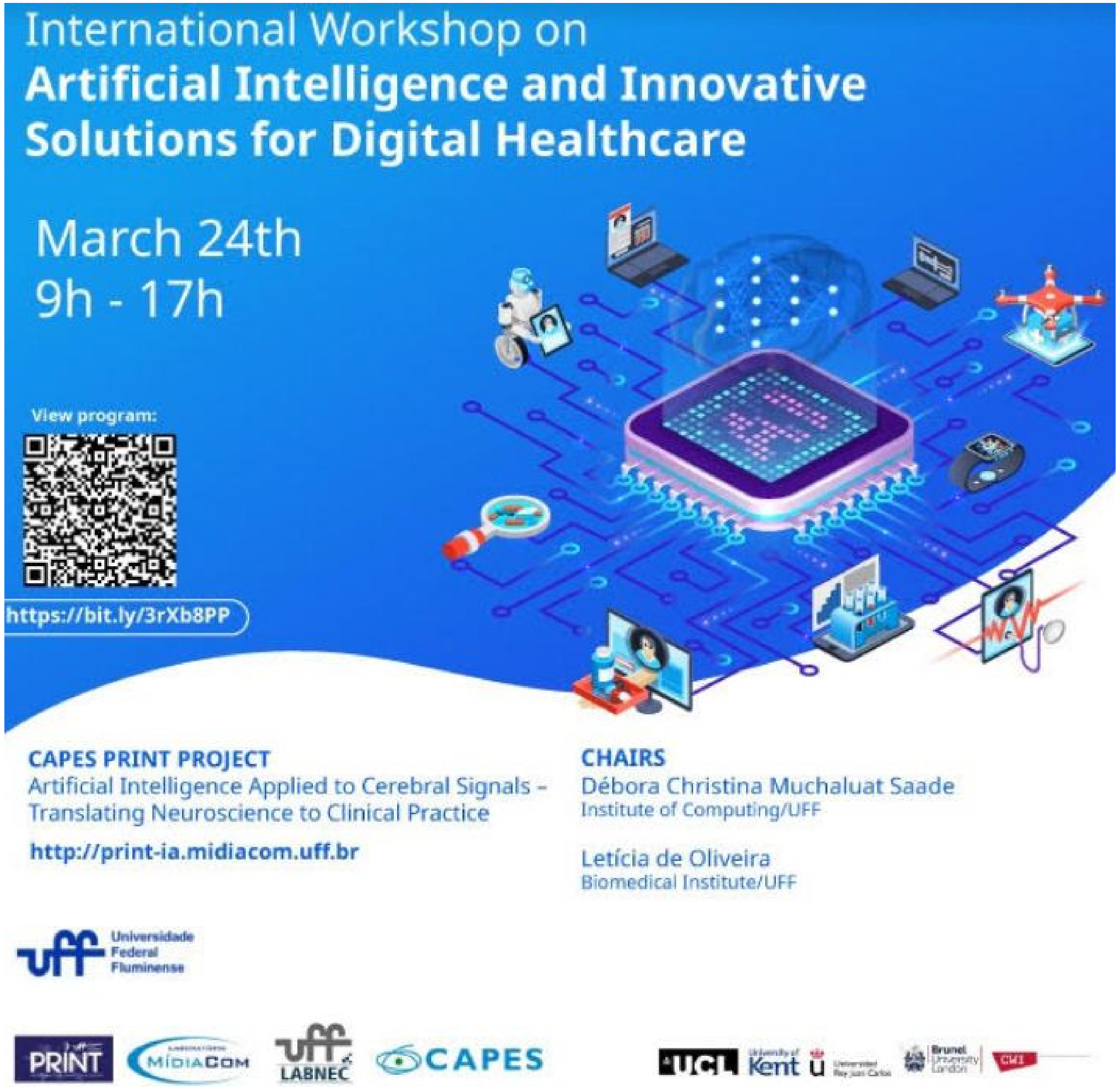
Morfologia Matemática Binária

Conceitos fundamentais

(Pontos básicos para dominar a área!

E

O trabalho 3 !!)



Morfologia Matemática Binária

–

- •Imagem como conjunto de pontos.
- •Complemento, Reflexão, União, Interseção, Subtração, Soma vetorial, Diferença vetorial, Translação.
- •Expansão x Encolhimento
- •Erosão x Dilatação
- •Operações Combinadas

Bases:

- **Formas** das estruturas presentes nas imagens sob as mais variadas representações possíveis.

- Construindo a teoria partir do zero usando apenas **noções básicas de conjuntos**.

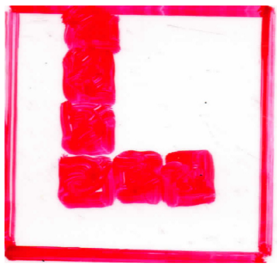
- Então como "ver" uma **imagem como conjunto**? ***I = { i1 , i2 , i3 , ...}***

$$I = \{ i_1 , i_2 , i_3 \; ..... \; i_n \}$$

Então como ver uma **imagem** I **como conjunto**?

Que tal pensar em um **conjunto de pontos acessos na tela?**

$$I = \{ i_1 , i_2 , i_3 \; ..... \; i_n \}$$



E para **armazená-la ??**

Que tal só anotar onde tem **pixel ligado**?

Assim teremos uma imagem representada como
um **conjunto de pontos** i da imagem.

$$I = \{ i_1 , i_2 , i_3 \; ..... \; i_n \}$$

Então podemos ver uma **imagem** I **como conjunto** de pontos acessos !

E armazená-la anotando onde tem **pixel ligado**.

Assim teremos um **conjunto de pontos** i = imagem.

Mas precisamos **organizar** as coisas para **reproduzir** essa representação!

Ou seja:
primeiro usa-se um **sistema de coordenadas** para caracterizar as posições

$I = \{\ i_1\ , i_2\ , i_3\ \ .....\ \ i_n \}$

$I = \{\ i1\ ,\ i2\ ,\ i3\ ,\ i4\ ,\ i5\ ,\ i6\ \}$

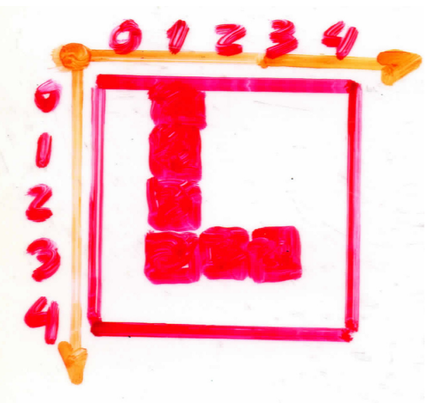
$= \{ (\text{linha}, \text{coluna}) \neq 0 \} = I$

Precisamos **organizar** as coisas para reproduzir a representação!

E vamos usar um **sistema de coordenadas** para caracterizar as posições

Atenção:
As coordenadas em **imagens** costumam ter as **orientações diferentes** das
Usadas em matemática! (como na figura abaixo).

Pixel ligado significa pixel com **valor diferente de zero**!



$I = \{ \ i1 \ , i2 \ , i3 \ldots i6 \}$ $= \{ (\text{linha}, \text{coluna}) \neq 0 \} = I$

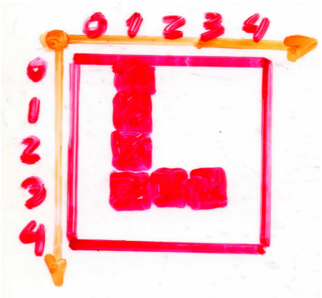
$I = \{ \ i_1 , i_2 \ , i_3 \ \ldots.. \ \ i_n \}$

Agora teremos um **conjunto de pontos** ***i*** da imagem perfeitamente identificado de **maneira única** pelas suas posições!

$$I = \{\ i_1 , i_2 , i_3 \ ..... \ i_n \}$$

Teremos tantos pixeis ligados quanto elementos do conjunto!

O número de elementos de um conjunto se chama de CARDINALIDADE DO CONJUNTO



$$= \{ (\text{linha}, \text{coluna}) \neq 0 \} = I$$

$$= \{ \underbrace{(0,1)}_{i_1} ; \underbrace{(1,1)}_{i_2} ; \underbrace{(2,1)}_{i_3} ; \underbrace{(3,1)}_{i_4} ; \underbrace{(3,2)}_{i_5} ; \underbrace{(3,3)}_{i_6} \}$$

Super simples, não?

- Então, vamos a primeira pergunta desta **nossa nota 3** ....

- Atenção ....

- Qual a cardinalidade do conjunto ***L*** anterior?

$I = \{ \ i_1 , i_2 \ , i_3 \ \ ..... \ \ i_n \}$

Faça o mesmo com a **Inicial do seu nome**!

- Usando um papel quadriculado como **background** (ou tela) , desenhe usando pixels **suas iniciais** , e as descreva como conjunto de pontos, mesmo! **!**

- Qual a cardinalidade deste conjunto? (**suas iniciais)**

$$I = \{\ i_1 , i_2 , i_3 \ \ldots\ldots \ i_n\}$$

Valendo ponto: com a **Inicial do seu nome**!

- Desenhe usando pixels **sua inicial** , e a descreva como conjunto de pontos, agora mesmo! **Já!** $I = \{ i_1 , i_2 , i_3 \; ..... \; i_n \}$

- Qual a cardinalidade deste conjunto? *n*

- Repare que voce pode transferir essa imagem de um ponto a outro do universo, agora muito facilmente como um texto!

- Transfira ela a um colega, e veja se ele descobre a inicial do seu nome!

- Quem acertou a representação!!

A partir desta brincadeira temos tudo em MM!!!

- Agora voce já internalizou o fundamento básico da MM!

- Só falta iniciar a sua cabeça para pensar em como usá-lo para tudo!!

- Isso será feito a partir de apenas operações de conjuntos, de mais 5 operações e seu célebro!

operações de conjuntos

- conjunto de pontos = imagens
  - Complemento,
  - Reflexão,
  - União,
  - Interseção,
  - Subtração,
  - Soma vetorial,
  - Diferença vetorial
  - Translação
- Operações Combinadas

operações de conjuntos

$I = \{ i_1 , i_2 , i_3 \; ..... \; i_n \}$

Complemento $\bar{I}$:

Troca dos pixels
1 por 0
em relação
a um universo.

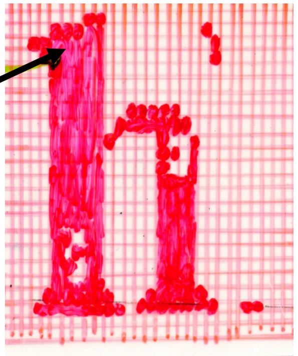
Algumas operações de conjunto

- São definidas em relação ao Universo : U
- E ele precisa estar bem descrito e claro no seu contexto!

Inversa

- **Inversão** de uma imagem pode ser visto como trocar os seus 0 por 1 (e vice versa) .

- Os pixeis do **fundo = 0**
- Os pixeis da **imagem** = 1!!!



Foreground (**imagem**)

≠

background (ou tela) = Domínio da Imagem ou conjunto Universo , ou conjunto subjacente : ***U***

Mas em conjuntos isso se chama **complemento**

Em relação ao Domínio da Imagem ou conjunto Universo , ou conjunto subjacente : ***U***

Pode-se ter muitas imagens em um Universo: ***U***

$$\boldsymbol{A, B, \ldots., I, \ldots X}$$

$$\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots.. A_i, \ldots..A_n}$$

$$\boldsymbol{I_1, I_2, \ldots.. I_i, \ldots..I_n}$$

$$\ldots.. \quad \ldots..$$

$$\boldsymbol{X_1, X_2, \ldots.. X_i, \ldots..X_n}$$

- **Todas podem ser descritas e armazenadas de mesma maneira**

- Mas umas são ***especiais (chamadas em MM de ELEMENTOS ESTRUTURANTES)*** pois elas vão ser ***operadas em outras,*** e dependendo de como forem pode-se ***ter efeitos especificos!***

operações de conjuntos:

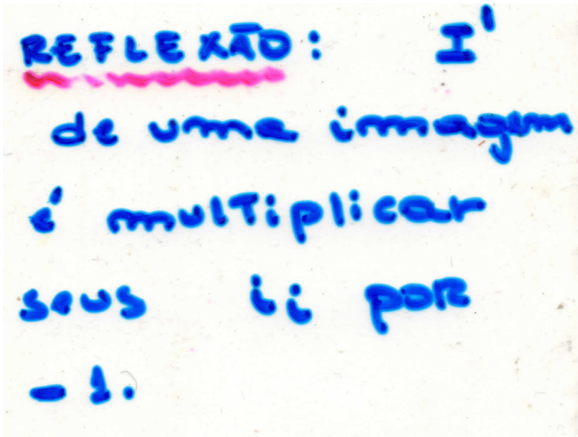
Complemento $\bar{A}$, $\bar{I}$

- Qual o complemento de sua inicial?
- Qual a cardinalidade deste novo conjunto?

$\bar{I} = \{ i_1 , i_2 , i_3 \; ..... \; i_n \}$ **, o *n* é o mesmo?**

operações de conjuntos:

Reflexão : I'



$I = \{ i_1 , i_2 , i_3 \; ..... \; i_n \}$

Repare que aqui, em outro nivel voce, precisaria se preocupar com o que seria Visivel em seu video, mas isso (repetindo) está em outro nivel de abstração. E a idea é entender cada operção a seu tempo.

operações de conjuntos:

Reflexão

- Qual o Reflexão de sua inicial?
- Qual a **cardinalidade** deste novo conjunto?

$$I' = \{ -i_1 , -i_2 , -i_3 \; ..... \; -i_n \}$$

operações de conjuntos:

Interseção $\cap$

- Para essa se usam dois conjuntos: A e X (por exemplo)

INTERSEÇÃO da imagem binária A e X, $A \cap X$, é a imagem binária com 1 em todos os pixels p que forem 1 em ambas A e X.

$$A \cap X = \{ p \mid p \in A \text{ e } p \in X \}$$

Lembrando notação de conjuntos:

- | = tal que
- ∩ = interseção
- ϵ = pertence (e não pertence ∉)
- C = contido (ou   contém se invertido)
- U = união
- \- ou / = subtração de conjuntos
- \+ , - = soma ou subtração vetorial

- Faça a **União e a Interseção** da sua inicial com a de seu colega!
- Qual a **cardinalidade** destes novos conjuntos?

operações de conjuntos:

União $\cup$

- Para essa também se usam dois conjuntos:

A e X (por exemplo)

UNIÃO DE A e X, A∪X, é A IMAGEM COM 1 EM TODOS OS PIXELS QUE FOREM 1 EM A, OU 1 EM X, OU EM AMBOS. (A e X)

$$A \cup X = \{ p \mid p \in A \text{ ou } p \in X \}$$

Essas operações podem ser feitas na lista de pontos sem voce ver as images!

- Assim o computador pode fazer o mesmo que você quando está olhando os conjuntos!
- Mas ele usa a lista de pontos!
- Faça a **União e a Interseção** da sua inicial com a de seu colega como seu computador faria!
- **Faça a reflexão** como seu computador faria!
- **Deu o mesmo resultado?**

Subtração de conjuntos = Subtração de imagens

- Considere dois conjuntos ***A*** e ***X***

(ou duas imagens)

A SUBTRAÇÃO DE A POR X, A-X, É O CONJUNTO DOS PIXELS QUE SÃO 1 E A MAS NÃO SÃO 1 EM X.

$$A - X = \{ p \mid p \in A \text{ e } p \notin X \}$$

Subtração de imagens em MM

- Obs.:
  - não existe em matematica a soma de dois conjuntos, ***A*** e ***X*** (embora em AI exista a soma de imagens) .

- O simbolo / é preferivel ao - , pois existe a operação de diferença vetorial que tambem usa esse simbolo e, as vezes, pode ficar dubio , a qual se está referindo.

- Mas usa-se também a convenção de conjuntos e elementos de matematica: Conjunto sempre é referido com MAIUSCULAS , *I*, e elementos de conjuntos com minusculas , *i* .
  - Vc deve ter notado a diferença entre *I e i*, e todos os demais até agora, por exemplo....

Subtraia agora 2 imagens

(sua inicial e a de seu colega)

- Considerando só a lista de pontos , isto é (= i.e.) como o computador faria!

- Faça isso olhando as imagens!

- Construa a lista de pontos = ao resultado do computador!
- Como ficou o resultado?
- Qual a **cardinalidade** deste novo conjunto?

Soma e diferença vetorial

SOMA VETORIAL DE UM PIXEL p DE ÍNDICES (i, j) COM O PIXEL q DE ÍNDICES (k, l) É O PIXEL $p \pm q$ COM ÍNDICES $(i \pm k, j \pm l)$

Vc deve ter notado que agora se descreve em “minusculas” adefinição acima, logo passamos a nivel de elementos fo conjunto ou de pixeis agora....

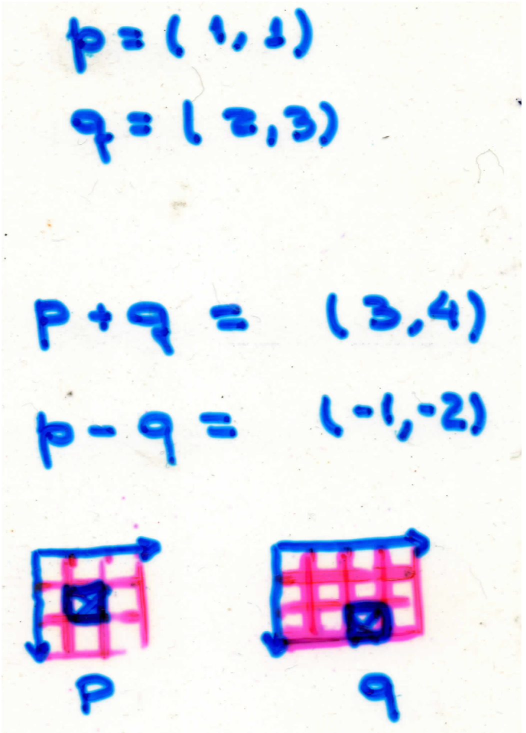
Soma e diferença vetorial

DIFERENÇA VETORIAL DE $p-q$ É O PIXEL COM ÍNDICES $(i-k, j-l)$

Soma e diferença vetorial (de pixels em imagens e MM)

- Obs : pixeis ou pixels?

- Seja os pixels:



Ok em conjuntos, mas para que serve essas 2 últimas em imagens?

- Considere que voce queira transladar ***A*** e ***X*** (as imagens que está brincando até aqui) **.**

translação de imagens em MM

- Considere o conjunto ***A*** (imagem) e um vetor de translação representado por **p**

TRANSLAÇÃO. SE A É UMA IMAGEM BINÁRIA E p FOR UM PIXEL, ENTÃO A TRANSLAÇÃO DE A POR p É A IMAGEM DADA POR:

$$A_p = \{a + p \mid a \in A\}$$

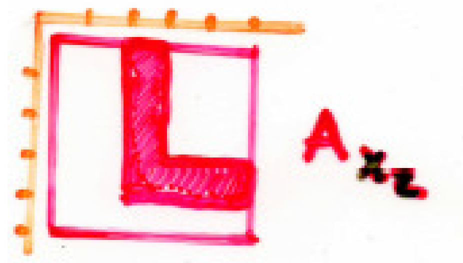
Considere o conjunto ***A*** (a imagem ***L*** inicial)
e o vetor de translação representado pelo
segundo pixel de ***X1*** ou x_2

$$= \{\underbrace{(0,1)}_{i_1};\ \underbrace{(1,1)}_{i_2};\ \underbrace{(2,1)}_{i_3};\ \underbrace{(3,1)}_{i_4};\ \underbrace{(3,2)}_{i_5};\ \underbrace{(3,3)}_{i_6}\}$$

X1 =  $= \{\underbrace{(0,0)}_{x_1},\ \underbrace{(0,1)}_{x_2}\}$

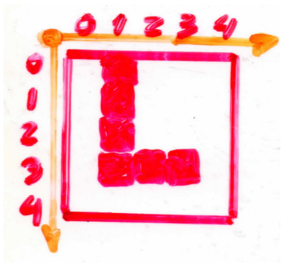
Como fica o conjunto A_{x_2} ?

$$A_{x_2} = \{(0,2), (1,2), (2,2), (3,2), (3,3), (3,4)\}$$



Conjunto ***A*** (a imagem ***L*** inicial) e o vetor de translação = segundo pixel de ***X1*** ou ***x2***

Como fica o conjunto A_{x1} ?



$$= \{\underbrace{(0,1)}_{i_1}; \underbrace{(1,1)}_{i_2}; \underbrace{(2,1)}_{i_3}; \underbrace{(3,1)}_{i_4}; \underbrace{(3,2)}_{i_5}; \underbrace{(3,3)}_{i_6}\}$$

Fim
das operações em conjunto!

Complemento,
Reflexão,
União,
Interseção,
Subtração,
Soma vetorial,
Diferença vetorial
Translação

Qual delas **é comutativa**? (i.e. a ordem não afeta o resultado)
O que ocorre com cada uma delas se voce **repetir** a mesma operação uma segunda vez?

- Qual a **cardinalidade** de um conjunto transladado, e depois da soma vetorial?

Operações em conjuntos = Operações em imagens

- Muito simples até aqui e as outras de imagens?

- Elas são basicamente ainda mais fáceis

pois são:
  - ainda mais intuitivas
  - e só são mais umas poucas !!!

Em imagens, a MM

Considera operações simples e suas combinações definidas por um ser pensante (você) e executadas em suas imagens até por uma máquina programada por voce !

Isso será feito a partir apenas de mais 6 operações e célebro!

- Expansão x Encolhimento
- Erosão x Dilatação
- Esqueletização e “Divisor de águas” (whatershed)

Expanção

- Ponha o valor do pixel da imagem para 1 se algum vizinho dele for 1

(Mas isso é *mole* demais!!!!
qualquer um faz esse algoritmo, não?

Expanção= Ponha o valor do pixel da imagem para 1 se algum vizinho dele for 1

Usando um papel quadriculado como **background** (ou tela) , expanda sua inicial e a do seu colega, e as descreva como conjunto de pontos, agora mesmo!!

- Vc acertou !!

Encolhimento

- Ponha o valor do pixel 1 da imagem para 0 se algum vizinho dele for 0

(Mas isso é mais ***mole*** ainda ! ! ! !
qualquer um que nem fazia o algoritmo
anterior agora faz esse, não?)

Encolhimento = Ponha o valor do pixel da imagem para 0 se algum vizinho dele for 0

Usando um papel quadriculado como **background** (ou tela) , encolha sua inicial e a do seu colega, e as descreva como conjunto de pontos, agora mesmo!!

- Quem acertou !!

Voce já deve ter muitos pontos !!!

Mas agora voltando a teoria.

- A MM é não linear!

Você lembra de tudo o que significa isso?

Uma das consequencias é que:

- As **operações da MM não tem inversa**!!!

- E isso é uma enorme vantagem se voce tirar proveito do caso.

Inversa?

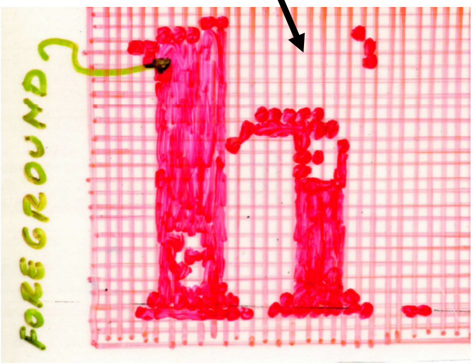
- **Inversão** pode ser visto de diversas maneiras.

- Uma das coisas é que a idéia de **fundo** e **imagem** pode ser invertida!!!

Foreground (**imagem**)

≠

background (ou tela)



Com essa Inversa

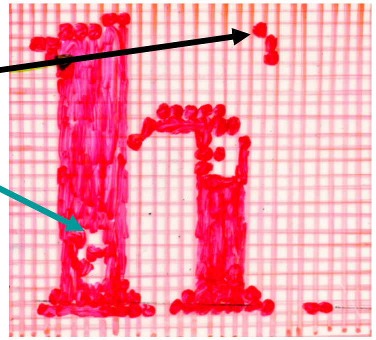
- **O encolhimento** pode ser visto de como **a expanção** do fundo.

Como a sua **imagem** pode ser invertida!!!

- **A expanção** pode ser vista de como o **encolhimento** do fundo.

Aplicações

- Retirar falhas (ou buracos indesejaveis) nas imagens



- Remover ruidos (pixeis indesejaveis pertencentes a imagem)
- Aplicações sucessivas e iterativas

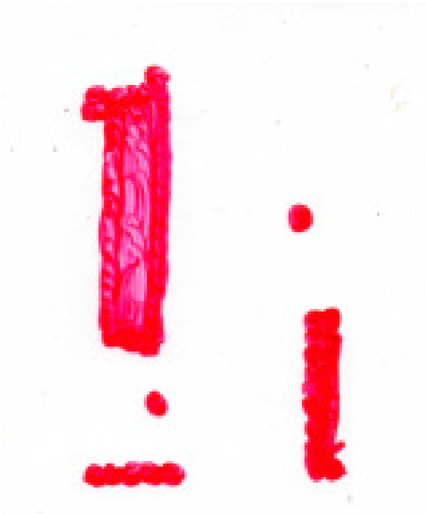
Aplicações

- Remover buracos

- Aplicações sucessivas

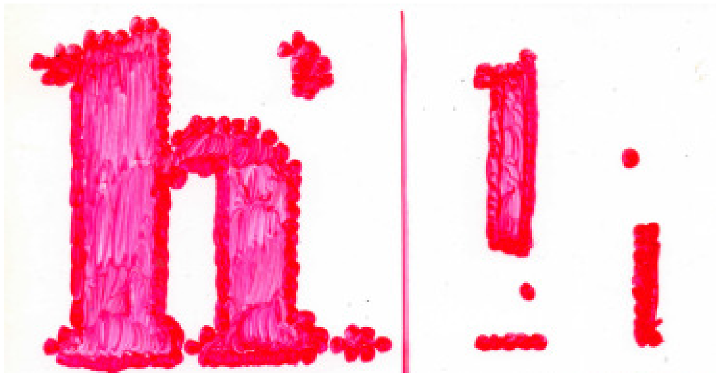
Aplicações

- Remover ruidos
- Aplicações sucessivas



Aplicações

- Remover defeitos



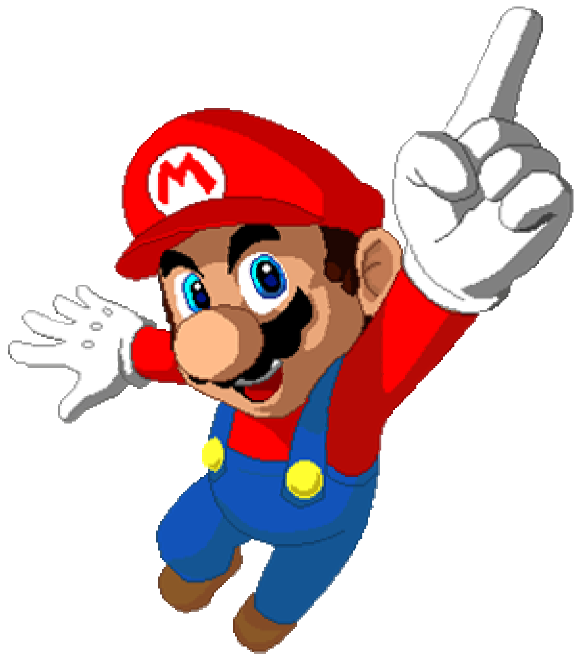
- Aplicações sucessivas

encolhimento seguido de **expanção**

≠

expanção seguido de **encolhimento**

Aplicações



- Retirar falhas
- Remover ruidos

- No desenho de **suas iniciais** inclua falhas, e as descreva, e tambem como poderia retirá-las usando os 2 algoritmos que já fora desenvolvidos.
- Se seu colega conseguir reproduzir tudo isso na sua descrisão voce ganha ponto pelo seu algoritmo**!**

Voce já deve ter muitos pontos !!!

- Como ficaram a **cardinalidade** dos novos conjuntos?

Pode-se ter muitas imagens em um Universo: ***U***

$$A,\ B,\ ....,\ I\ ,\ ...X$$
$$A_1,\ A_2,\ .....\ A_i,\ .....A_n$$
$$I_1,\ I_2,\ .....\ I_i,\ .....I_n$$
$$.....\quad .....$$
$$X_1,\ X_2,\ .....\ X_i,\ .....X_n$$

- **Todas podem ser descritas e armazenadas de mesma maneira**

- Mas as *especiais, que* vão ser *operadas em outras, são chamadas* de
  ELEMENTOS ESTRUTURANTES

ELEMENTO ESTRUTURANTE : E

É O CONJUNTO COM O QUAL A IMAGEM SERÁ OPERADA.

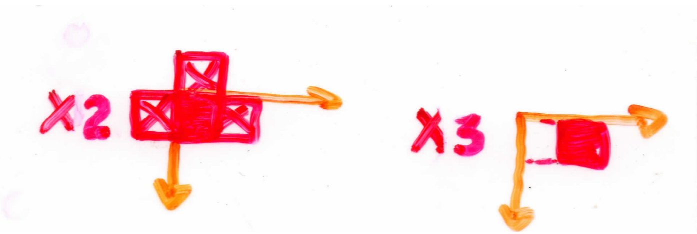
$X1 =$  $= \{ \underbrace{(0,0)}_{x_1}, \underbrace{(0,1)}_{x_2} \}$

A ORIGEM DO ELEMENTO ESTRUTURANTE É OPERADO COM CADA PONTO NÃO ZERO DA IMAGEM.

ELEMENTO ESTRUTURANTE : é uma imagem

SUA ORIGEM DEVE SER DEFINIDA DE ALGUMA MANEIRA precisa!

Voce reconhece o que seria o centro destes elementos abaixo:



Mas liberdade é a chave da MM

- Assim não precisa ser **o centro descrito sempre desta maneira**, desde que, de alguma forma seja claro onde ele está!

- Se o EE for simétrico , inclusive geralmente se toma o ponto de simetria , ou dupla simetria como centro!

EE entendido!!

- Mas e em que **operações** ele entra?

- Inicialmente qualquer operação entre conjuntos, como as que já vimos:
  (já que ele é um conjunto)

Mas nas **duas novas** a seguir **ele é essencial**

Erosão
Dilatação

Dilatação

$$A \oplus X = \bigcup_{x_i \in X} A_{x_i}$$

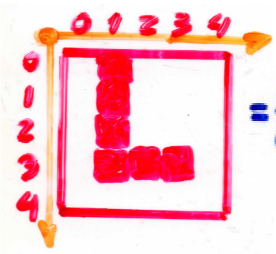
Se $I_{x_1}, I_{x_2}, \dots I_{x_m}$ forem as TRANSLAÇÕES DA IMAGEM I pelos pixels 1 de IMAGEM $X = \{x_1, x_2, \dots x_m\}$, ENTÃO A UNIÃO DESSAS TRANSLAÇÕES É CHAMADA DE DILATAÇÃO DE $A = I$ POR X:

$$A \oplus X = \bigcup_{x_i \in X} A_{x_i}$$

Dilatação de *A* por *X* :

$$A \oplus X = \bigcup_{x_i \in X} A_{x_i}$$

por exemplo se $A = I$ e $X = X_1$

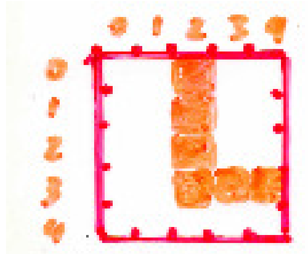


$$= \{ \underbrace{(0,1)}_{i_1} ; \underbrace{(1,1)}_{i_2} ; \underbrace{(2,1)}_{i_3} ; \underbrace{(3,1)}_{i_4} ; \underbrace{(3,2)}_{i_5} ; \underbrace{(3,3)}_{i_6} \}$$

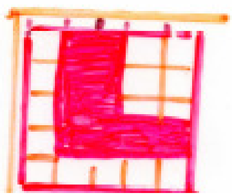
$X_1 =$  $= \{ \underbrace{(0,0)}_{x_1} , \underbrace{(0,1)}_{x_2} \}$

$$A \oplus X = A_{x_2} \cup A_{x_1}$$

$$A_{x_2} = \{ (0,2), (1,2), (2,2), (3,2), (3,3), (3,4) \}$$



$A_{x_1} = A$

$A \oplus X =$ 

A Dilatação é comutativa

$$A \oplus X = X \oplus A$$

A Dilatação é associativa

$$A \oplus (X1 \oplus X2) = (A \oplus X1) \oplus X2$$

Voce reconhecer essas propriedades faz seus projeto serem eficientes e serem de um ser **pensante** não de uma maquina repetitiva e obediente!

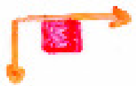
Mas voce pode incluir isso (**propriedades**) em seus algoritmos também!

Propriedades da dilatação:

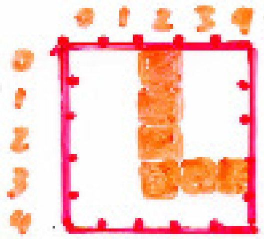
- Se X só tem um pixel, então a dilatação se transforma em uma translação !
- Sua cardinalidade não será afetada!

Se $A = L$ e $X = X3$, $A \oplus X = ?$

$X_3 = \{(0,1)\}$



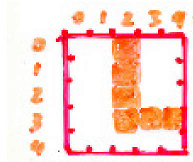
$= \{\underbrace{(0,1)}_{i_1};\ \underbrace{(1,1)}_{i_2};\ \underbrace{(2,1)}_{i_3};\ \underbrace{(3,1)}_{i_4};\ \underbrace{(3,2)}_{i_5};\ \underbrace{(3,3)}_{i_6}\}$

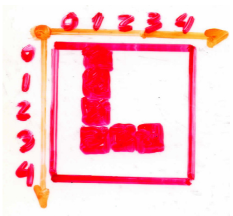


$A \oplus X = A_{p=(0,1)} = \{(0,2), (1,2), (2,2), (3,2), (3,3), (3,4)\}$

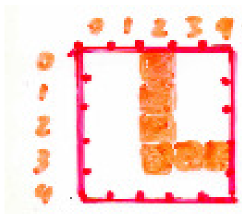
Propriedades da dilatação:

- Pode-se aproveitar operações anterioires se seu X for se transformando ou crecendo ou ele mesmo se dilatando !

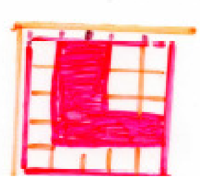




U



=



Propriedades da dilatação:

A DILATAÇÃO É **DISTRIBUTIVA** EM RELAÇÃO A UNIÃO:

$$A \oplus (X1 \cup X2) = A \oplus X1 \cup A \oplus X2$$

Erosão

- Ela não é o encolhimento, seria a dual da dilatação (que por sua vez não é a expanção).

- Alias:

qual o nome em Ingles de todas as operações descritas aqui nestes slides?

Erosão $I \ominus X$

A EROSÃO DE UMA IMAGEM I POR OUTRA IMAGEM X TEM 1 EM UM PIXEL p SE E SÓ SE CADA PIXEL 1 NA TRANSLAÇÃO DE X POR p É TAMBÉM 1 EM I.

$$I \ominus X = \{ p \mid X_p \subset I \}$$

Se $A = I$ e $X = X3$

$$A \ominus X3 = \{ p \mid X3_p \subset A \} = ?$$

Erosão de A pelo EE B é definida => $A \ominus B = \{p | B_p \subseteq A\}$

Faça a erosão

- Pela aplicação da sua definição por essa fórmula:

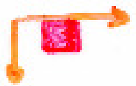
$$A \ominus B = \{p | B_p \subseteq A\}$$

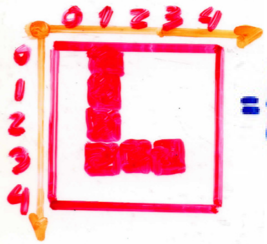
Que em liguagem de conjuntos nos diz que: Erosão de A pelo EE B é o conjunto dos pontos p tal que B transladado do ponto p esta contido ou é igual ao conjunto da imagem A.

Ou seja teste essas possibilidades, ou seja o que ocorre quando B é transladado para cada possivel p !

Erosão $I \ominus X = \{p \mid X_p \subset I\}$

Se $A = I$ e $X = X3$ $\quad A \ominus X3 = \{p \mid X3_p \subset A\} = ?$

$X_3 = \{(0,1)\}$ 



$= \{\underbrace{(0,1)}_{i_1};\ \underbrace{(1,1)}_{i_2};\ \underbrace{(2,1)}_{i_3};\ \underbrace{(3,1)}_{i_4};\ \underbrace{(3,2)}_{i_5};\ \underbrace{(3,3)}_{i_6}\}$

$p(0,0) = 1$? em $A \ominus X3$ se $X3_{p=(0,0)}$ for 1 em A

ou $X3_p \subset A$?

$X3_{p=(0,0)} = \{(0,1)\} \subset A$? S

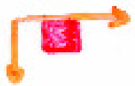
$$A \ominus B = \{p|B_p \subseteq A\}$$

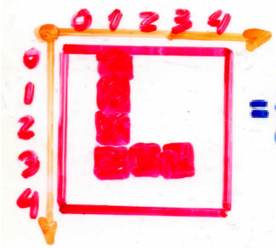
Erosão $I \ominus X = \{p \mid X_p \subset I\}$

Se $A = I$ e $X = X3$

$A \ominus X3 = \{p \mid X3_p \subset A\} = ?$

$X_3 = \{(0,1)\}$





$= \{\underbrace{(0,1)}_{i_1}; \underbrace{(1,1)}_{i_2}; \underbrace{(2,1)}_{i_3}; \underbrace{(3,1)}_{i_4}; \underbrace{(3,2)}_{i_5}; \underbrace{(3,3)}_{i_6}\}$

$p(0,1) = ?$ $X3_{p=(0,1)} = \{(0,2)\} \subset A$? N

$p(1,0) = ?$ $X3_{p=(1,0)} = \{(1,1)\} \subset A$? S

$A \ominus B = \{p \mid B_p \subseteq A\}$

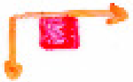
Erosão

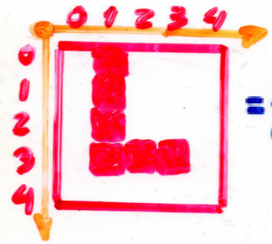
$$I \ominus X = \{p \mid X_p \subset I\}$$

Se $A = I$ e $X = X3$

$$A \ominus X3 = \{p \mid X3_p \subset A\} = ?$$

$X_3 = \{(0,1)\}$





$$= \{\underbrace{(0,1)}_{i_1};\ \underbrace{(1,1)}_{i_2};\ \underbrace{(2,1)}_{i_3};\ \underbrace{(3,1)}_{i_4};\ \underbrace{(3,2)}_{i_5};\ \underbrace{(3,3)}_{i_6}\}$$

$p(1,1) = ?$ $\quad X3_{p=(1,1)} = \{(1,2)\} \subset A$?

CONTINUEM....

*Faça a **erosão de L*** **até o final usando essa definição**!

$$A \ominus B = \{p | B_p \subseteq A\}$$

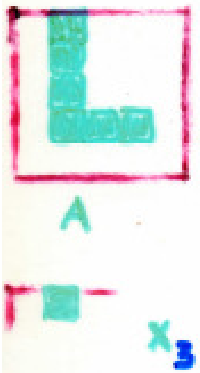
Mas essa não é a única definição

- Há outra definição equivalente (na verdade outras!)

$$I \ominus X$$

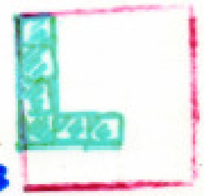
- Procure mais algumas.

Erosão (definição equivalente) $I \ominus X$



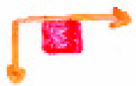
Para que pontos é possível Transladar o elemento estruturante de modo a que ele fique $\subset A$?

DEF. INTUITIVA DA EROSÃO

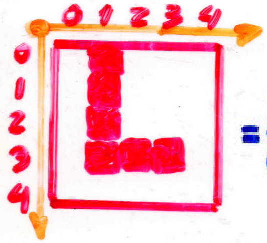


Interseção das Translações de A por cada um dos pixels de X (multiplicado por -1) REFLETIDOS

$X_3 = \{(0,1)\}$



Se $A = I$ e $X = X3$



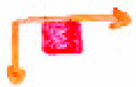
$= \{\underbrace{(0,1)}_{i_1}; \underbrace{(1,1)}_{i_2}; \underbrace{(2,1)}_{i_3}; \underbrace{(3,1)}_{i_4}; \underbrace{(3,2)}_{i_5}; \underbrace{(3,3)}_{i_6}\}$

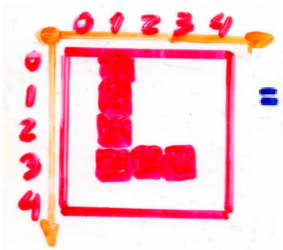
Erosão (definição equivalente)

$$I \ominus X = \bigcap_{x_i \in X} A_{-x_i}$$

Interseção das Translações de A por cada um dos pixels de X (multiplicado por -1) REFLETIDOS

$X_3 = \{(0,1)\}$





$$= \{\underbrace{(0,1)}_{i_1};\ \underbrace{(1,1)}_{i_2};\ \underbrace{(2,1)}_{i_3};\ \underbrace{(3,1)}_{i_4};\ \underbrace{(3,2)}_{i_5};\ \underbrace{(3,3)}_{i_6}\}$$

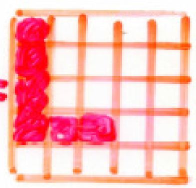
Se $A = L$ e $X = X3$

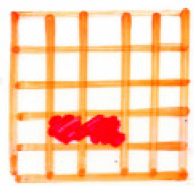
Faça a ***erosão de L*** **usando essa definição**!

Voce faria isso com a sua inicial!!!

Erosão (def. equivalente)

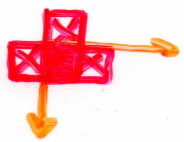
A EROSÃO DE UMA IMAGEM POR UM ELEMENTO ESTRUTURANTE, X, É A IMAGEM DE TODAS AS LOCALIZAÇÕES ONDE O ELEMENTO ESTRUTURANTE ESTÁ CONTIDO EM A

$I \ominus X3 =$ 

$I \ominus X1 =$ 

$I \ominus X2 = \emptyset$

$X1 =$  $= \{\underbrace{(0,0)}_{x_1}, \underbrace{(0,1)}_{x_2}\}$

X2 

X3 

Quantas definições mais voces acharam?

Essa é outra característica da MM!

(definições varias e livres de serem criadas)

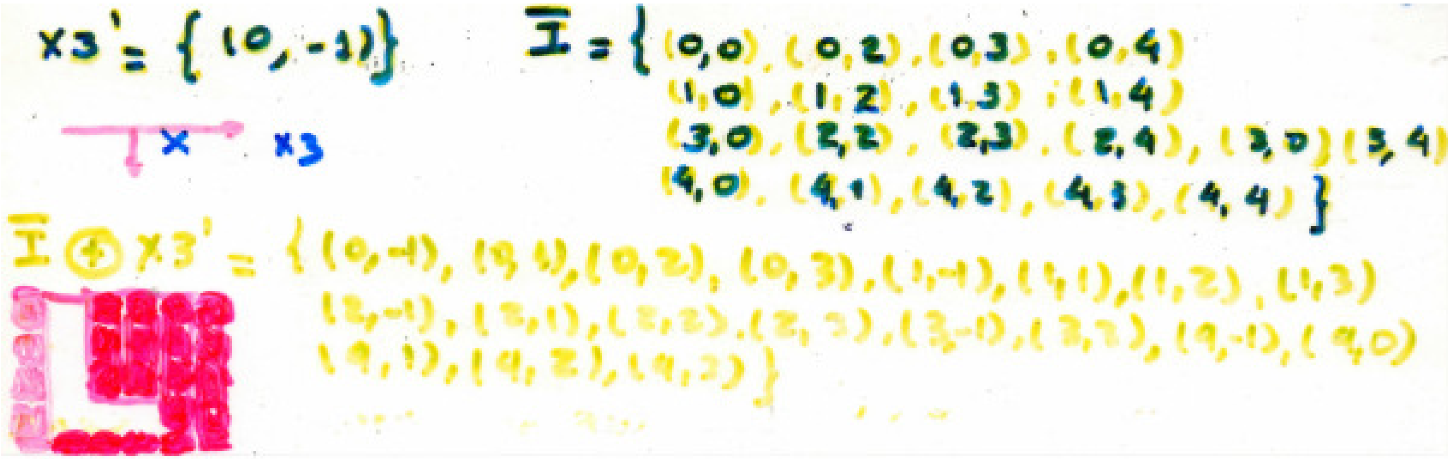
EROSÃO É A OPERAÇÃO OPOSTA $(A \ominus X)$ DA DILATAÇÃO $(A \oplus X)$

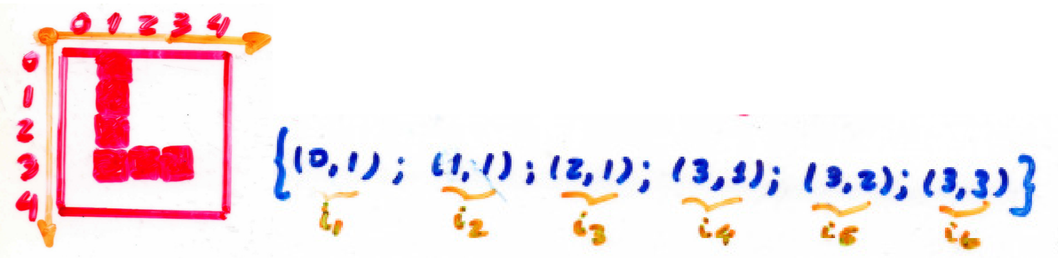
A DILATAÇÃO E A EROSÃO SÃO OPERAÇÕES DUAIS. GEOMETRICAMENTE: $\overline{A \oplus B} = \bar{A} \ominus B'$

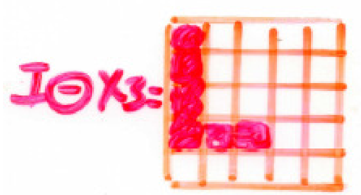
$$\overline{A \ominus B} = \bar{A} \oplus B'$$

Verificando essas propriedades!

$$\overline{A \ominus B} = \bar{A} \oplus B'$$



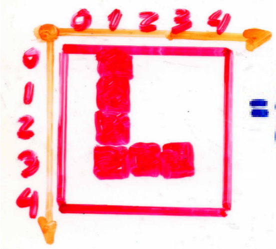




Verificando a outra propriedades?

A DILATAÇÃO E A EROSÃO SÃO OPERAÇÕES DUAIS. GEOMETRICAMENTE: $\overline{A \oplus B} = \bar{A} \ominus B'$

Verifique, isso é mostre que ambas representa a mesma imagem final para quaisquer conjuntos *A* e *B* .



$= \{\underbrace{(0,1)}_{i_1}; \underbrace{(1,1)}_{i_2}; \underbrace{(2,1)}_{i_3}; \underbrace{(3,1)}_{i_4}; \underbrace{(3,2)}_{i_5}; \underbrace{(3,3)}_{i_6}\}$

$X1 =$  $= \{\underbrace{(0,0)}_{x_1}, \underbrace{(0,1)}_{x_2}\}$

$A \oplus X$

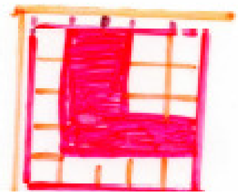
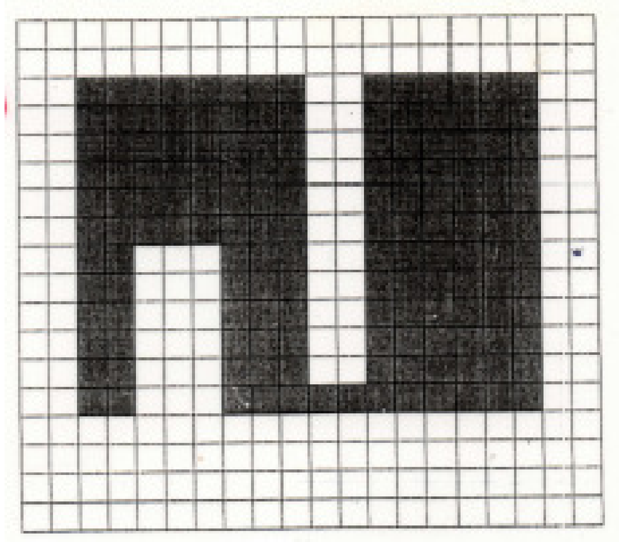
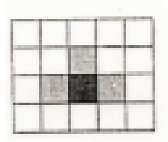


Imagem Original A



Elemento estruturante : B

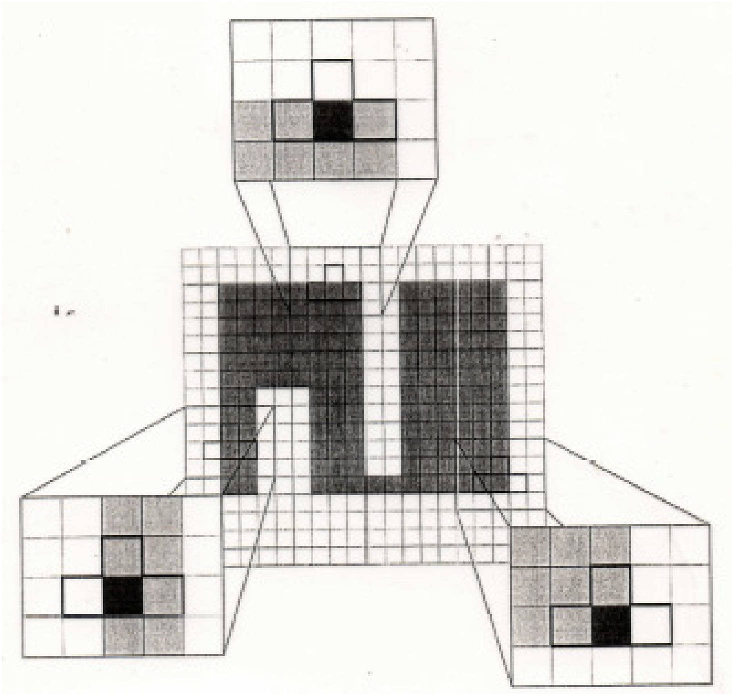
(onde seria sua origem?)



Transladando B para diversas posições de A

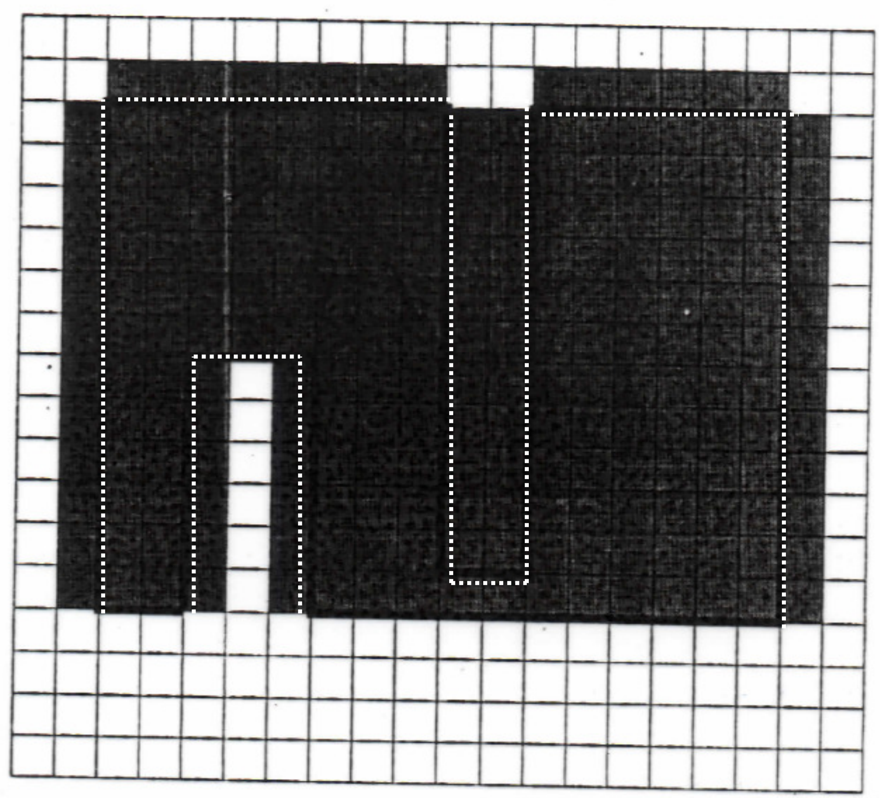
Verifique, como se faz essa traslação

Verifique, como se faz essa traslação



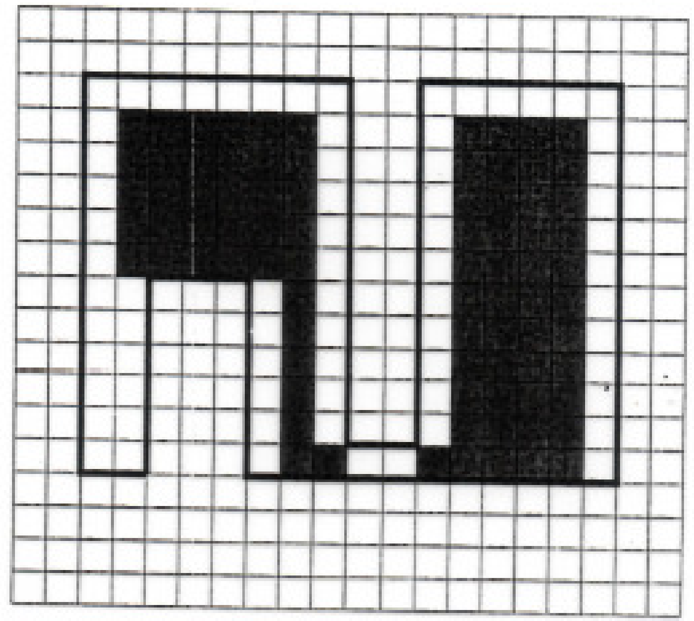
$$A \oplus B = \bigcup_{b_i \in B} A_{b_i}$$

- Dilatação



Erosão

$$A \ominus B = \{p | B_p \subseteq A\}$$



Verifique, esse resultado

Agora as operações compostas

- Abertura
- Fechamento

(são as básicas elas usam o mesmo EE, mas é uma multiplicidade de opções: descubra uma que seja util em algo voce mesmo)

Mas há outros exemplo de operações combinadas, como as Hit-miss, que usam mais de um EE ou um mesmo de diversas formas , como familias em diversas escalas (granulometria)

$$I \otimes (J, K) = (I \ominus J) \cap (\bar{I} \ominus K)$$

voce chega a entender o que esta escrito acima em liguagem matematica?
Ou precisa reler esse material!

Voce pode agora reler o texto e Responder as perguntas (que desejar) com calma,
OU pode ir se fazendo ainda mais perguntas sobre detalhes que não foram Contemplados;

Essas operações básicas

- São apenas o inicio de um mundo de possibilidades.

- Mas como elas poderiam ser utilizadas na forma processamento de imagens?

- Ou como poderiam ser na forma condicional?

Mas antes de se continue Combinando operações ou para outras formas da

Morfologia Matemática

ainda faltam a esqueletização e o divisor de aguas?

Então vamos a elas:

Skeletonization
é tambem chamada de
Medial Axis Transform

Skeletonization / esqueletização

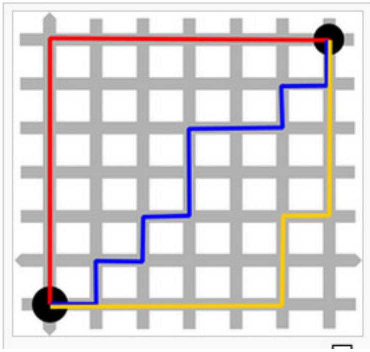
- Def.:
- Conjunto de pontos cuja **distância** até a ***borda*** mais perto da imagem é um máximo local.

- **Aplicação:** forma compacta de representar diversas imagens (como o ***L*** e as iniciais que vocês fizeram até aqui) !

Para ela precisamos introduzir o conceito de

- **Distância** ou métricas

(espaços topológicos)



a) Euclidian $d_e(x,y)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

b) City block $d_{cb}(x,y)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$

c) Chessboard $d_{ch}(x,y)=\max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}$

introduzindo o conceito de

- **Vizinhança** ou bolas abertas ou fechadas centrada em um pixel (ou ponto)

- Cuja forma real do que se chama aqui de "bola" depende da métrica usada.

- E é claro depende do que seria o "raio" desta bola !

Até o valor 3, como ficam as **Vizinhanças** de um pixel ?

		3	3	3		
	3	2	2	2	3	
3	2	1	1	1	2	3
3	2	1	$\boxed{0}$	1	2	3
3	2	1	1	1	2	3
	3	2	2	2	3	
		3	3	3		

a)

			3			
		3	2	3		
	3	2	1	2	3	
3	2	1	$\boxed{0}$	1	2	3
	3	2	1	2	3	
		3	2	3		
			3			

b)

3	3	3	3	3	3	3
3	2	2	2	2	2	3
3	2	1	1	1	2	3
3	2	1	$\boxed{0}$	1	2	3
3	2	1	1	1	2	3
3	2	2	2	2	2	3
3	3	3	3	3	3	3

c)

Vamos pensar um pouco! Qual a forma final das figuras acima se aumentarmos bem a distancia em relação ao pixel central ?

Métrica
(definição)

Dado um conjunto $\mathbb{S}$, uma métrica em $\mathbb{S}$ é uma função

$$d : \mathbb{S} \times \mathbb{S} \to \mathbb{R}$$

que possui as seguintes propriedades:

- É positivamente definida, ou seja, é tal que

$$d(x, y) \geq 0$$

para todos os $x, y \in \mathbb{S}$.

- É simétrica, ou seja, é tal que

$$d(x, y) = d(y, x)$$

para todos os elementos x, y de $\mathbb{S}$.

- Obedece a desigualdade triangular; para todos os x, y, z elementos de $\mathbb{S}$, d satisfaz

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

- É nula apenas para pontos coincidentes. Ou seja,

$$d(x, y) = 0 \iff x = y.$$

Exemplo de Métricas

No conjunto dos números reais, a métrica usual é dada por:

- $d(x, y) = |x - y|$

No conjunto $\mathbb{R}^n$ várias métricas podem ser definidas, por exemplo:

- $d(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p}$
- $d(x, y) = max|x_i - y_i|$

No conjunto das funções contínuas no intervalo $[a, b]$, $C^0[a, b]$:

- $d(f, g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$
- $d(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|$

Em um conjunto $\mathbb{S}$ qualquer, a **métrica discreta**:

- $d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$

Bolas (definição)

As bolas abertas de raio r e centro x em um espaço métrico $\mathbb{S}$ são denotadas por:

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{S} : d(x,y) < r\}.$$

Analogamente, as bolas fechadas de raio r e centro x em um espaço métrico $\mathbb{S}$ são denotadas por:

$$\bar{B}(x,r) = \{y \in \mathbb{S} : d(x,y) \leq r\}.$$

- Duas métricas, d_1 e d_2, sobre o mesmo espaço métrico são ditas **uniformemente equivalentes** se existirem duas constantes positivas, C_1 e C_2 tais que:

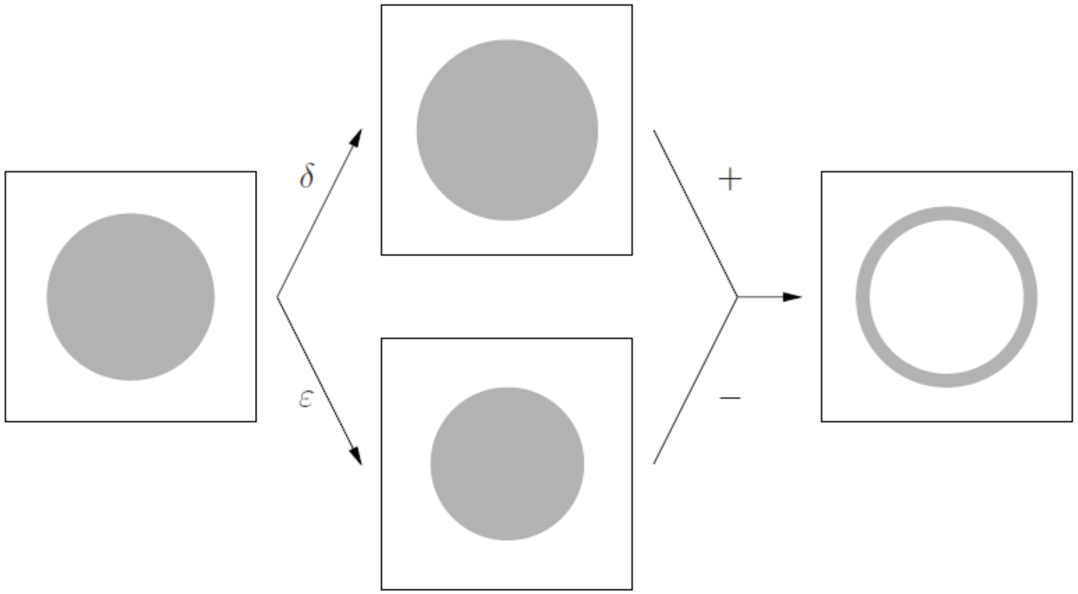
$$C_1 d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq C_2 d_1(x,y)$$

Obs.: Métricas uniformemente equivalentes são equivalentes.

conceito de bordas

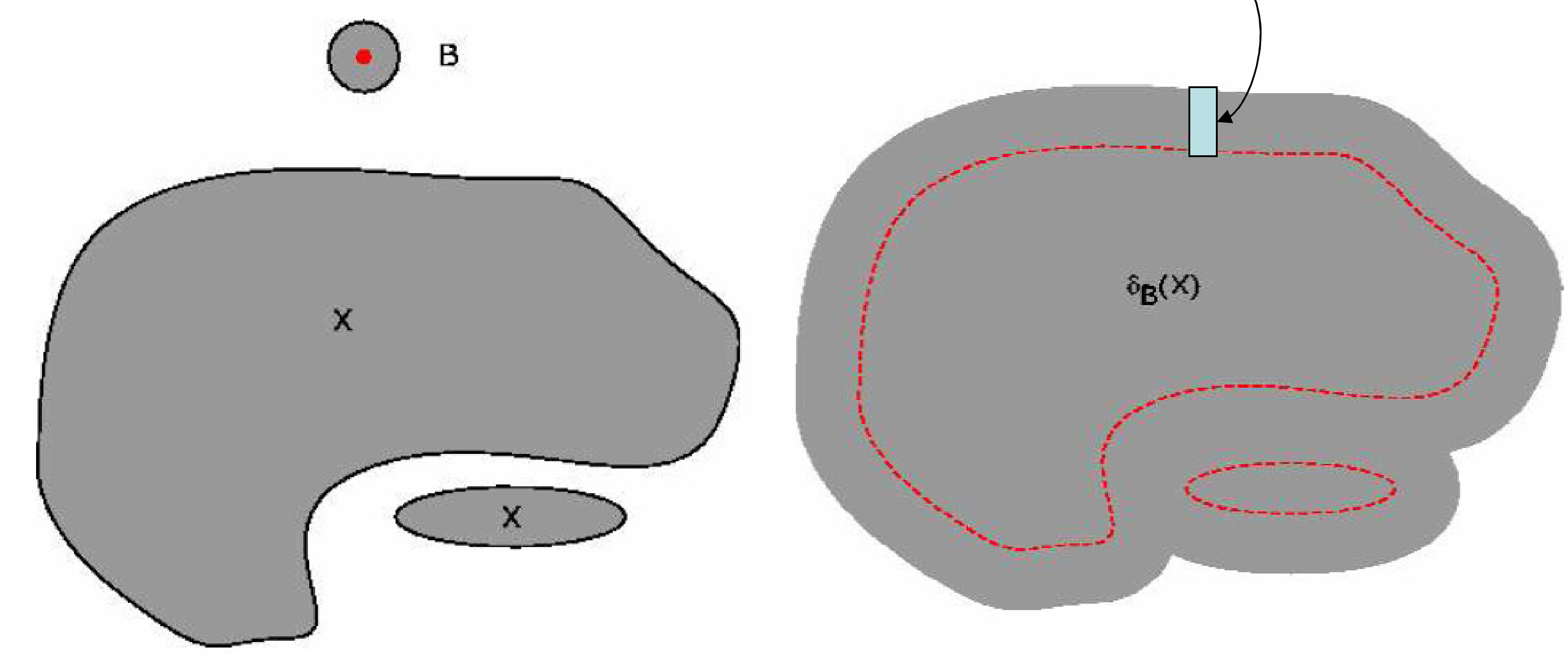
- **Gradiente morfológico**:
  - Dilatação - erosão

morphological gradient

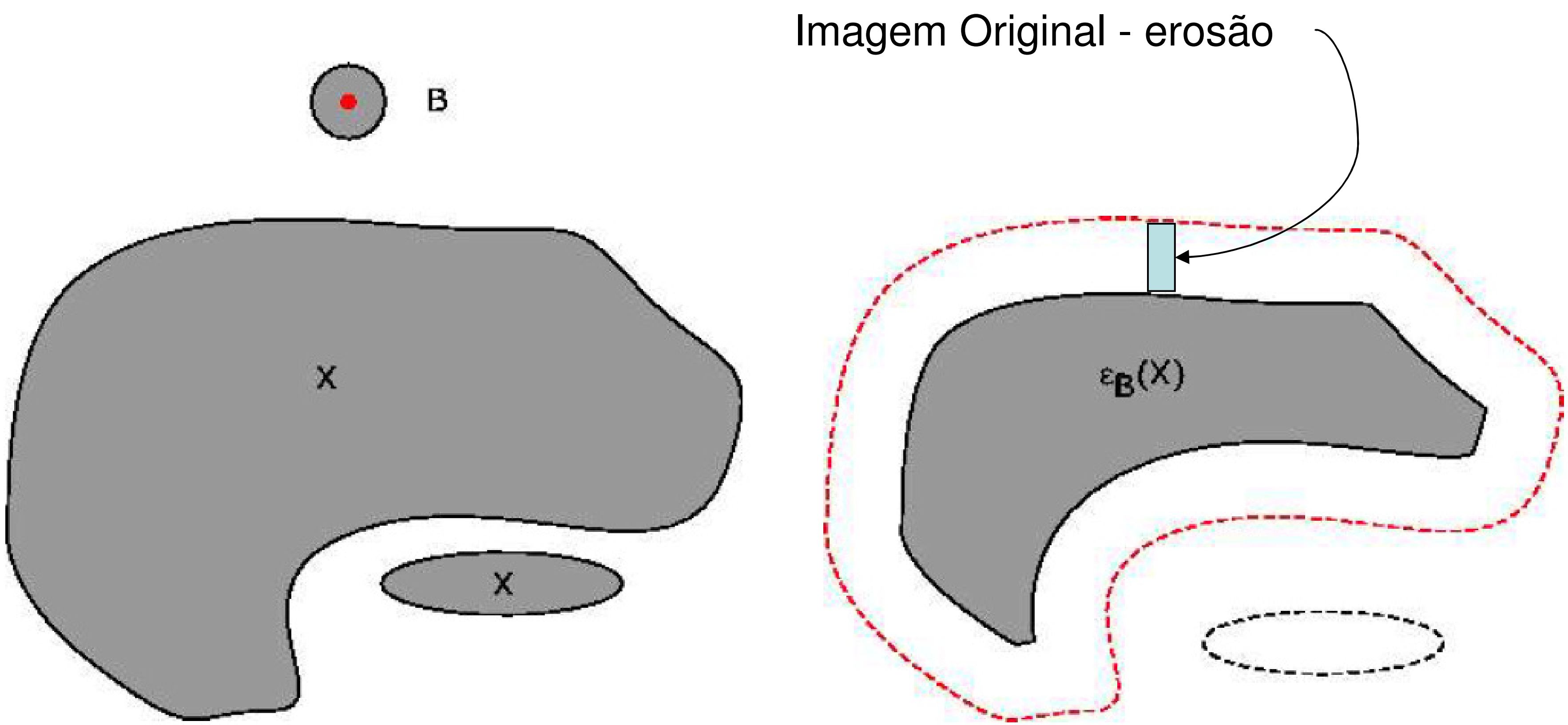


conceito de bordas

Dilatação - Imagem Original



conceito de bordas



External Gradient

- Gradiente morfológico externo:
  – Dilatação - Imagem Original

Vamos pensar um pouco!

Qual a relação disso com um **EE maior** mas de mesmo tipo, como um disco de raio=5, ou raio=7, ou ainda raio=9?

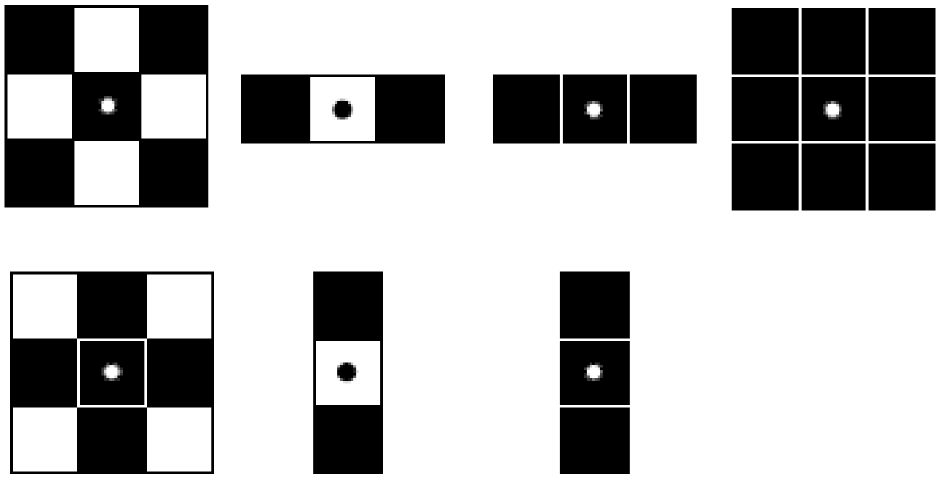
Internal Gradient

- Gradiente morfológico interno:
  - Imagem Original - erosão

Vamos pensar um pouco!

Qual a relação disso com um **EE** de tipo diferente (quadrado, losangular, circular, etc...) mas com mesmo tamanho?

Mas nem todos os EE são relacionados a métricas!!



Quais dos EE acima não são relacionados a métricas?

A expansão x dilatação

- Para uma delas é preciso ter um conceito de como os vizinhos vão se parecer!
- Olha a Métrica, ai !!!!
- Um EE bem escolhido torna expansões sucessivas possíveis de serem feitas uma única vez!

Expansão

- Ponha o valor do pixel do background para 1 se algum vizinho dele for 1

- (Expansão= Ponha o valor do pixel do “fundo” para 1 (transforme ele em imagem) se algum vizinho dele for 1 (imagem))

Encolhimento

- Ponha o valor do pixel da imagem para 0 (transforme ele em fundo) se algum vizinho dele for 0 (fundo)

(Encolhimento = Ponha o valor do pixel da imagem para 0 (faça ele virar fundo) se algum vizinho dele for 0 (fundo))

•Um EE bem escolhido torna ecolhimentos sucessivos possíveis de serem feitos um única vez!

Haveria a mesma relação para

- Encolhimento e Erosão?

- Isto é o Encolhimento pode ser visto como uma Erosão comum EE que tenha a forma de uma das métricas usuais !

Transformada de distância

- Para cada pixel da imagem, é a transformação que associa a esse pixel o valor da distância ao pixel do fundo mais próximo.

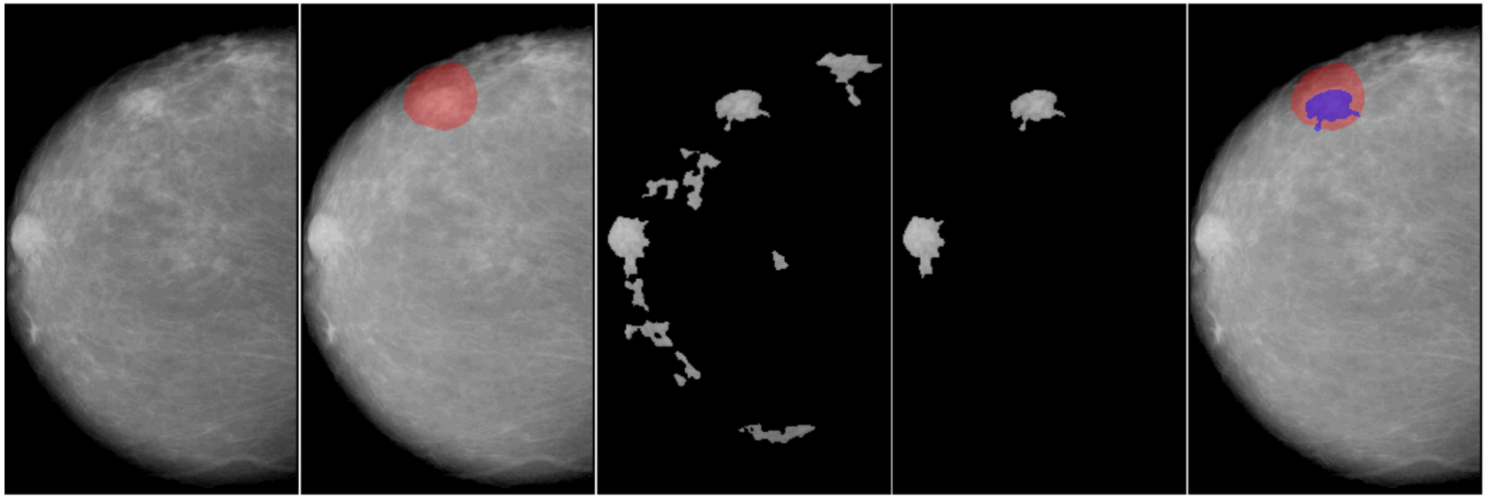
- Aplicações:
  - Skelotonization
  - Computação de fatores de forma
  - Realizar outras operações da MM de forma mais eficiente
  - Etc.

Exemplo:
elemento estruturante e dilatação

- Relação com:
  - métricas no R^2
  - Geometria Fractal (corpo paralelo e seus usos nos espaços de Hausdorff)
  - Filtros não lineares de AI

E se for em tons de cinza?

- “Limiarizo” para ficar com uma imagem Binária
- Ou
- Defino as operações básicas em cores ou tons de cinza

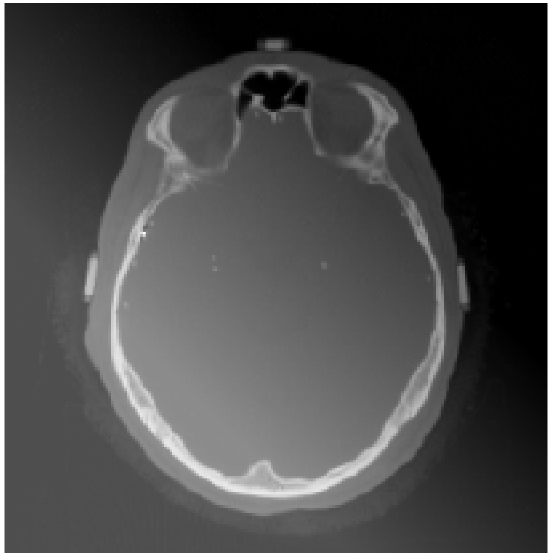


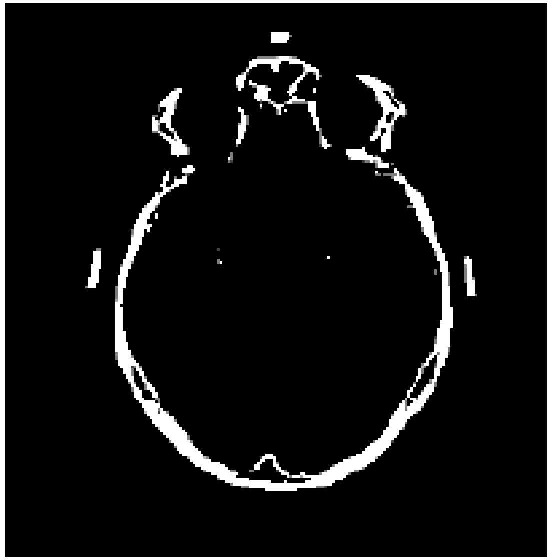
(a) (b) (c) (d) (e)

$$\{(x, y) | f(x, y) = 1\}$$

Isso vale em tons de cinza? Isso vale para sinais?

Exemplo binarizar com uma iluminação não uniforme poderia dar problemas
Logo melhor definir como ficara a MM!!





Veremos isso em um próximo trabalho ou aula ....

Trab 3 / 2021:

- Responda todas as perguntas feitas ao longo deste texto (geralmente estão em vermelho) e as **entregue até a data combinada**.
- Responda: Na ferramenta que voce esta mais acostumado a implementar ou a usar há de alguma forma operações de conjunto e de MM?
- Responda e mostre : Como fica a expansão de sua inicial (considerando as 3 métricas d^{∞}, d^1 e d^2)
- Responda e mostre : Como fica a dilatação de sua inicial por 3 elementos estruturantes dos tipos Circular, losangular, em cruz e quadrado (de tamanho definido por vc, à vontade).
- Finalmente (faça o mesmo com o encolhimento e a erosão) e a responda:
  - Seria possivel encher o universo (conjunto subjacente) com repetição destas operações?
  - Foi possivel ficar apenas com só um ponto no universo a partir delas?

Referencias

- As imagens de abertura e fechamento foram de

H. Watt, F. Policarpo - The Computer Image , Addison-Wesley Pub Co (Net); 1998- ISBN: 0201422980 , UFF Bib CTC: 006.6 W344

R. C. Gonzalez and R. E. Woods - Digital Image Processing, Addison Wesley Pub. Co. 1993