

Análise de Fourier

Imagens no Domínio da Frequência

Todas as imagens deste trabalho foram obtidas de **R. C. Gonzalez and R. E. Woods** - Digital Image Processing, Addison Wesley Pub. Co. 1993 - ISBN 0-201-60078-1 <http://www.imageprocessingbook.com>

Transformada de Fourier de uma função contínua.

- Se $f(x)$ é contínua sua transformada de Fourier TF é denotada pelo símbolo: $\mathcal{F}\{f(x)\}$
- ou $F(u)$ e definida como

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp[-j2\pi ux] dx$$

- onde $j = \sqrt{-1}$

Transformada Inversa de Fourier

- Sendo dada uma $F(u)$, a função inversa , $f(x)$ pode ser obtida de:

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(u)\} = f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \exp [j2\pi ux] du$$

- Chama-se **par de Fourier** ao conjunto
($f(x)$, $F(u)$)

$F(u)$ é geralmente um função complexa

- de modo que, como um número complexo, faz sentido se falar em uma parte real e outra imaginária:

$$F(u) = R(u) + jI(u)$$

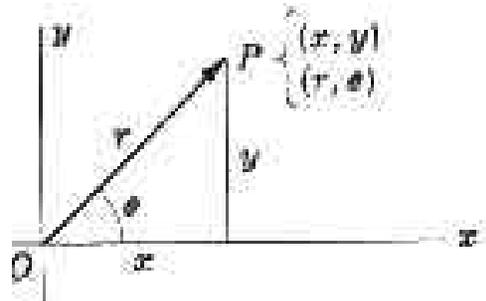
- E também em descrevê-la na forma polar, como magnitude e ângulo de fase.

$$|F(u)| = [R^2(u) + I^2(u)]^{1/2} \quad \phi(u) = \tan^{-1} \left[\frac{I(u)}{R(u)} \right]$$

Como um número complexo a TF também pode ser escrita na forma exponencial

- se forem usadas as Identidades de Euler:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta, \quad e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta$$



$$x + jy = r(\cos \theta + j \sin \theta)$$

$$F(u) = |F(u)| e^{j\phi(u)}$$

Espectro de Fourier de $f(x)$

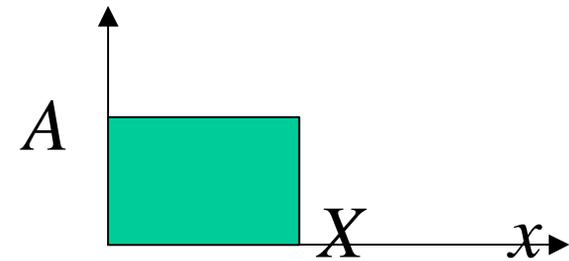
- é o gráfico da magnitude $\times u$ (frequência)
- O quadrado da magnitude é chamado de Espectro de Potência ou Energia de $f(x)$:
$$P(u) = |F(u)|^2$$
$$= R^2(u) + I^2(u)$$
- A frequência , u , corresponde a frequência na forma de senos e cosenos

$$\exp[-j2\pi ux] = \cos 2\pi ux - j \sin 2\pi ux.$$

Exemplo:

- supondo $f(x)$ dada por:
- $f(x) = A$ para $x < X$

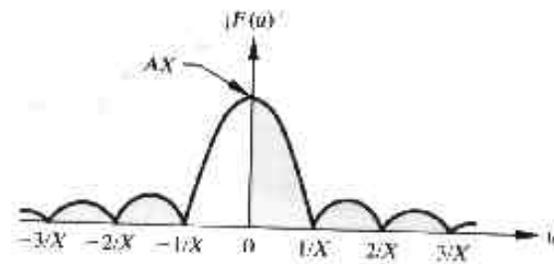
$$\begin{aligned} F(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp[-j2\pi ux] dx \\ &= \int_0^X A \exp[-j2\pi ux] dx \\ &= \frac{-A}{j2\pi u} [e^{-j2\pi uX}]_0^X = \frac{-A}{j2\pi u} [e^{-j2\pi uX} - 1] \\ &= \frac{A}{j2\pi u} [e^{j\pi uX} - e^{-j\pi uX}] e^{-j\pi uX} \\ &= \frac{A}{\pi u} \sin(\pi uX) e^{-j\pi uX} \end{aligned}$$



exemplo cont.

- De modo seu espectro ficará

$$\begin{aligned} |F(u)| &= \left| \frac{A}{\pi u} \right| |\sin(\pi u X)| |e^{-\pi u X}| \\ &= AX \left| \frac{\sin(\pi u X)}{(\pi u X)} \right| \end{aligned}$$



em 2D:

- as integrais simples ficarão integrais duplas,

$$\mathcal{F}\{f(x, y)\} = F(u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-j2\pi(ux + vy)] dx dy$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(u, v)\} = f(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(u, v) \exp[j2\pi(ux + vy)] du dv$$

- mas os demais conceitos e formas são iguais:

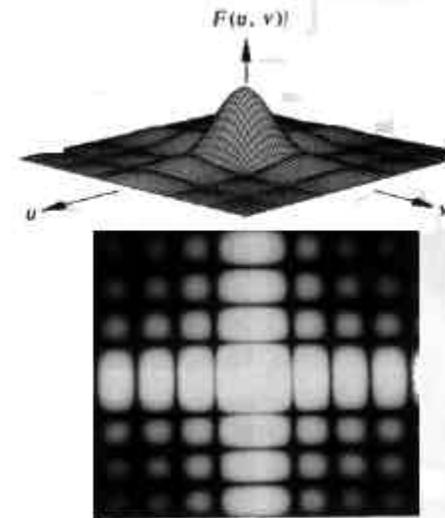
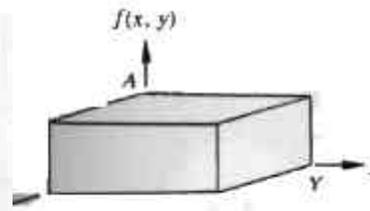
$$|F(u, v)| = [R^2(u, v) + I^2(u, v)]^{1/2}$$

$$\phi(u, v) = \tan^{-1} \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right]$$

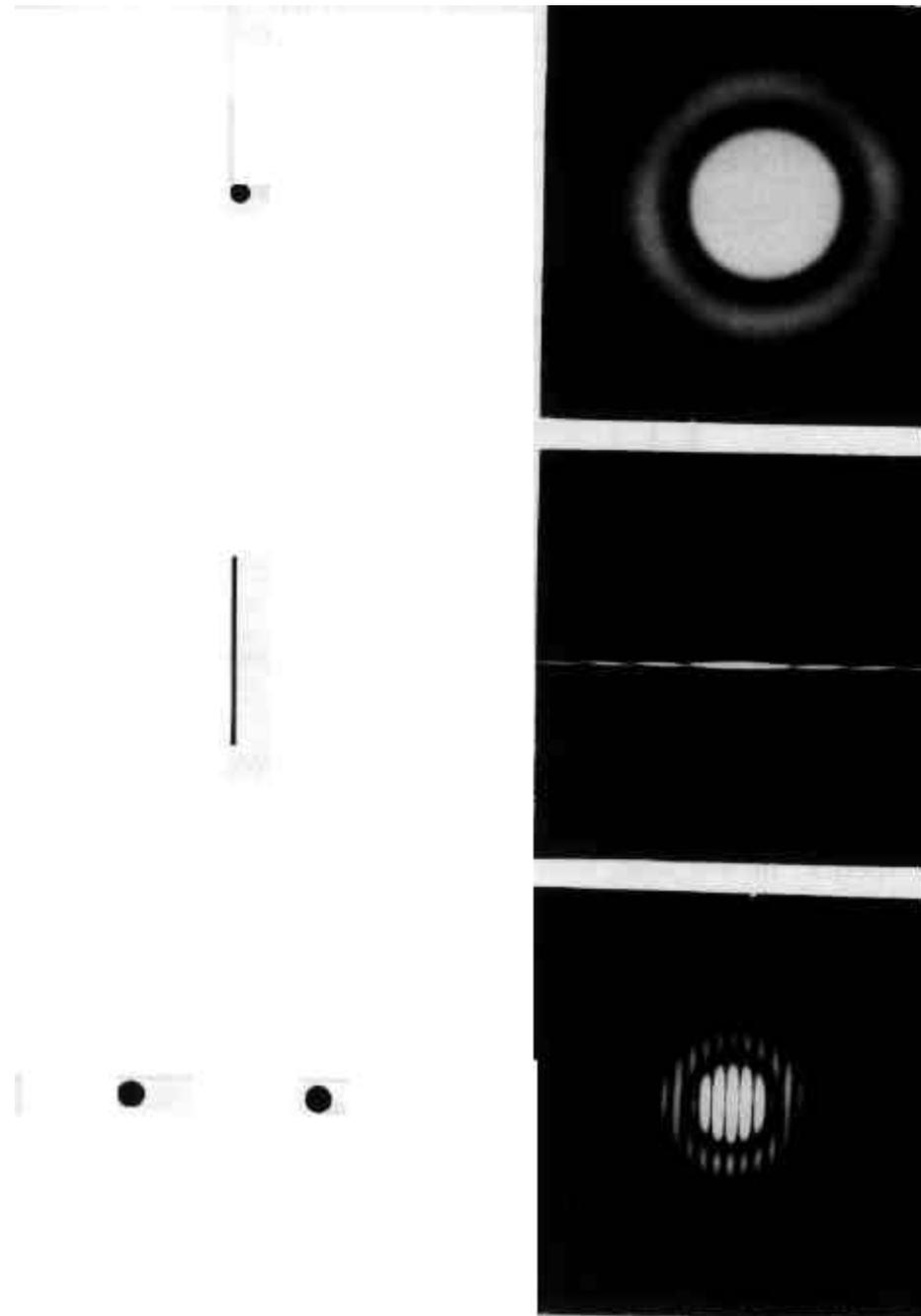
exemplo para funções 2D:

- considerando a em função : $f(x,y) = A$ para $x < X$ e $y < Y$,
teremos:

$$\begin{aligned}
 F(u, v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-j2\pi(ux + vy)] dx dy \\
 &= A \int_0^X \exp[-j2\pi ux] dx \int_0^Y \exp[-j2\pi vy] dy \\
 &= A \left[\frac{e^{-j2\pi ux}}{-j2\pi u} \right]_0^X \left[\frac{e^{-j2\pi vy}}{-j2\pi v} \right]_0^Y \\
 &= \frac{A}{-j2\pi u} [e^{-j2\pi uX} - 1] \frac{1}{-j2\pi v} [e^{-j2\pi vY} - 1] \\
 &= AXY \left[\frac{\sin(\pi uX) e^{-j\pi uX}}{(\pi uX)} \right] \left[\frac{\sin(\pi vY) e^{-j\pi vY}}{(\pi vY)} \right].
 \end{aligned}$$

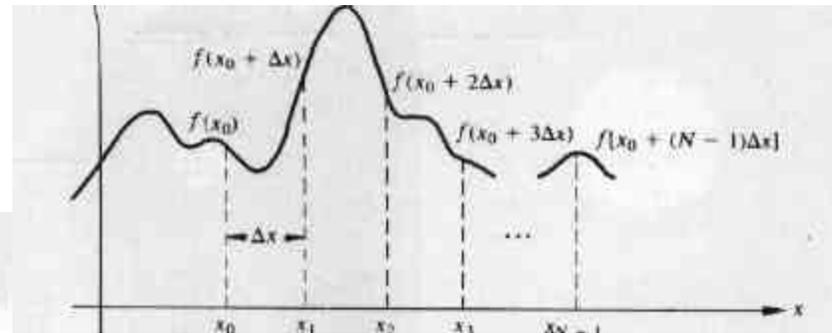


Outros
exemplos de
 $f(x,y)$ e seus
espectros:



Para funções discretas:

$$f(x) = f(x_0 + x \Delta x)$$



- Teremos as sequencia: $f(0), f(1), f(2), \dots, f(N-1)$
- *de modo que passaremos a ter um par discreto de Fourier dado por:*

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \exp[-j2\pi ux/N]$$

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u) \exp[j2\pi ux/N]$$

- para $u=0, 1, 2, \dots, N-1$ e $x= 0, 1, 2, \dots, N-1$
- os incrementos em u e x se relacionam por:

$$\Delta u = \frac{1}{N \Delta x}$$

Para o caso de duas variáveis discretas teremos:

- Para par de Fourier com:

$$u=0,1,2,\dots M-1 \text{ e } v=0,1,2,\dots N-1$$
$$\text{e } x=0,1,2,\dots M-1 \text{ e } y=0,1,2,\dots N-1$$

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp[-j2\pi(ux/M + vy/N)]$$

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp[j2\pi(ux/M + vy/N)]$$

- e relação entre as amostras :

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta x} \quad \Delta v = \frac{1}{N\Delta y}$$

Para funções com “grid” 2D é quadrado:

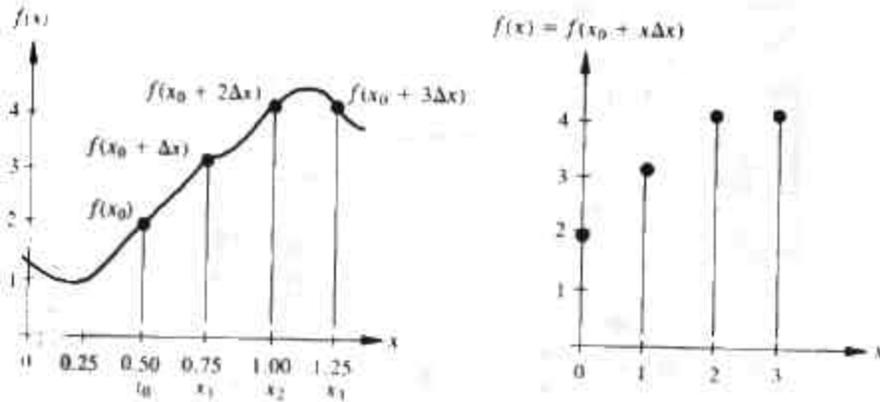
- $M=N$ e $1/N$ aparece em $f(x, y)$ e $F(u, v)$

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \exp[-j2\pi(ux + vy)/N]$$

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp[j2\pi(ux + vy)/N]$$

- Diferente do caso contínuo, no caso discreto a transformada de Fourier de uma **função sempre existe!** (Gonzalez & Wood p. 90)

Exemplo se f é a abaixo:



$$\begin{aligned}
 F(0) &= \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 f(x) \exp[0] \\
 &= \frac{1}{4} [f(0) + f(1) + f(2) + f(3)] \\
 &= \frac{1}{4} (2 + 3 + 4 + 4) \\
 &= 3.25
 \end{aligned}$$

$$F(1) = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 f(x) \exp[-j2\pi x/4] = \frac{1}{4} (-2 + j)$$

$$F(2) = -\frac{1}{4} [1 + j0]$$

$$F(3) = -\frac{1}{4} [2 + j].$$

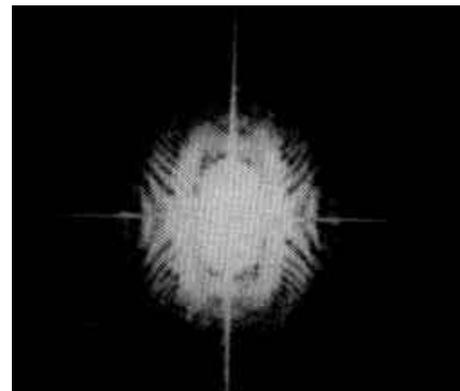
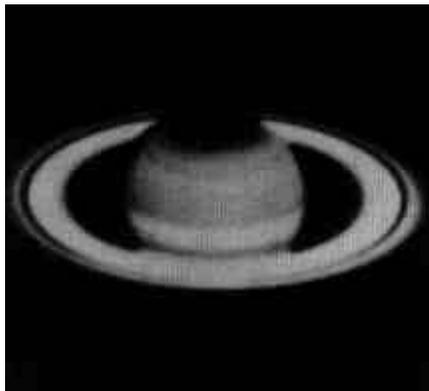
- De modo que o espectro será...

Algumas características:

- Para melhor visualizar devido ao grande range muitas vezes melhor mostra na forma logaritmica:

$$\log (1+ | F(u , v) |)$$

- No exemplo abaixo iria de [0 a 2500000], na forma de log passa a ir de [0 a 6.4] sendo depois re-escalada para ir de 0 a 255 tons de cinza

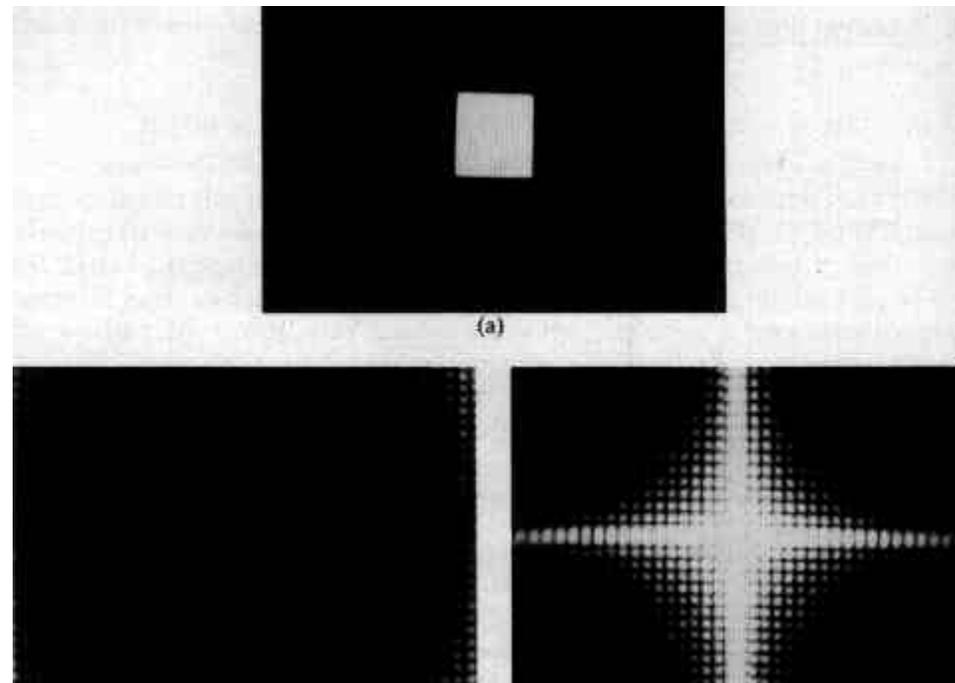


Separabilidade:

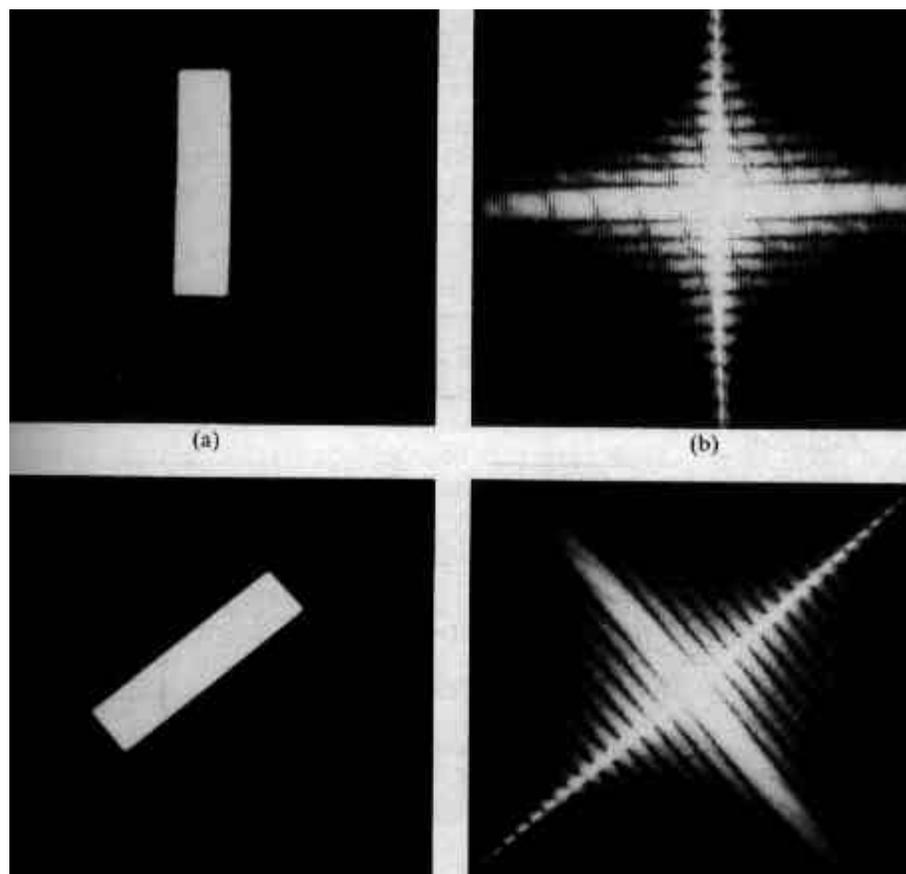
- Os valores podem ser calculados nas variáveis x e depois nas y , como duas funções 1D, e as inversas em u e v

Translação :

- um Shift em $f(x,y)$ não afeta a magnitude de $F(u,v)$
- é melhor interpretada geralmente se a origem for movida para o meio do período $(N/2, N/2)$



Rotação: Rotacionando $f(x,y)$ de um ângulo θ , faz $F(u,v)$ ser rotacionada do mesmo ângulo.



Operação	$f(t)$	$F(w)$
Linearidade	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(w) + a_2 F_2(w)$
Escalonamento	$f(at)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{w}{a}\right)$
Deslocamento no espaço	$f(t - t_0)$	$F(w)e^{-iwt_0}$
Deslocamento no freqüência	$f(t)e^{i\omega_0 t}$	$F(w - w_0)$
Diferenciação no espaço	$\frac{d^n f}{dt^n}$	$(i\omega)^n F(w)$
Diferenciação na freqüência	$(-it)^n f(t)$	$\frac{d^n F}{dw^n}$
Integração no espaço	$\int_{-\infty}^t f(x)dx$	$\frac{1}{(i\omega)} F(w)$
Convolução no espaço	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(w)F_2(w)$
Convolução na freqüência	$f_1(t)f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} [F_1(w) * F_2(w)]$

Teorema da Convolução:

$$f(x)*g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)g(x - \alpha) d\alpha$$

- A convolução de duas funções do espaço se torna a multiplicação de suas transformadas

$$g(x,y)=h(x,y)*f(x,y)$$

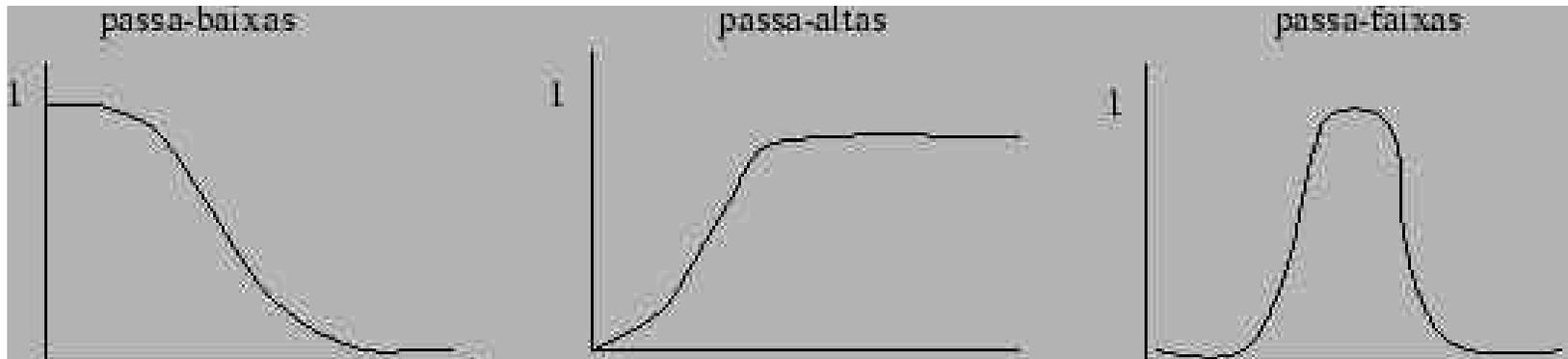
- A convolução de duas funções em frequência se torna a multiplicação de suas transformadas inversas:

$$G(u,v)= H(u,v)F(u,v)$$

Como Projetar filtros:

- Suponha *que* $h(x,y)$ seja desconhecida.
- Se for aplicado uma função pulso unitário, sua transformada de Fourier será 1, de modo que:
$$G(u,v) = H(u,v)$$
- Assim a transformada inversa de $G(u,v)$ será $h(x,y)$

Filtragem em frequência: $G(u, v) = H(u, v)F(u, v)$

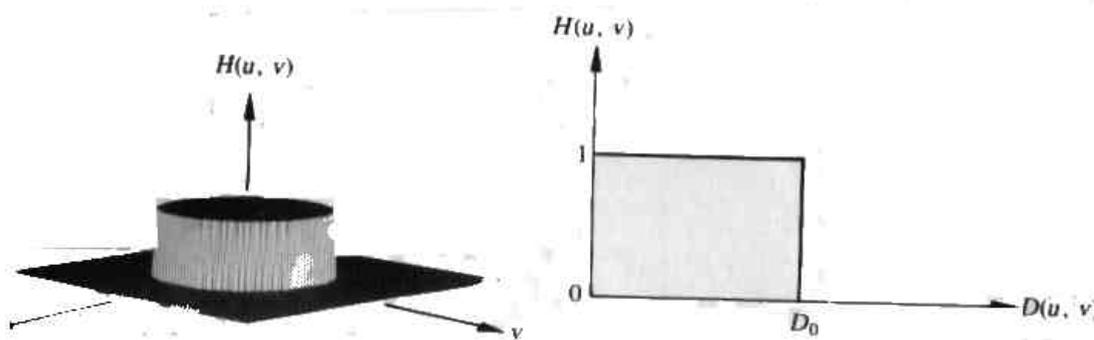


O filtro passa-baixa ideal é definido por:

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{se } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{se } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

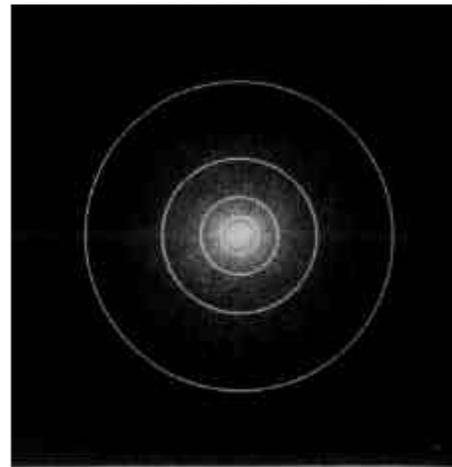
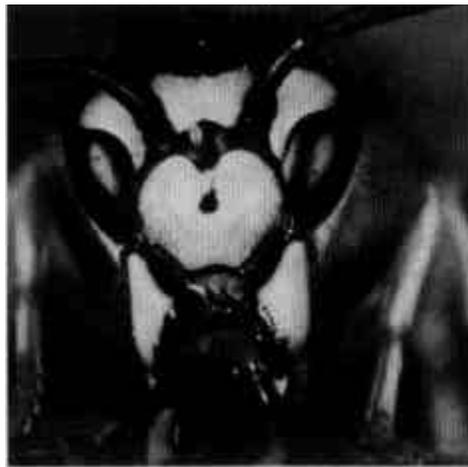
Onde D_0 é um valor específico não negativo e $D(u, v)$ é a distancia do ponto (u, v) a origem do plano de frequência , isto é:

$$D(u, v) = (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}$$



Exemplo em imagem de 521x512

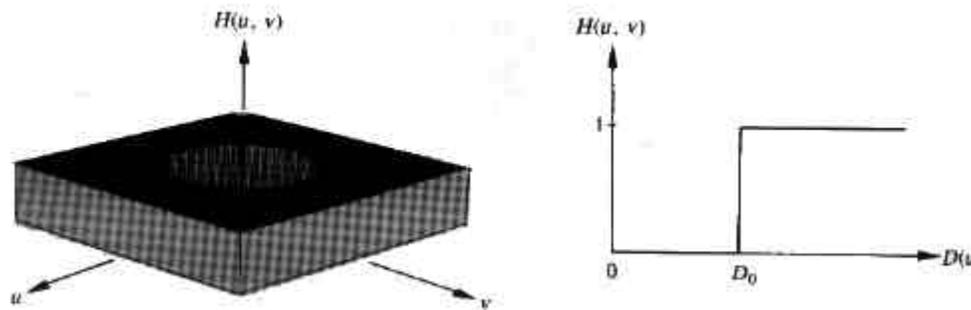
- No espectro de Fourier os círculos de raios de 8,18,43,78 e 152 e contém 90 % , 93% , 95% , 99% e 99,5 % da potencia da imagem



Filtro passa-alta ideal

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{se } D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{se } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

$$D(u, v) = (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}$$

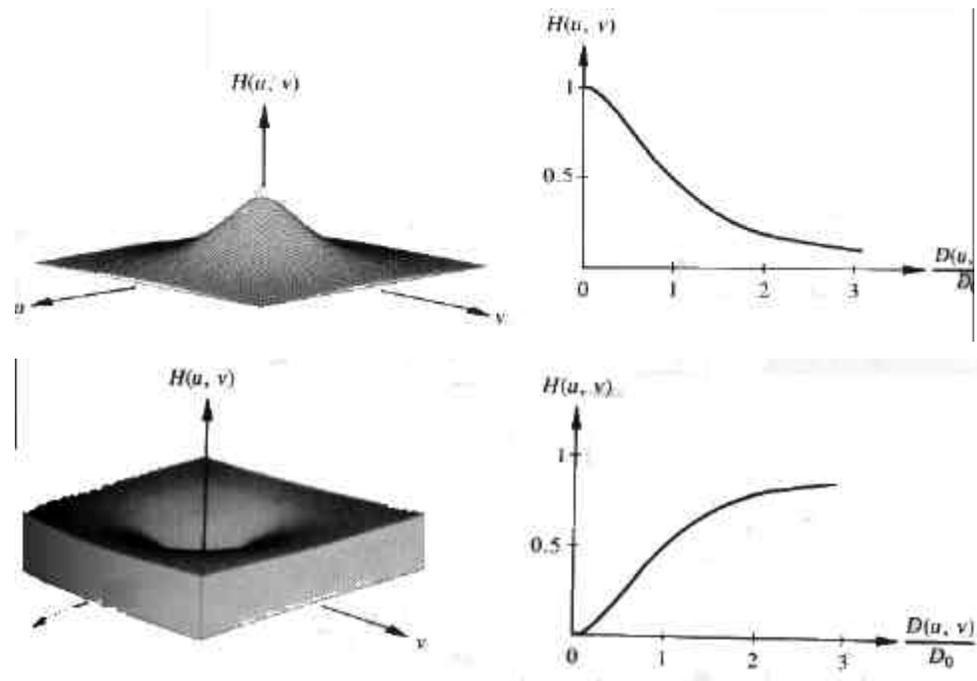


Filtro de Butterworth

- Não apresenta descontinuidade abrupta na frequência de corte, tal como a apresentada pelo filtro passa-baixa ou passa baixa ideal.
- As frequências indesejáveis serão atenuadas progressivamente em um determinado espectro de frequência.
- Este filtro é muito usado para atenuar contornos duplos e ruídos indesejáveis.

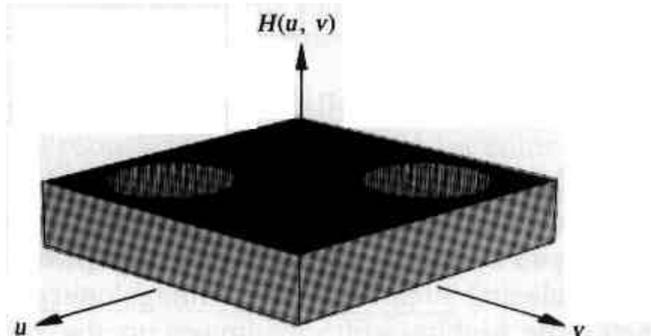
$$H(u,v) = 1 / (1 + (D/D_o)^{2n})$$

$$H(u,v) = 1 / (1 + (D_o/D)^{2n})$$



Regeita Banda Ideal

- Suprime todas as frequências em uma vizinhança de raio D_0 em torno de um ponto (u_0, v_0)



$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{se } D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{se } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

onde

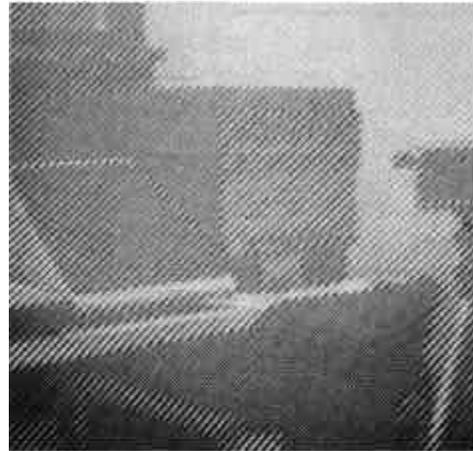
$$D(u, v) = [(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2]^{1/2}$$

- Devido a simetria da transformada de Fourier se não for em torno da origem deve ser feita em pares simétricos, para manter o sentido.

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{se } D_1(u, v) \leq D_0 \text{ ou } D_2(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{para outros valores} \end{cases}$$

Exemplo: imagem corrompida por um padrão senoidal

- imagem original
- Espectro de Fourier mostra impulsos senoidais
- Filtragem usando filtro rejeita banda de raio 1



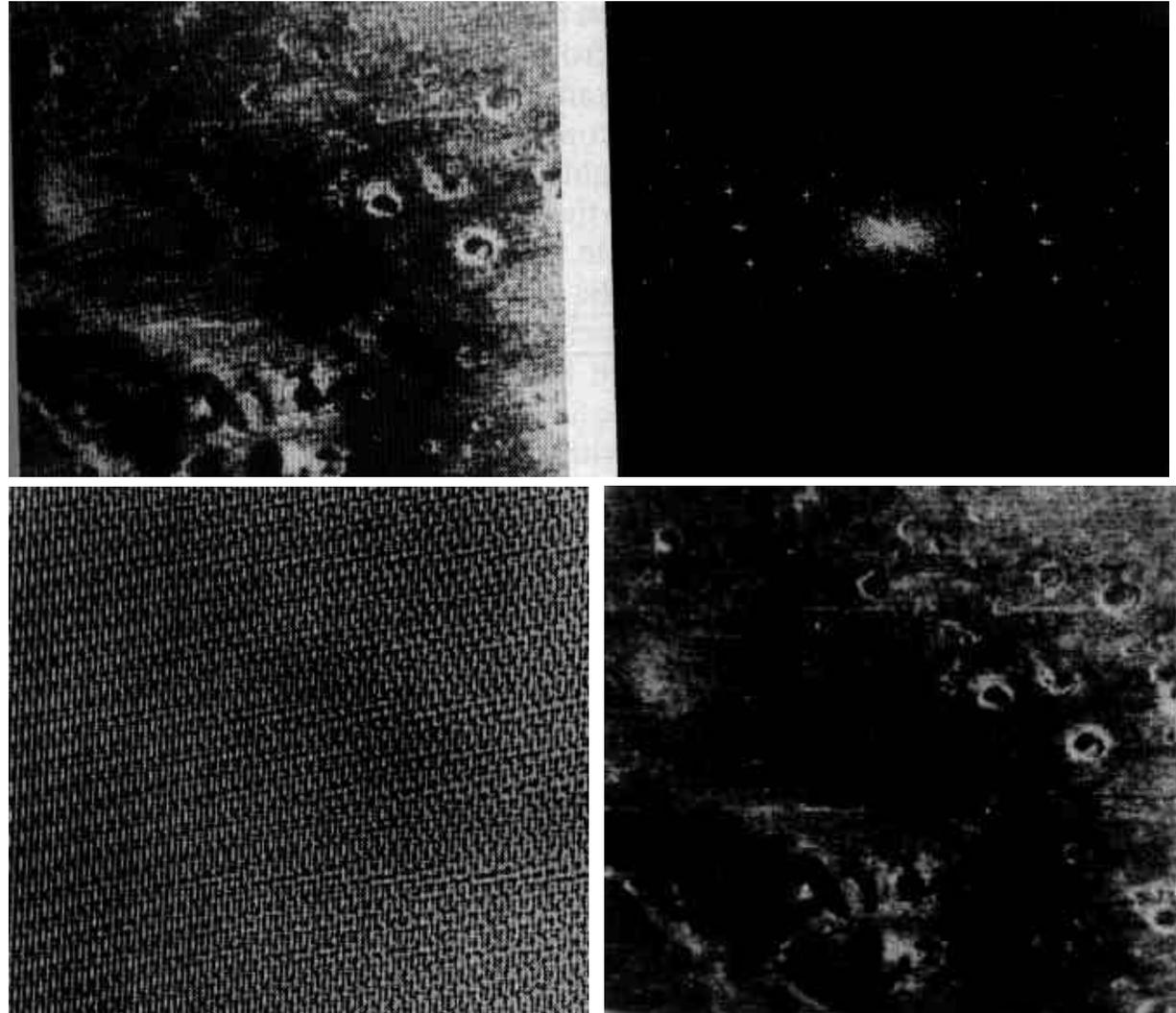
Exemplo: imagem corrompida por mais de um padrão

Imagem

Seu espectro de
Fourier

Padrão devido aos
pontos fora da
origem

Imagem processada



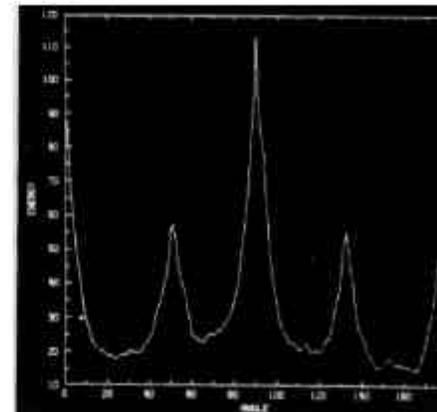
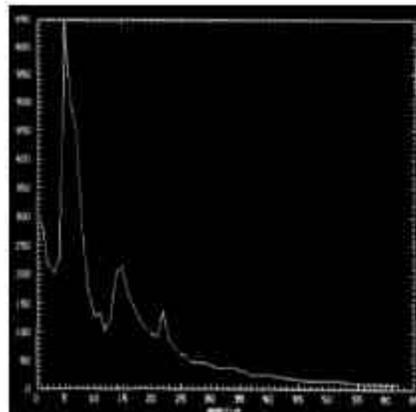
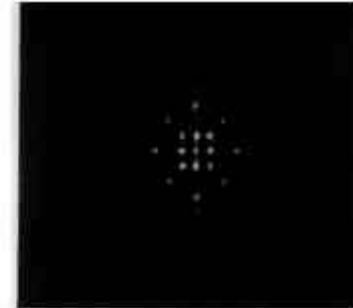
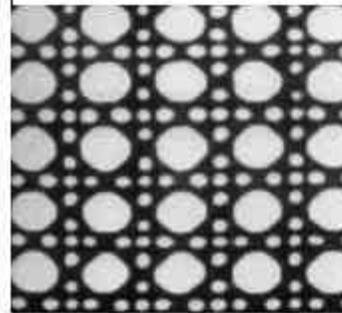
Textura global

- Picos de $|F(u)|$ mostram as direções principais da textura
- Localização dos picos nos planos de frequência dão o período espacial fundamental

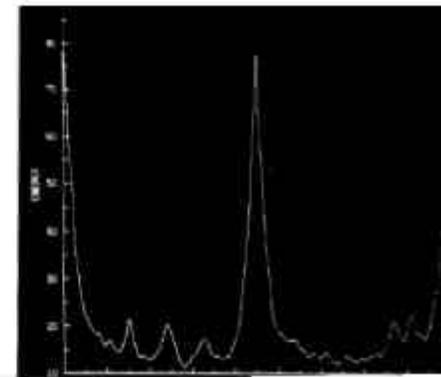
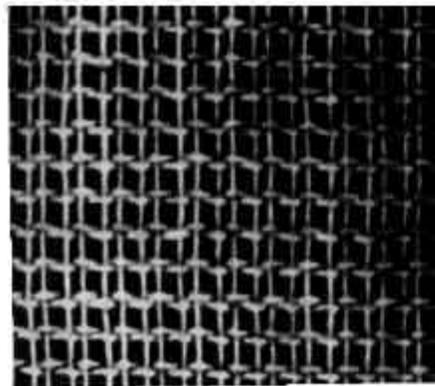
$$S(r) = \sum_{\theta=0}^{\pi} S_{\theta}(r)$$

$$S(\theta) = \sum_{r=1}^R S_r(\theta)$$

Image,
seu espectro,
e gráficos $S(r)$ e
 $S(0)$



Outra textura e
seu gráfico $S(0)$



Transformada Discreta Rápida de Fourier - FFT

- Diminui a complexidade do cálculo de $N \times N$
para $N \log_2 N$
- Usa a separabilidade
- Usa uma tabela para os termos exponenciais
- Usa o mesmo algoritmo para a transformada direta e inversa.

Referências:

- Foram usados os livros textos da página do curso:
 - Alan & Policarpo
 - Jain et al.
 - Gonzalez & Wood
 - (Referencia detalhada desta bibliografia em www.ic.uff.br/~aconci/AI.html)