

CAPÍTULO 5

Representação de Formas 3-D

5.1 - Coordenadas homogêneas

Um objeto pertencente a um espaço de dimensão n ($\in \mathbb{R}^n$) pode sempre ser representado em um espaço de dimensão $n + 1$ ($\in \mathbb{R}^{n+1}$).

A transferência do objeto de um espaço para outro maior é chamada de **homogênea** se for feita pela **adição** de uma coordenada extra (**fator de escala**) da seguinte maneira:

- um ponto $\in \mathbb{R}$, de coordenadas (\mathbf{x}) terá coordenadas homogêneas $(\mathbf{sx}, \mathbf{s})$ onde \mathbf{s} é um escalar qualquer ($\neq 0$).
- um ponto $\in \mathbb{R}^2$, de coordenadas (\mathbf{x}, \mathbf{y}) terá coordenadas homogêneas $(\mathbf{sx}, \mathbf{sy}, \mathbf{s})$ onde \mathbf{s} é um escalar qualquer ($\neq 0$).
- um ponto $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}^3$, terá coordenadas homogêneas $(\mathbf{sx}, \mathbf{sy}, \mathbf{sz}, \mathbf{s})$, onde \mathbf{s} é um escalar qualquer ($\neq 0$).
- um ponto $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w}) \in \mathbb{R}^4$, terá coordenadas $(\mathbf{sx}, \mathbf{sy}, \mathbf{sz}, \mathbf{sw}, \mathbf{s})$, onde \mathbf{s} é um escalar qualquer ($\neq 0$), e assim por diante.

A transformação inversa **projeta** (isso é diminui o número de elementos) um ponto em coordenadas homogêneas para as coordenadas usuais, através das relações:

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &\rightarrow (\mathbf{a/b}) \\(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &\rightarrow (\mathbf{a/c}, \mathbf{b/c}) \\(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) &\rightarrow (\mathbf{a/d}, \mathbf{b/d}, \mathbf{c/d}) \\(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}) &\rightarrow (\mathbf{a/e}, \mathbf{b/e}, \mathbf{c/e}, \mathbf{d/e}) \text{ etc...}\end{aligned}$$

Matematicamente a **escolha de s** é aleatória. Existe no entanto algumas conseqüências desta escolha. Por exemplo:

- 1- Uma escolha **adequada** pode fazer com que pontos não representáveis passem a **ser representáveis**.

Se uma condição, por exemplo, não puder representar reais, $s = 100$ tornará os seguintes números representáveis (fazendo não ser necessário operar com ponto flutuante):

$$(0,25; 0,15; 0,01) \rightarrow (25; 15; 1; 100)$$

- 2- Uma escolha **adequada** pode evitar problemas de **overflow**.

Se certa máquina só manipula inteiros entre $(-32768=2^{-16}$ a $32768=2^{16})$, $s = 0,1$ tornará os seguintes números representáveis:

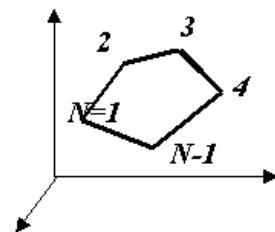
$$(80.000, 40.000, 10.000) \rightarrow (8000; 4000; 1000; 0,1)$$

5.2 - Cálculo de Perímetros, Áreas e Volumes

Cálculo de perímetros, áreas e volumes são facilmente introduzidos em gráficos de curvas, superfícies e na representação de sólidos, que puderem ser aproximados por faces planas e linhas retas.

Seja N o número do vértice de uma curva, ou de um polígono fechado de $N-1$ lados (polígono em que o último vértice coincide com o primeiro), o **perímetro P** é calculado como:

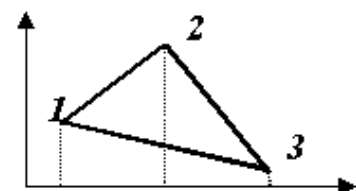
$$P = \sum_{i=1}^N \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2}$$



A **área** entre a curva ($\in \mathbb{R}^2$) e o eixo horizontal, ou a área da figura fechada ($\in \mathbb{R}^2$) pode ser dada pela regra dos trapézios:

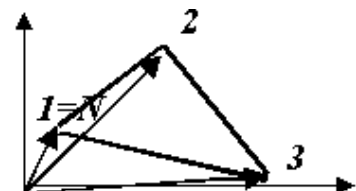
$$A = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^N (x_{i+1} - x_i) (y_{i+1} + y_i) + (x_1 - x_N) (y_1 + y_N) \right]$$

Mas essa forma fica muito complexa para uso em objetos 3D.



Usando produto vetorial tem-se uma fórmula mais eficiente aplicável tanto em 2D:

$$A = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^N (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) + x_N y_1 - x_1 y_N \right]$$



quanto em 3D (na expressão abaixo o primeiro ponto e o último são considerados coincidentes):

$$A = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^N (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) + \sum_{i=1}^N (y_i z_{i+1} - z_i y_{i+1}) + \sum_{i=1}^N (z_i x_{i+1} - z_{i+1} x_i) \right]$$

O volume da pirâmide de lados $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ é: $\frac{1}{6} \left[\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \right]$. Assim o **volume** de figuras complexa será a \sum do volume das pirâmides que a constituem.



Nota: o **produto misto** de 3 vetores: $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$, tem no seu módulo a representação do volume do paralelepípedo de lados A, B e C . O volume de um **paralelepípedo** é a sua área multiplicado pela sua altura ou: $A \times B \cdot C = AB \sin \alpha C \cos \theta$ (onde α é o ângulo entre os lados A e B e θ o ângulo que C faz com o plano definido por A e B).

O volume de uma pirâmide é: $V = \frac{1}{3}Ah$ onde a área da base é: $A = \frac{1}{2}|\vec{b} \times \vec{c}|$ logo:

$$V = \frac{1}{3}Ah = \frac{1}{3}A \cos\theta \vec{a} = \frac{1}{3}A \cdot \vec{a} = \frac{1}{6} [\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})]$$

5.3 - Transformações Geométricas

Transformações geométricas são usadas para modificar objetos já existentes. É geralmente desejável descrever estas transformações por matrizes, pois com essa descrição é possível usar as propriedades de matrizes (associatividade, produto matricial e concatenação) simplificando problemas complexos.

São sempre usadas coordenadas homogêneas, nestes casos, porque a translação poderá, com o uso destas coordenadas, também ser descrita por matrizes.

São transformações básica:

– as translações

– as rotações de objetos na origem em torno dos eixos $\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$

– as mudanças de escala em torno da origem.

5.3.1 - Translação por um vetor $T(t_x, t_y, t_z)$

Cada ponto $P(x, y, z)$ do objeto será transformado em um outro ponto $P'(x', y', z')$ de modo que suas coordenadas se relacionem por:

$$P' = P + T \rightarrow \begin{cases} x' = x + t_x \\ y' = y + t_y \\ z' = z + t_z \end{cases}$$

matricialmente, usando coordenadas homogêneas tem-se: $P' = P \cdot M_{(T)}$ onde

$$P' = (x', y', z', 1) = (x, y, z, 1) \cdot M_{(T)} = (x + t_x, y + t_y, z + t_z, 1)$$

$$M_{(T)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & t_z & 1 \end{vmatrix}$$

Aqui estamos usando um vetor linha (1x4) multiplicado por uma matriz quadrada (4x4). Se tivéssemos usando vetores coluna (4x1) teria-se que usar a transposta da matriz acima e a ordem da multiplicação seria invertida. Essa observação vale para todas as demais matrizes apresentadas a seguir.

5.3.2 - Rotação de um ângulo α em torno do eixo x

Cada ponto $P(x, y, z)$ do objeto será transformado em um outro ponto $P'(x', y', z')$ de modo que suas coordenadas se relacionem por: $P' = P.M_{(R(x,\alpha))}$ onde

$$P' = (x', y', z', 1) = (x, y, z, 1).M_{(R(x,\alpha))} = (x, y\cos\alpha - z\text{sen}\alpha, z\cos\alpha + y\text{sen}\alpha, 1)$$

$$M_{(R(x,\alpha))} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \text{sen}\alpha & 0 \\ 0 & -\text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

5.3.3 - Rotação de um ângulo β em torno do eixo y

Cada ponto $P(x, y, z)$ do objeto será transformado em um outro ponto $P'(x', y', z')$ de modo que suas coordenadas se relacionem por: $P' = P.M_{(R(y,\beta))}$ onde

$$P' = (x', y', z', 1) = (x, y, z, 1).M_{(R(y,\beta))} = (x\cos\beta - z\text{sen}\beta, y, z\cos\beta + x\text{sen}\beta, 1)$$

$$M_{(R(y,\beta))} = \begin{vmatrix} \cos\beta & 0 & -\text{sen}\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{sen}\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Repare que esta matriz, devido a orientação dos eixos, tem a posição do sinal $-$ invertida em relação as demais.

5.3.4 - Rotação de um ângulo λ de objetos em torno do eixo z

Cada ponto $P(x, y, z)$ do objeto será transformado em um outro ponto $P'(x', y', z')$ de modo que suas coordenadas se relacionem por: $P' = P.M_{(R(z,\lambda))}$ onde

$$P' = (x', y', z', 1) = (x, y, z, 1).M_{(R(z,\lambda))} = (x\cos\lambda - y\text{sen}\lambda, y\cos\lambda + x\text{sen}\lambda, z, 1)$$

$$M_{(R(z,\lambda))} = \begin{vmatrix} \cos\lambda & \text{sen}\lambda & 0 & 0 \\ -\text{sen}\lambda & \cos\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

5.3.5 - Mudança de escala por um vetor $E(e_x, e_y, e_z)$ em torno da origem

Cada ponto $P(x, y, z)$ do objeto será transformado em um outro ponto $P'(x', y', z')$ de modo que suas coordenadas se relacionem por: $P' = P.M_{(E)}$ onde

$$P' = (x', y', z', 1) = (x, y, z, 1).M_{(E)} = (xe_x, ye_y, ze_z, 1)$$

$$M_{(E)} = \begin{vmatrix} e_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Se o objeto não estiver em torno da origem, ou se um dos pontos do objeto não for a origem, também ocorre uma translação no objeto, quando esta transformação for aplicada.

5.4 - Concatenação de Transformações

A multiplicação de matrizes é usada para concatenar transformações. Esta é a maneira usual de obter qualquer transformação a partir dos tipos básicos acima descritos.

Exemplo: um objeto P deve ser transladado de $(t_x, t_y, 0)$ e fazer um ângulo λ com o eixo z , as operações a serem aplicadas são:

$$1^\circ \text{ translação: } P' = P.M_{(T)} \quad (1)$$

$$2^\circ \text{ o resultado é rodado de } \lambda: P'' = P'.M_{(R(z,\lambda))} \quad (2)$$

$$\text{Substituindo (1) em (2): } P'' = P.M_{(T)}.M_{(R(z,\lambda))}.$$

Como o produto matricial é associativo pode-se primeiro resolver a multiplicação das matrizes $M_{(T)}.M_{(R(z,\lambda))}$ e depois multiplicar o resultado pelos pontos do objeto. Assim a matriz abaixo faria os mesmo efeito das anteriores aplicadas em sequência.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos\lambda & \text{sen}\lambda & 0 & 0 \\ -\text{sen}\lambda & \cos\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\lambda & \text{sen}\lambda & 0 & 0 \\ -\text{sen}\lambda & \cos\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_x\cos\lambda - t_y\text{sen}\lambda & t_x\text{sen}\lambda + t_y\cos\lambda & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Usando este mecanismo é possível obter transformações complexas a partir das transformações básicas.

É importante lembrar que a multiplicação de matrizes **não é comutativa**. Se executássemos o segundo passo acima antes do primeiro: (rotação de λ seguida de translação) teríamos como resultado a matriz:

$$P'' = P.M_{(R(z,\lambda))}.M_{(T)} = P \begin{vmatrix} \cos\lambda & \text{sen}\lambda & 0 & 0 \\ -\text{sen}\lambda & \cos\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_x & t_y & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Essa quando aplicada aos pontos do objeto levaria a um efeito diferente.

5.5 - Como determinar a matriz M que leva os pontos de um objeto para outros pontos conhecidos.

Suponha que você conhece as coordenadas de 4 pontos de um objeto 3D, antes e depois, de sofrerem uma determinada transformação. Como você pode determinar a transformação

$$M = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{vmatrix}$$

que produz a modificação desejada? Essa pergunta é conhecida como a determinação do **problema inverso**, e a resposta: M deve ser tal que:

$$(x_1, y_1, z_1, 1) = (x'_1, y'_1, z'_1, 1)|M|$$

$$(x_2, y_2, z_2, 1) = (x'_2, y'_2, z'_2, 1)|M|$$

$$(x_3, y_3, z_3, 1) = (x'_3, y'_3, z'_3, 1)|M|$$

$$(x_4, y_4, z_4, 1) = (x'_4, y'_4, z'_4, 1)|M|$$

onde $(x_i, y_i, z_i, 1)$, $i = 1, 2, 3, 4$ são as coordenadas dos pontos conhecidos. M pode ser determinada resolvendo o sistema de 16 equações a 16 incógnitas:

$$\begin{cases} x_1 = ax'_1 + ey'_1 + iz'_1 + m \\ y_1 = bx'_1 + fy'_1 + jz'_1 + n \\ z_1 = cx'_1 + gy'_1 + kz'_1 + o \\ 1 = dx'_1 + hy'_1 + lz'_1 + p \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = ax'_2 + ey'_2 + iz'_2 + m \\ y_2 = bx'_2 + fy'_2 + jz'_2 + n \\ z_1 = cx'_2 + gy'_2 + kz'_2 + o \\ 1 = dx'_2 + hy'_2 + lz'_2 + p \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = ax'_3 + ey'_2 + iz'_2 + m \\ y_3 = bx'_3 + fy'_3 + jz'_3 + n \\ z_3 = cx'_3 + gy'_3 + kz'_3 + o \\ 1 = dx'_3 + hy'_3 + lz'_3 + p \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_4 = ax'_4 + ey'_4 + iz'_4 + m \\ y_4 = bx'_4 + fy'_4 + jz'_4 + n \\ z_4 = cx'_4 + gy'_4 + kz'_4 + o \\ 1 = dx'_4 + hy'_4 + lz'_4 + p \end{cases}$$

5.6 - Projeções e Perspectivas

Em computação gráfica um problema frequente é como representar o objeto 3D nos dispositivos de saída 2D. A solução é projetar o objeto 3D no plano 2D. Ou seja o uso de Projeções e Perspectivas.

Projeções são muito usada em desenho técnico. Perspectivas são muito usada na representação de cenas realísticas.

A projeção é, matematicamente, uma função ou transformação **idempotente** (isso é, uma função que repetida produz resultado idêntico):

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$P \rightarrow P' = F(P); P' \rightarrow P'' = F(P') = P'$$

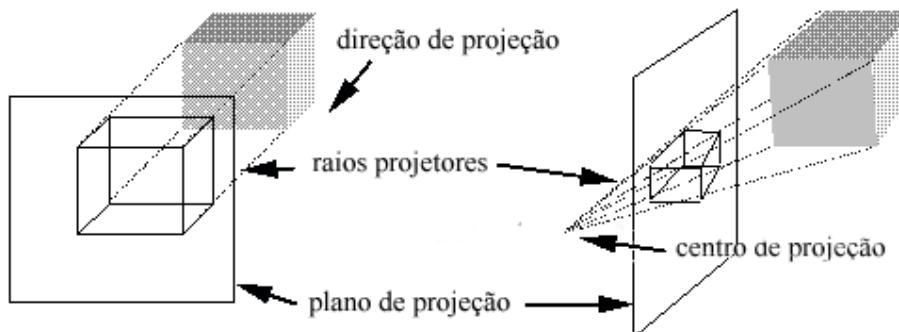
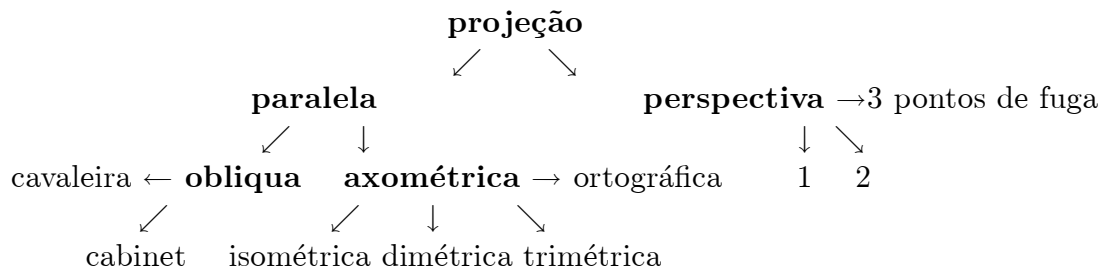
ou

$$F(F(P)) = F(P)$$

Exemplo: a projeção de um vetor em uma direção é obtida pelo **produto interno** ou **produto escalar** do vetor com o vetor unitário da direção.

Essas operações de projeção são executadas por matrizes definidas de acordo com o tipo de aparência que deseja-se para o objeto. Algumas projeções recebem denominação especial, essas são descritas a seguir.

Sumário dos tipos de projeção para computação gráfica



A **projeção em perspectiva** é obtida pela interseção de retas (chamadas **raios projetores**) passando pelos vértices do objeto a ser projetado e pelo **centro de projeção**, com o **plano de projeção** ou plano de vista. Elas são caracterizadas pelo número de centro de projeções ou **pontos de fuga** usados.

As **projeções paralelas** são obtidas de forma idêntica, mas com o plano de projeção no infinito (logo todos os raios projetores serão retas paralelas). Se os raios projetores são \perp ao **plano de vista**, a projeção **paralela** é chamada **axométrica**, caso contrário é chamada **obliqua**. As projeções **axométricas** mais importantes são: a isométrica, a dimétrica e a ortográfica.

Na projeção **isométrica** o plano de vista faz o **mesmo ângulo** com os 3 principais eixos do objeto, assim os 3 eixos do objeto sofrem a mesma variação de comprimento. Na projeção **dimétrica** o plano de vista tem mesmo ângulo com dois dos eixos principais do objeto (assim 2 eixos sofrem mesma variação de medida). Na projeção **trimétrica** o plano de vista tem ângulos diferentes com cada eixo principal do objeto (ocorrendo 3 variações diferentes de medidas). Na projeção **ortográfica** o plano de vista tem normal paralela a um dos eixos do objeto.

Na projeção **obliqua** as linhas de projeção têm ângulos $\neq 90^\circ$ como o plano de vista. Estas projeções se caracterizam pela **redução** que ocasionam nas medidas de um dos eixos do objeto, que é uma consequência do ângulo que as linhas de projeção formam com o plano de vista. Suas principais classificações são:

cavaleira \rightarrow quando as linhas de projeção fazem 45° com o plano de projeção, logo não ocorre redução de medidas.

cabinet \rightarrow é um caso particular de obliqua, onde o 3° eixo tem suas medidas reduzidas pela metade. Neste caso demonstra-se facilmente que as linhas de projeção fazem aproximadamente 63° com o plano de projeção.

5.6.1 - Determinação das Matrizes de Projeção

As matrizes de projeção devem ser tais que, cada ponto P do objeto seja levado no ponto P' da sua imagem, de modo que nesta sejam verificados os efeitos que caracterizam determinada projeção: $P' = P.M$

$$(x', y', z', 1) = (x, y, z, 1) \mid M \mid$$

Veremos a seguir as formas de determinar cada uma dessas projeções.

Projeções axométricas:

Nestas projeções o plano de projeção deve ser paralelo aos planos do objeto e os raios projetores perpendiculares a este plano. Podem ser dos tipos:

1) **Projeção ortográfica no plano** $x = 0$, todas as coordenadas x do objeto pertencem a este plano (ou seja serão zero):

$$M(\text{ort. plano}_{x=0}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2) **Projeção ortográfica no plano** $y = 0$, todas as coordenadas y do objeto pertencem a este plano (ou seja serão zero):

$$M(\text{ort. plano}_{y=0}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3) **Projeção ortográfica no plano** $z = 0$, todas as coordenadas z do objeto pertencem a este plano (ou seja serão zero):

$$M(\text{ort. plano}_{z=0}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

4) **Projeção ortográfica em um plano** $x = P$, é obtida pela combinação da projeção no plano $x = 0$, com uma translação (concatenação).

Assim concatenando a projeção em $x = 0$, com a translação para $x = P$, tem-se:

$$\begin{vmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{vmatrix}$$

As posições sem valores devem ser consideradas como iguais a zero!

5) As projeções **isométrica, dimétrica e trimétricas** (com mudanças específicas de medidas) são obtidas por combinação de rotação seguidas de projeção.

Antes da projeção, em $z = 0$ (por exemplo), aplica-se a rotação de β em torno de y seguida de uma rotação de α em torno de x , resultando:

$$\begin{vmatrix} \cos\beta & 0 & -\text{sen}\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \text{sen}\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \text{sen}\alpha & 0 \\ 0 & -\text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = M(\beta_{\text{em } y} \alpha_{\text{em } x})$$

$$\begin{vmatrix} \cos\beta & \text{sen}\beta\text{sen}\alpha & -\text{sen}\beta\text{cos}\alpha & 0 \\ 0 & \text{cos}\alpha & \text{sen}\alpha & 0 \\ \text{sen}\alpha & -\text{sen}\alpha\text{cos}\beta & \text{cos}\alpha\text{cos}\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = M(\beta_{\text{em } y} \ \alpha_{\text{em } x})$$

Projetando em $z = 0$, tem-se :

$$M'(\beta_{\text{em } y} \ \alpha_{\text{em } x}) = M(\beta_{\text{em } y} \ \alpha_{\text{em } x}) \cdot \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$M'(\beta_{\text{em } y} \ \alpha_{\text{em } x}) = \begin{vmatrix} \cos\beta & \text{sen}\beta\text{sen}\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \text{cos}\alpha & 0 & 0 \\ \text{sen}\alpha & -\text{sen}\alpha\text{cos}\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Para levar em conta a mudança nas medidas do objeto, considera-se agora a transformação de vetores unitários em x e y . O vetor unitário em x , U_x , depois de transformado será, U'_x :

$$U'_x = |1, 0, 0, 1| \cdot M'(\beta_{\text{em } y} \ \alpha_{\text{em } x}) = |\cos\beta, \ \text{sen}\beta\text{sen}\alpha, \ 0, \ 1|$$

e o vetor unitário em y , U_y , depois de transformado será, U'_y :

$$U'_y = |0, 1, 0, 1| \cdot M'(\beta_{\text{em } y} \ \alpha_{\text{em } x}) = |0, \ \text{cos}\alpha, \ 0, \ 1|$$

Por definição a projeção dimétrica e a isométrica devem ter mesma redução em U_x e U_y assim, os vetores depois de transformados devem ter o mesmo comprimento ou norma ($|a, b, c| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$). Calculando esses valores temos:

$$|U'_x| = |U'_y| \rightarrow \cos^2\beta + \text{sen}^2\beta\text{sen}^2\alpha = \cos^2\alpha$$

re-escrevendo a igualdade só em função de “senos”:

$$(1 - \text{sen}^2\beta) + \text{sen}^2\beta\text{sen}^2\alpha = (1 - \text{sen}^2\alpha)$$

organizando a expressão pode-se simplificar como:

$$\text{sen}^2\beta(\text{sen}^2\alpha - 1) = -\text{sen}^2\alpha$$

$$\therefore \text{sen}^2\beta = +\frac{\text{sen}^2\alpha}{1 - \text{sen}^2\alpha} \quad (A)$$

$$\text{sen}^2\beta = +\frac{\text{sen}^2\alpha}{\text{cos}^2\alpha} = \tan^2\alpha \Rightarrow \text{sen}\beta = \tan\alpha$$

Observa-se que tem-se infinitos pares de ângulos que satisfazem essa relação. Assim, para uma projeção **dimétrica**, escolhe-se um ângulo em torno de x (α) e determina-se β . Por exemplo se: $\alpha = 30^\circ$ então β deve ser: $\beta = 35,26^\circ$

de modo que $M(35, 26^\circ_{em\ y}, 30^\circ_{em\ x})$ será:

$$M(35, 26^\circ_{em\ y}, 30^\circ_{em\ x}) = \begin{vmatrix} \sqrt{6/3} & \sqrt{3/6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3/2} & 0 & 0 \\ \sqrt{3/3} & -\sqrt{6/6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.82 & 0.29 & 0 & 0 \\ 0 & 0.87 & 0 & 0 \\ 0.58 & -0.41 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Por exemplo suponha que você queira desenhar um cubo em perspectiva dimétrica com coordenadas: $A = |0, 0, 1, 1|$

$$B = |1, 0, 1, 1|$$

$$C = |1, 0, 0, 1|$$

$$D = |0, 1, 1, 1|$$

$$E = |1, 1, 1, 1|$$

$$F = |1, 1, 0, 1|$$

$$G = |0, 1, 0, 1|$$

O cubo depois de projetado terá coordenadas $P' = P.M$, dadas pela multiplicação de cada ponto pela matriz acima. Fazendo isso tem-se:

$$A' = |0.58, -0.41, 0, 1|$$

$$B' = |1.40, -0.12, 0, 1|$$

$$C' = |0.82, 0.29, 0, 1|$$

$$D' = |0.58, 0.46, 0, 1|$$

$$E' = |1.40, 0.75, 0, 1|$$

$$F' = |0.82, 1.16, 0, 1|$$

$$G' = |0, 0.87, 0, 1|$$

Se voce plotar esses pontos em um sistema de eixos x-y e uni-los por linhas retas, obterá o desenho do cubo como visto por essas projeções.

Para uma projeção **isométrica**, por definição todos os vetores unitários deverão sofrer a mesma variação de comprimento ou seja $|U'_x| = |U'_y| = |U'_z|$

Assim tem-se uma outra equação além da anterior: $\cos^2\beta + \text{sen}^2\beta\text{sen}^2\alpha = \cos^2\alpha$ (1) a ser satisfeita, está será obtida considerando a transformação por $M(\beta_{em\ y}, \alpha_{em\ x})$ de um vetor unitário em z:

$$U'_z = |0, 0, 1, 1| \begin{vmatrix} \cos\beta & \text{sen}\beta\text{sen}\alpha & -\text{sen}\beta\text{cos}\alpha & 0 \\ 0 & \text{cos}\alpha & \text{sen}\alpha & 0 \\ \text{sen}\beta & -\text{sen}\alpha\text{cos}\beta & \text{cos}\beta\text{cos}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$U'_z = |\text{sen}\beta - \text{sen}\alpha, \cos\beta, 0, 1|$$

este vetor terá comprimento: $|U'_z| = \text{sen}^2\beta + \text{sen}^2\alpha \cos^2\beta$

e por definição deve ser o mesmo comprimento dos demais vetores unitários:

$$|U'_z| = |U'_y| \rightarrow \text{sen}^2\beta + \text{sen}^2\alpha\cos^2\beta = \cos^2\alpha \quad (2)$$

desenvolvendo (2) como anteriormente, tem-se:

$$\text{sen}^2\beta = \frac{1 - 2\text{sen}^2\alpha}{1 - \text{sen}^2\alpha} \quad (B)$$

igualando as equações (A) e (B) obtém-se: $\cos\alpha = \sqrt{6}/3 \approx 35,26^\circ$
substituindo em (A):

$$\text{sen}^2\beta = \frac{1/3}{1 - 1/3} = \frac{1}{2} \rightarrow \beta = 45^\circ$$

logo para projeções isométricas, a matriz será:

$$M(\text{isometrica}) = \begin{vmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{6}/6 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6}/3 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{6}/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.707 & 0.408 & 0 & 0 \\ 0 & 0.817 & 0 & 0 \\ 0.707 & -0.408 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Por exemplo, o cubo anterior seria descrito pelas coordenadas:

$$A' = |0.707, -0.408, 0, 1|$$

$$B' = |1.414, 0, 0, 1|$$

$$C' = |0.707, 0.408, 0, 1|$$

$$D' = |0.707, 0.408, 0, 1|$$

$$E' = |1.414, 0.817, 0, 1|$$

$$F' = |0.707, 1.225, 0, 1|$$

$$G' = |0, 0.817, 0, 1|$$

Desenhe o cubo depois de transformado por projeção isométrica.

Projeções oblíquas:

Nestas projeções os raios projetores não estão em ângulo reto com o plano de projeção.

Se for considerada a projeção no plano $z = 0$, um vetor unitário na direção z , $|0, 0, 1, 1|$, não será mais projetado em $|0, 0, 0, 1|$ e sim em um ponto $|P_x, P_y, 0, 1|$ dependendo da direção dos raios projetores.

Assim a matriz de transformação será:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ P_x & P_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

O usuário deve então especificar algo além da inclinação dos raios projetores com o plano de projeção. Esse dado a mais pode ser, por exemplo, para que ponto deseja-se projetar o vetor unitário, isso é: (P_x, P_y) , ou especificamente l e α , onde l é o comprimento do terceiro eixo e α é o ângulo que este eixo faz com a horizontal. As duas formas são equivalentes.

Supondo que o ponto $(0, 0, 1)$ seja projetado em $(P_x, P_y, 0)$ isso é o mesmo que projetar esse ponto em $(l \cos \alpha, l \sin \alpha, 0)$.

As principais projeções oblíquas são: cavalier e cabinet. Na projeção **cavalier**, o ângulo entre as linhas de projeção e o plano de projeção, (ρ) , deve ser 45° , logo $l = 1$. Assim, $\rho = 45^\circ \rightarrow l = 1$ (não há encurtamento). O ângulo α neste caso pode ser qualquer.

Mas em desenho técnico α é geralmente $\pm 30^\circ$ ou $\pm 45^\circ$. Com esses dados é contruída a matriz. Por exemplo para $\alpha = 45^\circ$ tem-se

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Na projeção **cabinet** o encurtamento do eixo deve ser de 50% : $l = 1/2$. Assim:

$$\tan \rho = \frac{1}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2}} = \frac{1}{1/2} = 2$$

$$\rho = \arctan 2 \approx 63,4^\circ$$

o ângulo α novamente pode ser qualquer, assim se $\alpha = 45^\circ$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}/4 & \sqrt{2}/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

O cubo do exemplo anterior, transformado por esta projeção, teria coordenadas:

$$A' = [0.7, 0.7, 0, 1]$$

$$B' = [1.7, 0.7, 0, 1]$$

$$C' = [1, 0, 0, 1]$$

$$D' = [0.7, 1.7, 0, 1]$$

$$E' = [1.7, 1.7, 0, 1]$$

$$F' = [1, 1, 0, 1]$$

$$G' = [0, 1, 0, 1]$$

Desenhe o cubo como visto por essa projeção.

Perspectivas:

As **perspectivas** se caracterizam pelo número de centros de projeção e suas posições.

Supondo uma projeção no plano $z = 0$ com centro de projeção $(0, 0, V_z, 1)$, a projeção perspectiva do ponto $P[x, y, z, 1]$ será o ponto $P'[x', y', 0, 1]$ dado pela interseção das retas que passam pelo centro de projeção $(0, 0, V_z, 1)$, com o plano $z = 0$.

A pergunta é: que matriz $M_{(persp.)}$ é tal que projeta P em P' , ou seja que M faz: $P' = P.M_{(persp.)}$? Pela seção 5.5, chega-se a:

$$\left| x, y, 0, \frac{-z}{V_z} + 1 \right| = \left| x, y, z, 1 \right| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{V_z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Assim, um ponto situado em sobre o eixo z por exemplo: $[0, 0, 1, 1]$ (ou qualquer outro $[0, 0, z, 1]$, desde que $z \neq V_z$) será levado a (se a matriz perspectiva for aplicada sem a projeção no plano $z = 0$)

$$\left| 0, 0, 0, 1 - \frac{1}{V_z} \right|$$

Repare que esse ponto é a origem do sistema de eixos.

Já os pontos no mesmo plano do eixo de projeção $[x, y, V_z, 1]$, serão levados a

$$|\infty, \infty, 0, 1| = \mathbf{infinito!}$$

Note ainda que um ponto projetado no infinito sobre o eixo z , $[0, 0, 1, 0]$, será transformado no ponto: $[0, 0, -V_z, 1]$.

Como retas paralelas ao eixo z se encontram no “infinito” na direção z , e as retas paralelas ao eixo z , se encontram depois de projetadas, no ponto $[0, 0, -V_z, 1]$. Este ponto é chamado **ponto de fuga**. Isto significa que todo o domínio positivo do eixo z ($0 \leq z \leq \infty$) é projetado no domínio finito ($0 \leq z^* \leq -V_z$).

Da mesma maneira pode-se ter perspectivas com **pontos de fuga sobre o eixo x ou y**, (e depois projetadas para qualquer plano). Esses serão dados respectivamente por:

$$\begin{vmatrix} 1 & & -1/V_x \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \\ & & & 1 \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} 1 & & 1 \\ & 1 & -1/V_y \\ & & 1 \\ & & & 1 \end{vmatrix}$$

Nessas matrizes lugares em branco correspondem a valores iguais a zero.

Se quisermos que o centro de projeção (correspondente ao eixo z) esteja numa posição qualquer: $[V_x, V_y, V_z, 1]$ então:

1º translada-se o ponto para a origem;

2º usa-se $M_{persp.}$;

3º translada-se de volta a $(V_x, V_y, V_z, 1)$.

A matriz de projeção será a resultante do produto:

$$P' = P \left| \begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/V_z & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -V_x & -V_y & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & V_x & V_y & 0 & 1 \end{array} \right|$$

ou seja a matriz para uma projeção no plano $z = 0$, e um ponto de fuga, de coordenada $[V_x, V_y, V_z]$ será:

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{V_x}{V_z} & -\frac{V_y}{V_z} & 0 & -\frac{1}{V_z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

O cubo do exemplo inicial, se visto do ponto $[0, 0, V_z]$ (centro de projeção em : $[0, 0, V_z, 1]$) será levado a:

$$\begin{aligned} A' &= [0, 0, 0, 1 - \frac{1}{V_z}] \\ B' &= [1, 0, 0, 1 - \frac{1}{V_z}] \\ C' &= [1, 0, 0, 1] \\ D' &= [0, 1, 0, 1 - \frac{1}{V_z}] \\ E' &= [1, 1, 0, 1 - \frac{1}{V_z}] \\ F' &= [1, 1, 0, 1] \\ G' &= [0, 1, 0, 1] \end{aligned}$$

Assim linhas que eram originalmente paralelas a z parecerão agora passar pelo ponto: $[0, 0, -V_z, 1]$. Este ponto é chamado de ponto de fuga ou “**vanishing point**”.

Exemplificando, se $V_z = [1/2 \ 1/2 \ 2]$

$$M_{persp.} \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

e o cubo inicial terá coordenadas:

$$\begin{aligned} A' &= [-1/4 ; -1/4 ; 0 ; 1/2] \\ B' &= [3/4 ; -1/4 ; 0 ; 1/2] \\ C' &= [1 ; 0 ; 0 ; 1] \\ D' &= [-1/4 ; 3/4 ; 0 ; 1/2] \\ E' &= [3/4 ; 3/4 ; 0 ; 1/2] \\ F' &= [1 ; 1 ; 0 ; 1] \\ G' &= [0 ; 1 ; 0 ; 1] \end{aligned}$$

Desenhe o cubo!

De maneira semelhante tem-se perspectivas com um ponto de fuga sobre **eixo x** ou sobre o **y** e coordenadas $[V_x, V_y, V_z]$.

Para perspectivas com **dois pontos de fuga**, por exemplo para pontos de fuga em $[-V_x, 0, 0]$ $[0, -V_y, 0]$, tem-se:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{V_x} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{V_y} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Para perspectivas com **3 pontos de fuga**, por exemplo para pontos de fuga em $[-V_x, 0, 0]$, $[0, -V_y, 0]$ e $[0, 0, -V_z, 0]$ tem-se:

$$\begin{vmatrix} 1 & & & -1/V_x \\ & 1 & & -1/V_y \\ & & 1 & -1/V_z \\ & & & 1 \end{vmatrix}$$

Obs.:

- 1- Nas matrizes acima não ocorreu ainda a projeção em qualquer plano.
- 2- A transformação perspectiva não leva $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ pois as retas paralelas não são projetadas em retas paralelas. (\mathcal{E} = espaço Euclidiano).

5.7 - Características das Matrizes de Transformações em Coordenadas Homogêneas

Todas as transformações e projeções podem ser representas por uma única matriz obtida da concatenação de todos os efeitos a que o objeto estiver submetido.

A matriz final pode ser dividido em 4 submatrizes.

$$\begin{bmatrix} PER & Persp \\ 3 \times 3 & 3 \times 1 \\ T & EG \\ 1 \times 3 & 1 \times 1 \end{bmatrix}$$

As letras querem dizer que efeito cada partição representa.

PER – é responsável pelas projeções paralelas, mudanças de escala e rotações,

T – é responsável pelas translações,

Persp – é responsável pelas perspectivas,

EG – é responsável pela transformação global de escala.

5.8 - Coordenadas esféricas e cilíndricas

Os pontos em 3-D podem ser representados por outros tipos de coordenadas além das **coordenadas retangulares**, como por exemplo as **coordenadas esféricas** e as **cilíndricas**.

Nas coordenadas cilíndricas ao invés de 3 posições usa-se a distância do ponto ao centro, ou **raio**, um ângulo e uma altura **h**. O raio e o ângulo com o eixo x formam um sistema 2D de coordenadas polares. Se a altura for na direção do eixo z , um ponto será descrito como: (R, θ, h) .

Assim os sistemas de coordenadas cartesianos e cilíndricos se relacionam por:

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \\ z = h \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} R = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1}(y/x) \\ h = z \end{cases}$$

Nas coordenadas esféricas ao invés de 3 posições usa-se a distância do ponto ao centro, ou **raio**, e dois ângulos: o ângulo com o eixo x e o ângulo com o eixo z . Um ponto será descrito como: (R, θ, ϕ) . Esse sistema de coordenadas se relaciona com o cartesiano por:

$$\begin{cases} x = R \sin \phi \cos \theta \\ y = R \sin \phi \sin \theta \\ z = R \cos \phi \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \tan^{-1}(y/x) \\ \phi = \cos^{-1}(z/R) \end{cases}$$

Por exemplo, o mesmo ponto do espaço pode ser descrito como: $(4, 2, 3)$ ou $(5.43, 27^\circ, 56^\circ)$.

Bibliografia:

- (1) Yvon Gardan, Mathematics and CAD, Vol.1: Numerical Methods for CAD. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1986.
- (2) Steven Harrington, Computer Graphics: a programming approach, 2nd edition, McGraw-Hill, 1988
- (3) J.D.Foley, A. van Dam, S.K. Feiner, J.F. Hughes. Computer Graphics- Principles and Practice, Addison-Wesley, 1990.
- (4) Vera B. Anand, Computer Graphics and Geometric Modeling, John-Wiley, 1993.
- (5) Alan H. Watt, Fabio Policarpo, The Computer Image, Addison-Wesley Pub Co (Net), 1998.