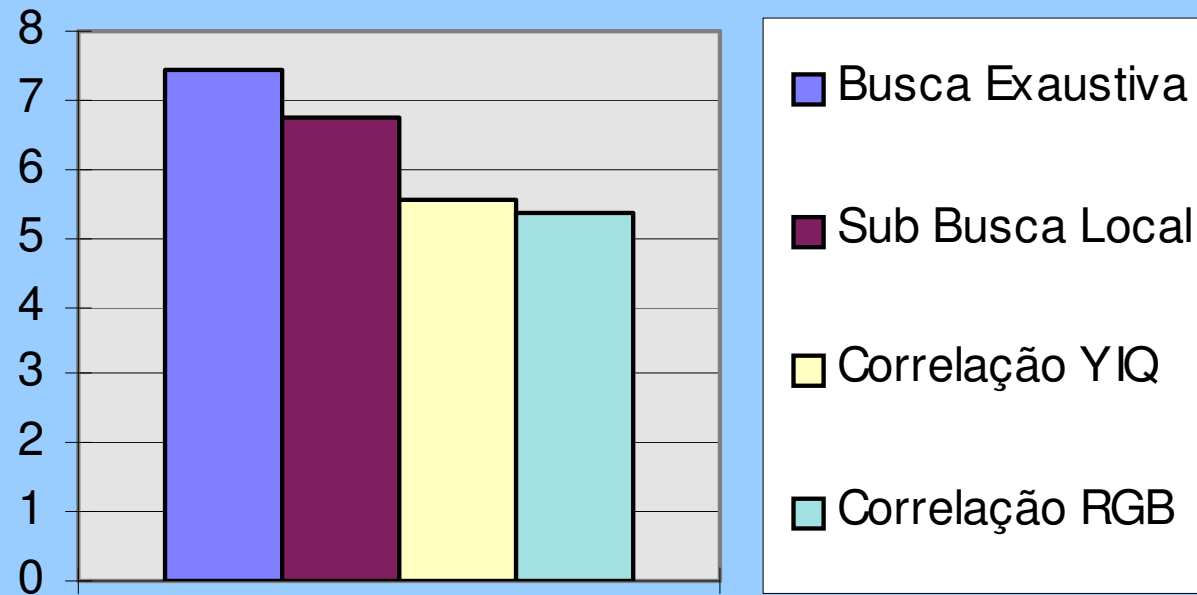
Resultados (coloridas)

*Erro
rms*



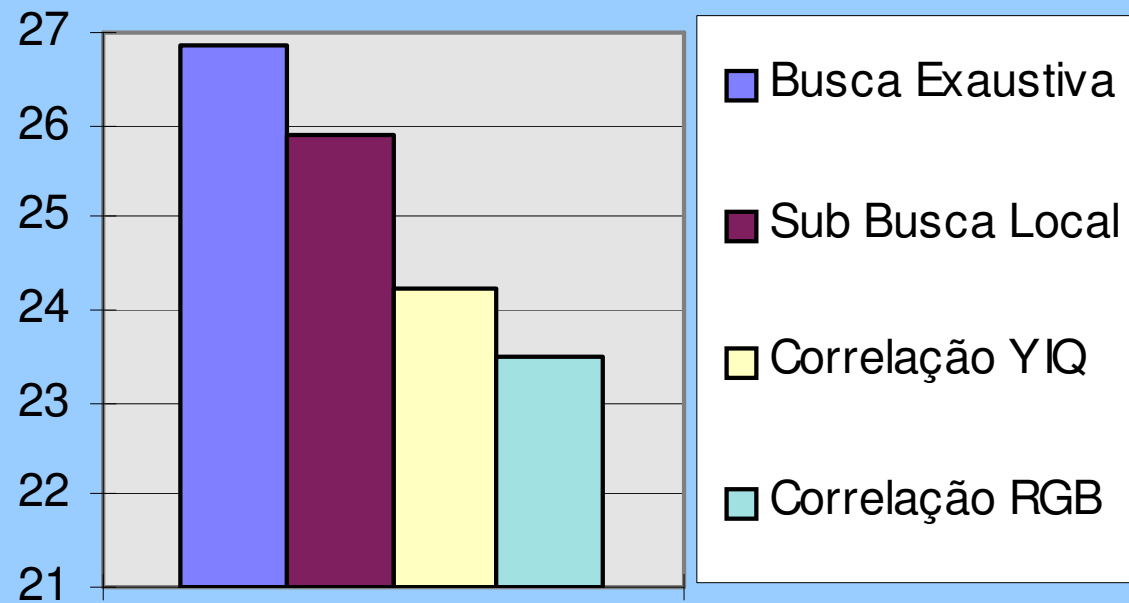
Resultados (coloridas)

SNR
rms



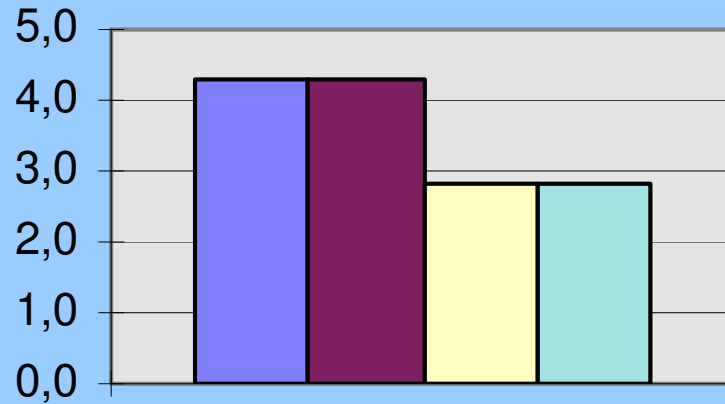
Resultados (coloridas)

**PSNR
(dB)**



Resultados (coloridas)

**Comp.
(bpp)**



- Busca Exaustiva
- Sub Busca Local
- Correlação YIQ
- Correlação RGB

Organização

- **Compressão fractal clássica**
- **Teorema da Colagem**
- **Problema Inverso**
- **Modificações efetuadas na compressão clássica para uma codificação mais eficiente**
- **Aliasing**
- **Técnicas conhecidas implementadas**
- **Técnicas analisadas**
- **Técnica desenvolvida neste trabalho**
- **Compressão colorida**
- **Resultados**
- **Conclusões**

Conclusões

- **Considerando métodos com características adequadas:**
 - ⇒ **o método de Classificação Canônica através das Intensidades obteve a melhor qualidade**
 - ⇒ **o método de Dupla Classificação Canônica com Quadtree de 3 níveis obteve a melhor taxa de compressão**

- **O método proposto tem a melhor qualidade dentre os métodos derivados do programa base**

- **A utilização da correlação entre canais em imagens coloridas melhora muito (3x) o tempo e a taxa de compressão, mas reduz a qualidade da imagem**

Organização

- **Compressão fractal clássica**
- **Teorema da Colagem**
- **Problema Inverso**
- **Modificações efetuadas na compressão clássica para uma codificação mais eficiente**
- **Aliasing**
- **Técnicas conhecidas implementadas**
- **Técnicas analisadas**
- **Técnica desenvolvida neste trabalho**
- **Compressão colorida**
- **Resultados**
- **Conclusões**
- **Sugestões para trabalhos futuros**

Sugestões para Trabalhos Futuros

- **Testar as técnicas com imagens de dimensões maiores (aliasing)**
- **Implementar a técnica de Dimensão Fractal Local no programa do Fisher**
- **Utilização de métodos híbridos (com JPEG)**
- **Pesquisa de sistemas de cores com alta correlação entre os canais de cores**
- **Implementar testes de correlação para a escolha do canal guia em imagens coloridas**