Coeficiente de Hurst

A **geometria fractal** destaca-se dentre as diversas abordagens possíveis para análise textural. Sua utilização para caracterização de texturas permite associá-las a índices numéricos para posterior identificação e classificação com grande simplicidade e eficiência.

A **dimensão fractal** (**DF**) pode ser utilizada para:

- determinação da **rugosidade** da superfície terrestre,
- classificação de imagens,
- distinção entre tipos de paisagens,
- detecção de bandas espectrais ruidosas,
- determinação da escala operacional de fenômenos naturais em imagens digitais,
- análise da diversidade da paisagem,
- análise dos efeitos da conversão de dados em sistemas de informações geográficas,
- escalonamento aplicado às extensões espaciais em sensoriamento remoto,
- na análise de superfícies fraturadas, desgaste e erosão e corrosão.

A **dimensão fractal** - **DF** é definida como :

$$D = \frac{\ln N}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)}$$

Sendo usada no cálculo, a intensidade de um conjunto de pixels de uma imagem ***I*** dividida em ***N*** **partes idênticas** não coincidentes e escalonadas por um **fator de escala de *r*.**

O coeficiente de Hurst é uma aproximação da DF. Regiões com coeficientes semelhantes são consideradas de mesma textura. Este índice pode ser útil então para segmentação e identificação de texturas ou busca de em banco de padrões texturais.

Para exemplificar o cálculo do coeficiente de Hurst considere a Figura 1, que ilustra uma região de 7x7 pixels com seus níveis de intensidade.

	0	1	2	3	4	5	6
0	85	70	86	92	60	102	202
1	91	81	98	113	86	119	189
2	96	86	102	107	74	107	194
3	101	91	113	**107**	83	118	198
4	99	68	107	107	76	108	194
5	107	94	93	115	83	115	198
6	94	98	98	107	81	115	194

Figura 1 - Região de 7x7 pixels para cálculo do coeficiente de Hurst

.

A Figura 2 representa a **distância euclidiana** de cada pixel (x_i,y_i) em relação ao pixel central (x_c,y_c), calculada por meio da equação:

$$d(x_c, y_c; x_i, y_i) = \sqrt{(x_c - x_i)^2 + (y_c - y_i)^2}$$

Para a **Região de 7x7 pixels** , existem oito grupos de pixels, correspondendo às oito diferentes distâncias possíveis mostradas com as oito cores diferentes da figura 2.

$\sqrt{18}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{10}$	3	$\sqrt{10}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{18}$
$\sqrt{13}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{5}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{13}$
$\sqrt{10}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{10}$
3	2	1	0	1	2	3
$\sqrt{10}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{10}$
$\sqrt{13}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{5}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{13}$
$\sqrt{18}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{10}$	3	$\sqrt{10}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{18}$

Figura 2 - Oito grupos de pixels correspondentes às distâncias

O cálculo do **coeficiente de Hurst** :

- **primeiro passo –**

Determinar a **maior diferença de nível de cinza (△g) para cada classe de distância dos pixels**.

A maior diferença será obtida depois da busca do maior e menor tom da região. Neste exemplo, começando com os pixels distantes um do centro, o nível de cinza máximo é 113 e o mínimo é 83, ocorrendo uma diferença de 30.

A próxima classe (distância=$\sqrt{2} \approx$ 1,414) tem o nível mínimo de 74, permanecendo o nível máximo em 113, portanto, a maior diferença será igual a 39.

A terceira classe (distância =2) possui nível máximo igual a 118 e nível mínimo permanecendo em 74, logo, a maior diferença de nível de intensidade igual a 44.

Este processo deve ser realizado sucessivamente para as oito classes de distâncias.

- **segundo passo –**

Deve-se obter o logaritmo das distâncias e das diferenças de nível de cinza, conforme descrito na tabela 1.

Deve-se obter logaritmo das diferenças de nível de cinza.

Plotar os pontos definidos pelo logaritmo das distâncias e pelo logaritmo das diferenças de nível de cinza num gráfico. Este é conhecido na literatura como **gráfico de Richardson.**

Tabela 1 - Distância e diferença de nível de cinza para região da Figura 2

Distância (d)	ln d	Diferença de nível de cinza (Δg)	ln Δg
$d = 1$	0.000	113-83=30	3.401
$d = \sqrt{2}$	0.346	113-74=39	3.663
$d = 2$	0.693	118-74=44	3.784
$d = \sqrt{5}$	0.804	118-68=50	3.912
$d = \sqrt{8}$	1.039	119-68=51	3.931
$d = 3$	1.098	198-68=130	4.867
$d = \sqrt{10}$	1.151	198-60=138	4.297
$d = \sqrt{13}$	1.282	198-60=138	4.297
$d = \sqrt{18}$	1,445	202-60=142	4.955

- **Terceiro passo –**

O passo final consiste em realizar o ajuste da reta (y = *b*x+*a*) definida pelos pontos de coordenadas logarítmicas (*ln* d; *ln* Δg).

Através do *método dos mínimos quadrados* se calculam os parâmetros "*b*" e "*a*", da reta que minimiza as distâncias ou diferenças entre y e y'.

$$b = \frac{n\sum \ln d \ln \Delta g - \sum \ln d \sum \ln \Delta g}{n\sum (\ln d)^2 - (\sum \ln d)^2}$$

$$a = \frac{\sum \ln \Delta g}{n} - b\frac{\sum \ln d}{n}$$

Esta reta pode ser entendida como regressão linear.

A tabela 2 apresenta os dados utilizados para o cálculo dos parâmetros "*a*" e "*b*".

Tabela 2 - Dados para cálculo da regressão linear

Interações	ln d	ln Δg	ln d ln Δg	(ln d)^2
1	0,00000	3,40120	0,00000	0,00000
2	0,34657	3,66356	1,26969	0,12011
3	0,69315	3,78419	2,62300	0,48045
4	0,80472	3,91202	3,14808	0,64757
5	1,03972	3,93183	4,08800	1,08102
6	1,09861	4,86753	5,34753	1,20695
7	1,15129	4,92725	5,67271	1,32547
8	1,28247	4,92725	6,31908	1,64474
9	1,44519	4,95583	7,16209	2,08856
Σ	7,86173	38,37067	35,63019	8,59489
Σ/n	0,874	4,263		
n	9			

A reta neste caso tem a equação : **y = 1,2229x+3,1952** .

A **inclinação** desta reta, ***b*=1,2229**, é o **coeficiente de Hurst**.

Ao se visualizar uma imagem como um mapa de relevo tridimensional, onde a intensidade é vista como a altura z sobre um plano x-y, a aplicação do coeficiente de Hurst torna-se bastante útil para determinar regiões de imagem com relevo semelhante.