Computação Gráfica I

Professor:

Anselmo Montenegro
www.ic.uff.br/~anselmo

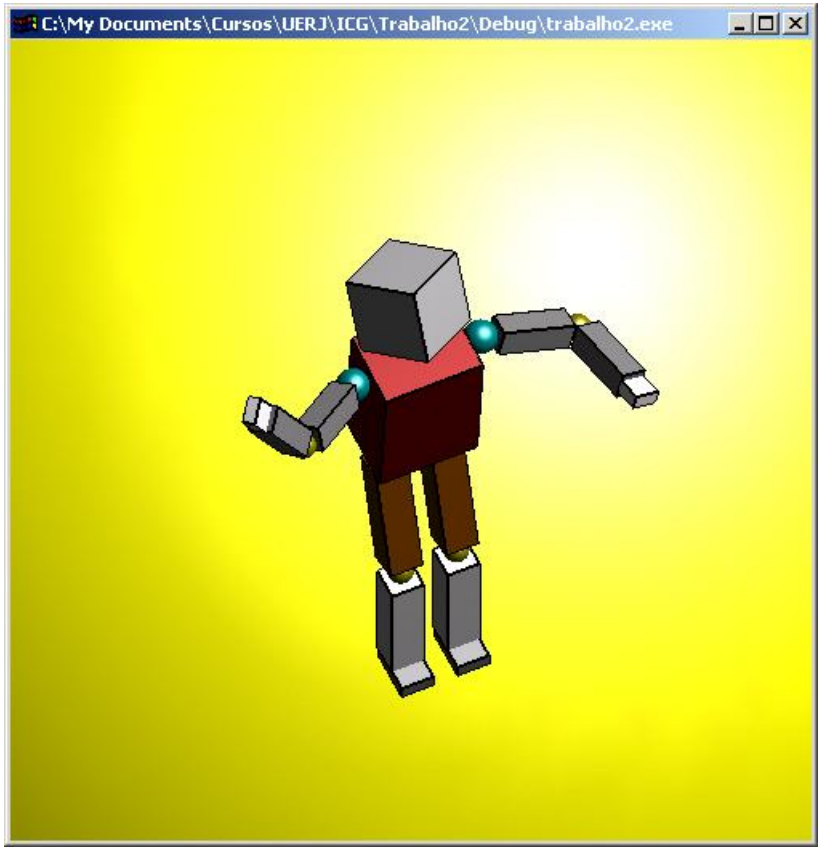
Conteúdo:

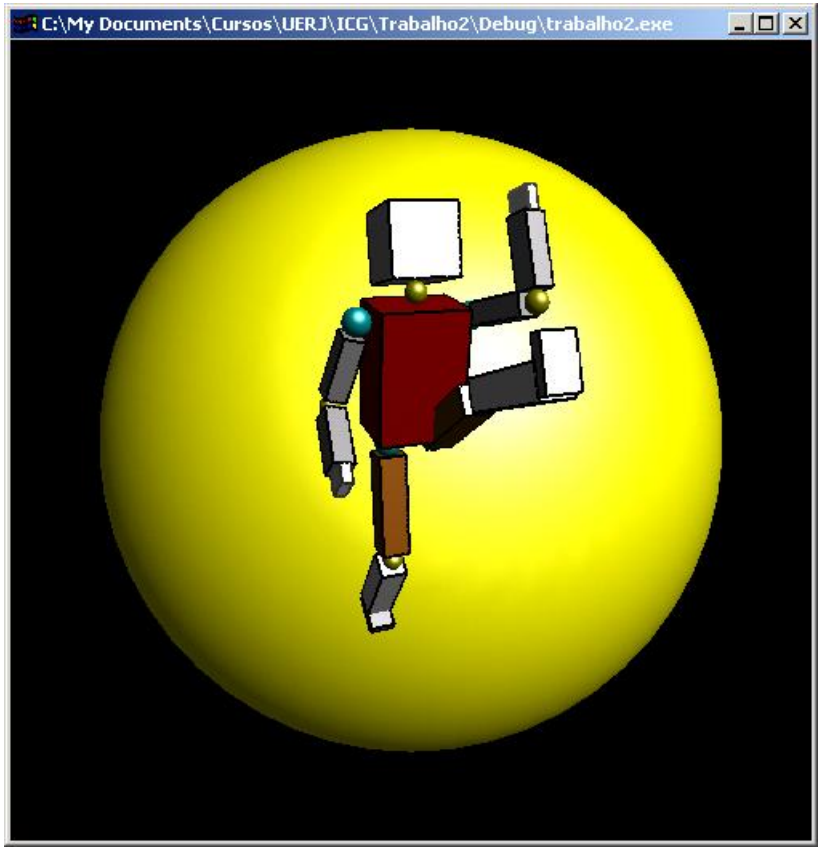
- Projeções e câmera virtual

Projeções e câmera virtual: *introdução*

- A geometria afim é capaz de descrever boa parte dos objetos e operações da Computação Gráfica.
- Entretanto, há operações que requerem um outro tipo de geometria.
- Este é o caso das *transformações de visualização*.

Projeções e câmera virtual: *geometria projetiva – motivação*





Projeções e câmera virtual: *geometria projetiva – motivação*

- Nas figura (a) vemos uma vista aérea de um pista e na figura (b) uma foto tomada de um ponto sobre o terreno.
- A figura (b) é uma *transformação projetiva* de (a).
- Preserva retas mas *não preserva paralelismo*.

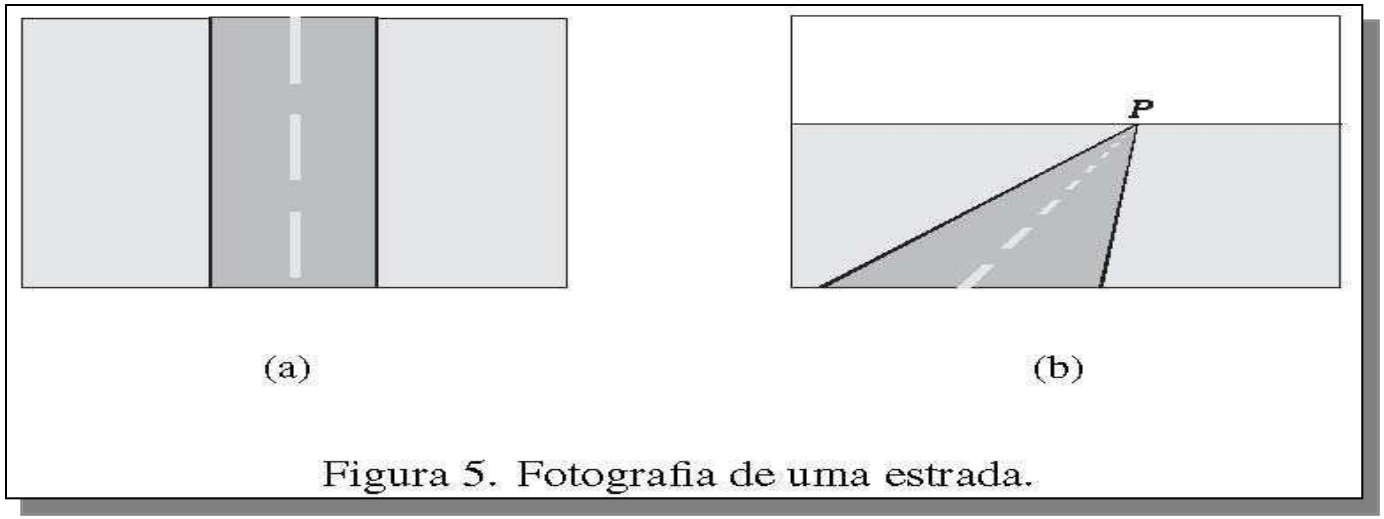


Figura 5. Fotografia de uma estrada.

Projeções e câmera virtual: *geometria projetiva – espaço projetivo*

- O espaço projetivo de dimensão n, com origem em um ponto $O \in R^{n+1}$, é definido como o conjunto de retas que passam por O (menos o próprio O).

- O espaço projetivo de dimensão *n* é normalmente indicado por RP^n.

Projeções e câmera virtual: *geometria projetiva – espaço projetivo*

- A geometria projetiva é uma extensão da geometria euclidiana.

- É comum representar um ponto $(x_1,x_2,...,x_{n+1})$ nesse espaço pela notação $(\boldsymbol{x}, x_{n+1})$ onde $\boldsymbol{x} \in R^n$.

Projeções e câmera virtual: *geometria projetiva – espaço projetivo*

- Sub-espaços de dimensão $m<n$ de RP^n, são identificados com sub-espaços de dimensão $m+1$ em R^{n+1}.

- Exemplo: retas projetivas são sub-espaços bidimensionais, isto é planos que passam pela origem.

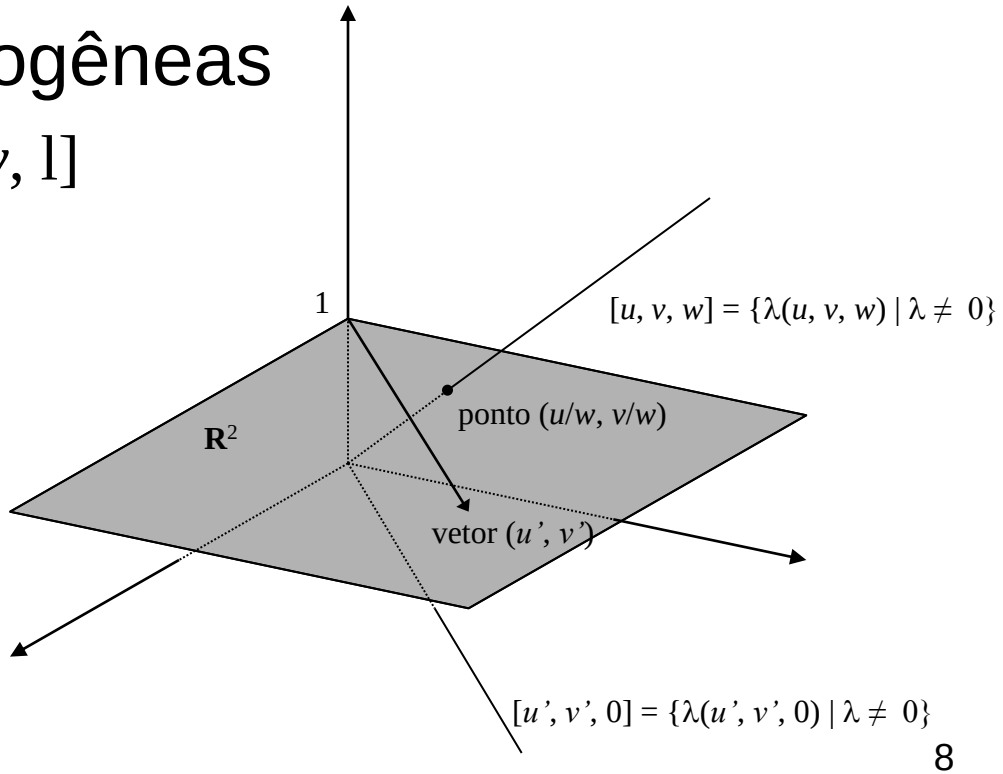
Projeções e câmera virtual: *geometria projetiva – espaço projetivo*

- Espaço projetivo $\boldsymbol{RP}^n$

  ↕

- Retas pela origem em $\boldsymbol{R}^{n+1}$
- Coordenadas homogêneas

  $(x, y) \leftrightarrow [x, y, 1] \cong [lx, ly, l]$



Projeções e câmera virtual: *geometria projetiva – espaço projetivo*

- A identificação de pontos do espaço afim com pontos do espaço projetivo leva a partição de RP^n em dois conjuntos.

- Tomemos o RP^2 como base de nosso raciocínio:
  - $RP^2 = \{(\boldsymbol{x},1)\} \cup \{(\boldsymbol{x},0)\}$

Projeções e câmera virtual: *geometria projetiva – espaço projetivo*

- Os pontos da $\{(\boldsymbol{x},1)\}$ são os pontos do plano euclidiano $z=1$. Esses pontos são chamados *pontos afins* ou próprios.

- O pontos da forma $\{(\boldsymbol{x},0)\}$ são denominados *pontos ideais* ou do *infinito*.

Projeções e câmera virtual: *geometria projetiva – espaço projetivo*

- *Não existem retas paralelas na geometria projetiva*.

- Para isto, basta ver que uma reta projetiva é dada por uma plano que passa pela origem.

- Como dois desses planos sempre se interceptam então, duas retas projetivas nunca são paralelas.

Projeções e câmera virtual: *geometria projetiva – espaço projetivo*

- O que ocorre com duas retas paralelas no plano afim?
  - Duas retas paralelas r_1 e r_2 no plano afim $z=1$ se interceptam em um ponto no infinito.
  - As retas r_1 e r_2 correspondem as retas projetivas P_1 e P_2 dados pelos planos na figura abaixo.

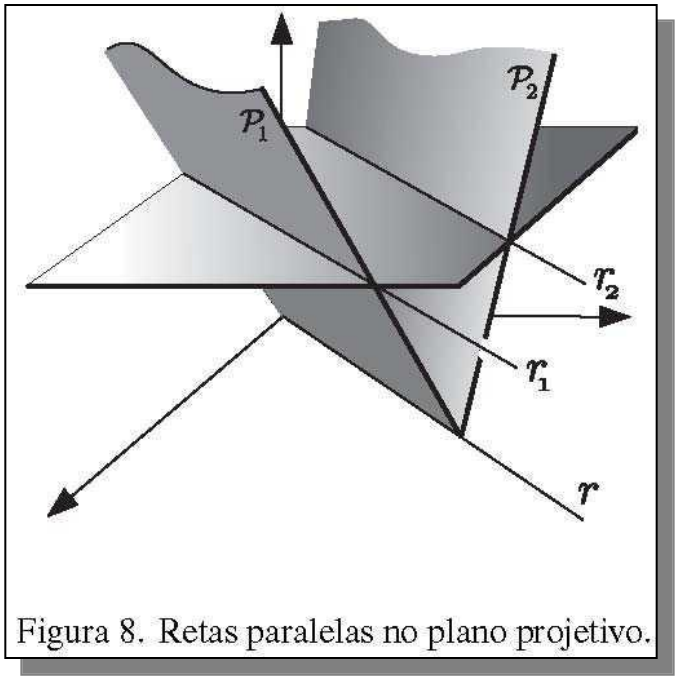


Figura 8. Retas paralelas no plano projetivo.

Projeções e câmera virtual: *geometria projetiva – coordenadas homogêneas*

- É fácil introduzir coordenadas para o espaço projetivo.
- Dado um ponto $p \in RP^n$, tomamos as coordenadas $(x_1,x_2,...,x_n,x_{n+1})$ de um ponto $p' \in R^{n+1}$ na reta que representa p.
- Desta forma tomamos coordenadas euclidianas para um ponto projetivo.

Projeções e câmera virtual: *geometria projetiva – coordenadas homogêneas*

- Entretanto, $\lambda p'$, $\lambda \in R$ e $\lambda \neq 0$, representa o mesmo ponto projetivo p.

- Desse modo, $\lambda(x_1,x_2,...,x_n,x_{n+1})$ também representa coordenadas de p.

Projeções e câmera virtual: *geometria projetiva – coordenadas homogêneas*

- Isto significa que as coordenadas projetivas são definidas a menos de um fator escalar não nulo.

- A notação utilizada na literatura para coordenadas homogêneas é:

$$[x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}]=\lambda[x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}]$$

Projeções e câmera virtual: *geometria projetiva – transformações projetivas*

- Uma transformação projetiva T: $RP^n \rightarrow RP^n$, leva pontos projetivos em pontos projetivos.

- T deve transformar uma reta passando pela origem em outra reta que passa pela origem.

- Logo T deve ser uma *transformação linear invertível* de RP^{n+1} em RP^{n+1}.

Projeções e câmera virtual: *geometria projetiva – transformações projetivas*

- Daí decorre que T preserva elementos lineares do espaço projetivo.
- T é representada por uma matriz de ordem $n+1$.
- T é definida a menos de um fator de escala, pois, $\lambda\, T(p)=T(\lambda p)=T(P)$, $\lambda \in R$ e $\lambda \neq 0$.

Projeções e câmera virtual: *geometria projetiva – transformações projetivas*

- Matriz que representa uma transformação T: $RP^2 \rightarrow RP^2$ no plano projetivo:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Projeções e câmera virtual: *geometria projetiva – transformações projetivas*

- Suponha que a matriz seja dada por:

$$\begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Aplicando a um ponto do infinito $(x,y,0)$ e a um ponto afim $(x,y,1)$, temos respectivamente:

$$\begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy+e \\ bx+dy+f \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy+e \\ bx+dy+f \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Logo, leva pontos próprios em pontos próprios e pontos ideais em pontos ideais (transformação afim)

Projeções e câmera virtual: *geometria projetiva – transformações projetivas*

- Suponha que a matriz seja dada por: (com $r \neq 0$ ou $s \neq 0$)

$$\begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \\ r & s & 1 \end{pmatrix}$$

- Aplicando a um ponto do infinito $(x,y,0)$ e a um ponto afim $(x,y,1)$, temos respectivamente:

$$\begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \\ r & s & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy+e \\ bx+dy+f \\ rx+sy \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \\ r & s & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy+e \\ bx+dy+f \\ rx+sy+1 \end{pmatrix}$$

- Há pontos ideais levados em pontos afins e pontos afins levados em pontos ideais.

Projeções e câmera virtual: *geometria projetiva – transformações projetivas*

- Suponha que um ponto ideal é levado em um ponto afim P_0.

- A família de retas paralelas, que se interceptam no ponto ideal, são transformadas em um feixe de retas que incidem em P_0.

Projeções e câmera virtual: *geometria projetiva – transformações projetivas*

- P_0 é denominado *ponto de fuga da transformação*.

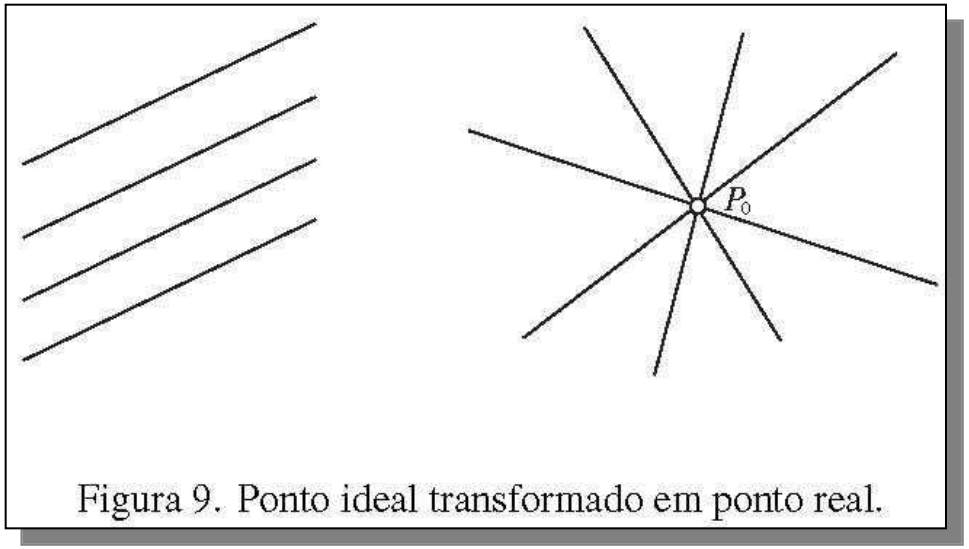


Figura 9. Ponto ideal transformado em ponto real.

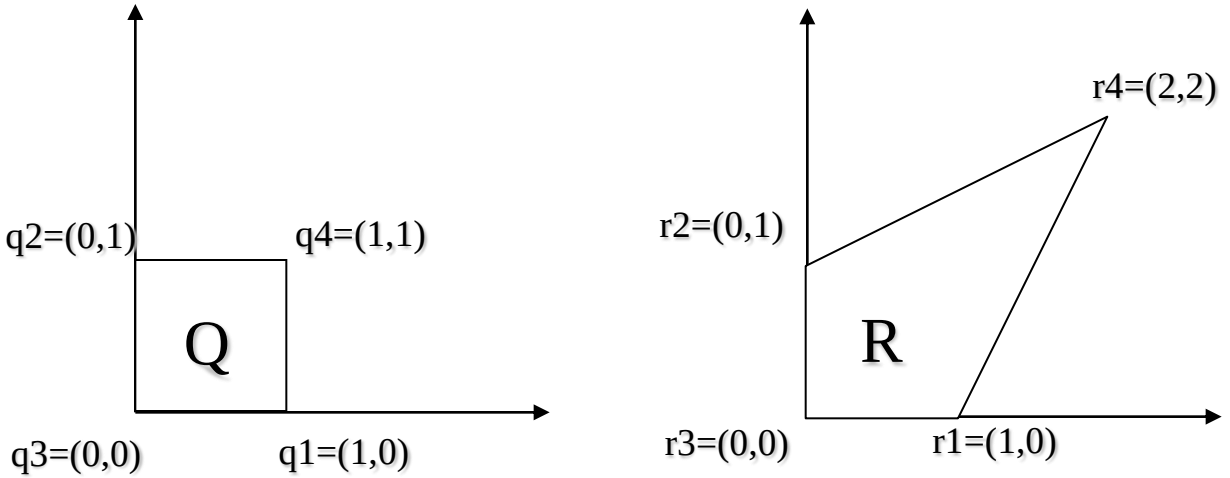
Projeções e câmera virtual: *geometria projetiva – transformações projetivas*

- Uma transformação projetiva P em RP^2 fica caracterizada quando são conhecidas as imagens por P de 4 pontos em "posição geral" (3 quaisquer não estão em linha reta).

- Generalização para RP^n: $n+2$ pontos em posição geral.

Projeções e câmera virtual: *geometria projetiva – transformações entre dois quadriláteros*

- *Transformar* um quadrilátero Q em um quadrilátero R.



- Solução:

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Projeções e câmera virtual: *geometria projetiva – verificação*

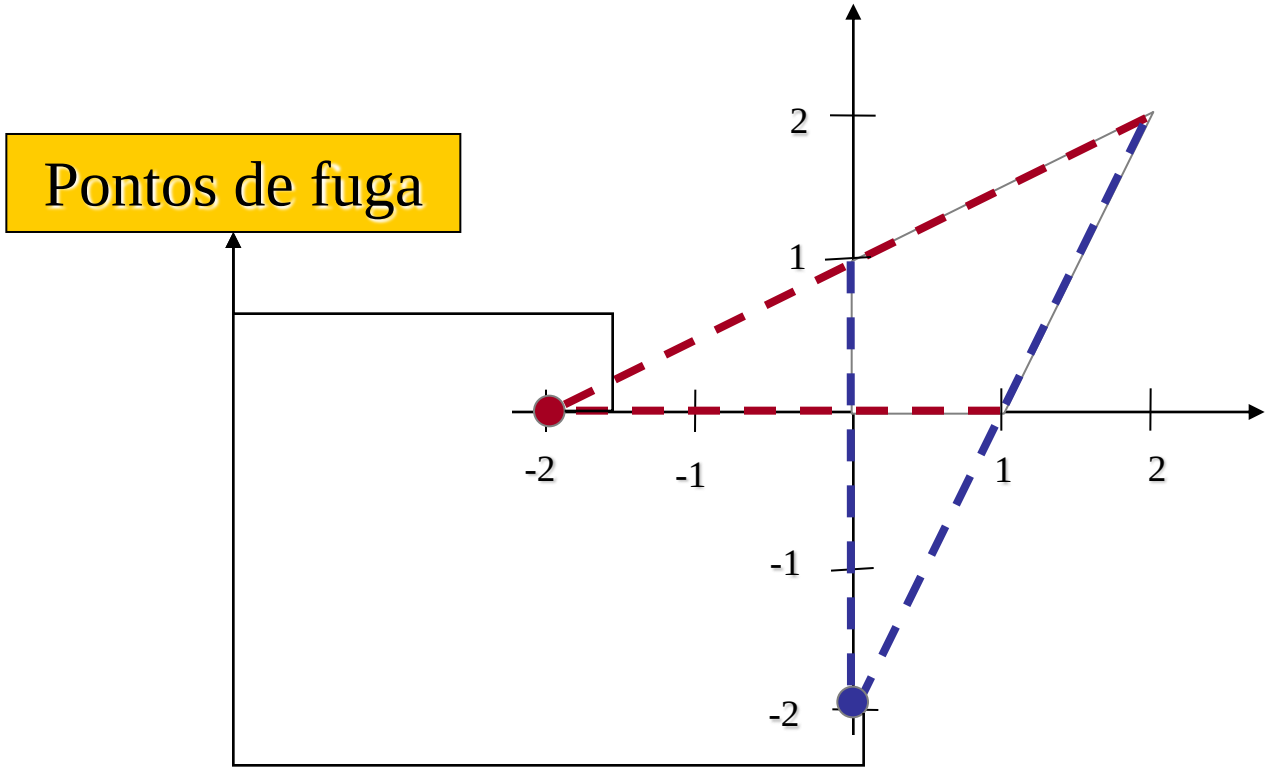
$$T(1,0) = T(1,0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(0,1) = T(0,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(0,0) = T(0,0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

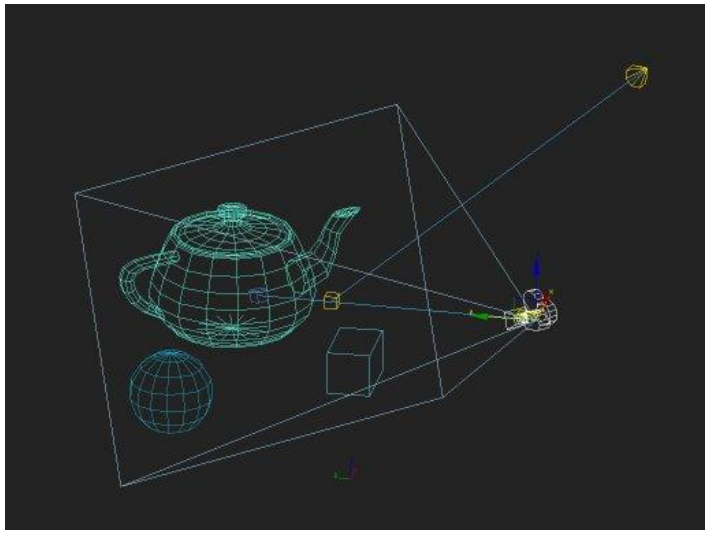
$$T(1,1) = T(1,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

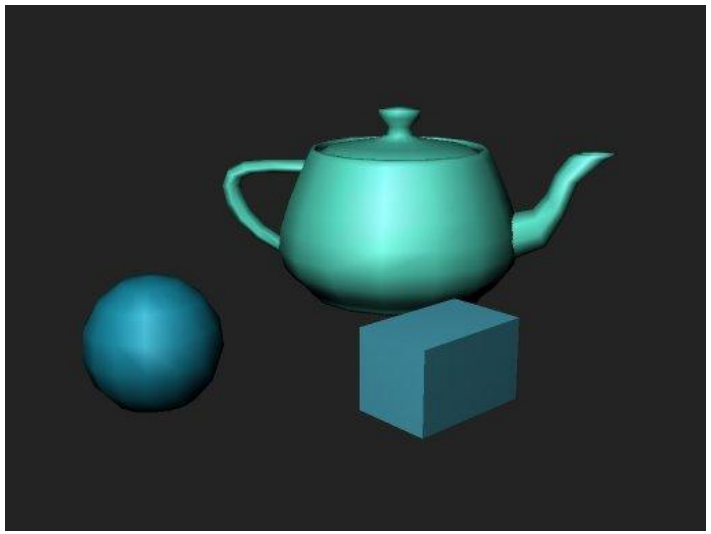
Projeções e câmera virtual: *geometria projetiva – pontos de fuga da transformação*



Projeções e câmera virtual: *visualização de cenas 3D*

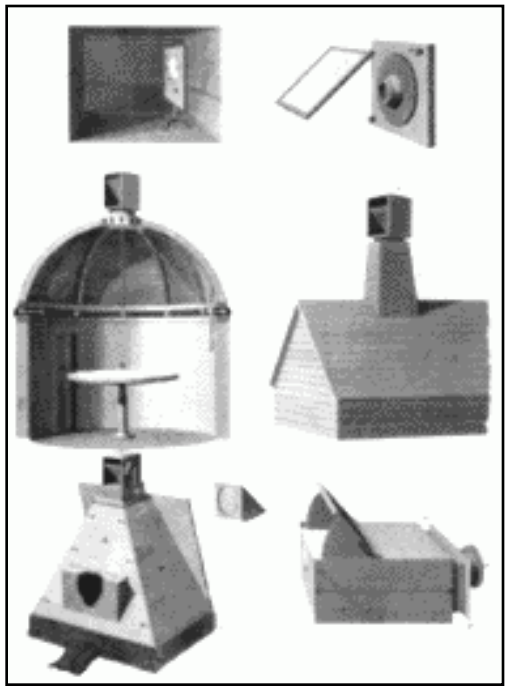
- A geração de imagens a partir de modelos de tridimensionais é uma das etapas mais importantes em Computação Gráfica.





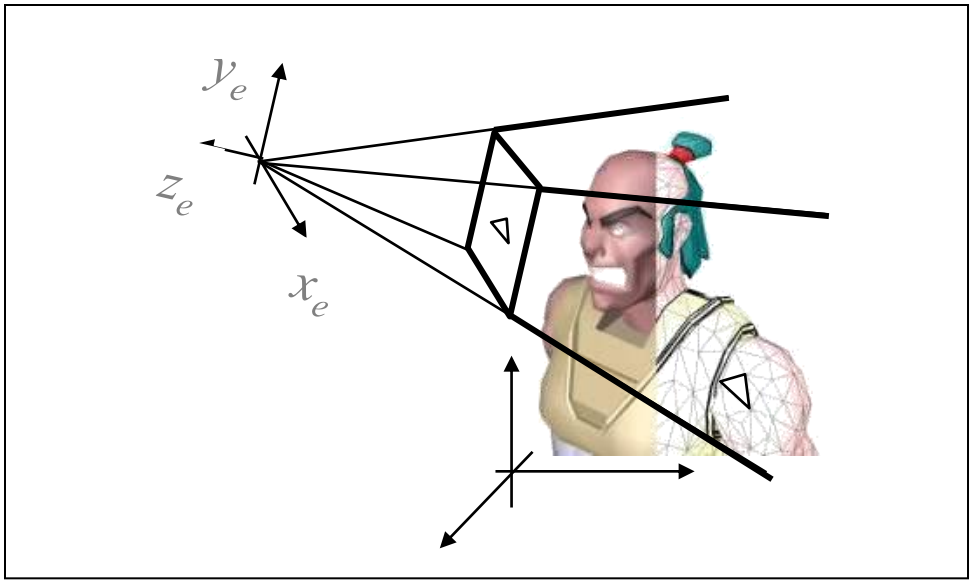
Projeções e câmera virtual: *visualização de cenas 3D*

- O processo de geração de imagens a partir de cenas virtuais é análogo à geração de imagens através de câmeras fotográficas.



Projeções e câmera virtual: *câmera virtual*

- A diferença é que em C.G., os objetos, as luzes e a câmera são descritos por modelos matemáticos.
- Por este motivo, a câmera em C.G. é denominada *câmera virtual*.

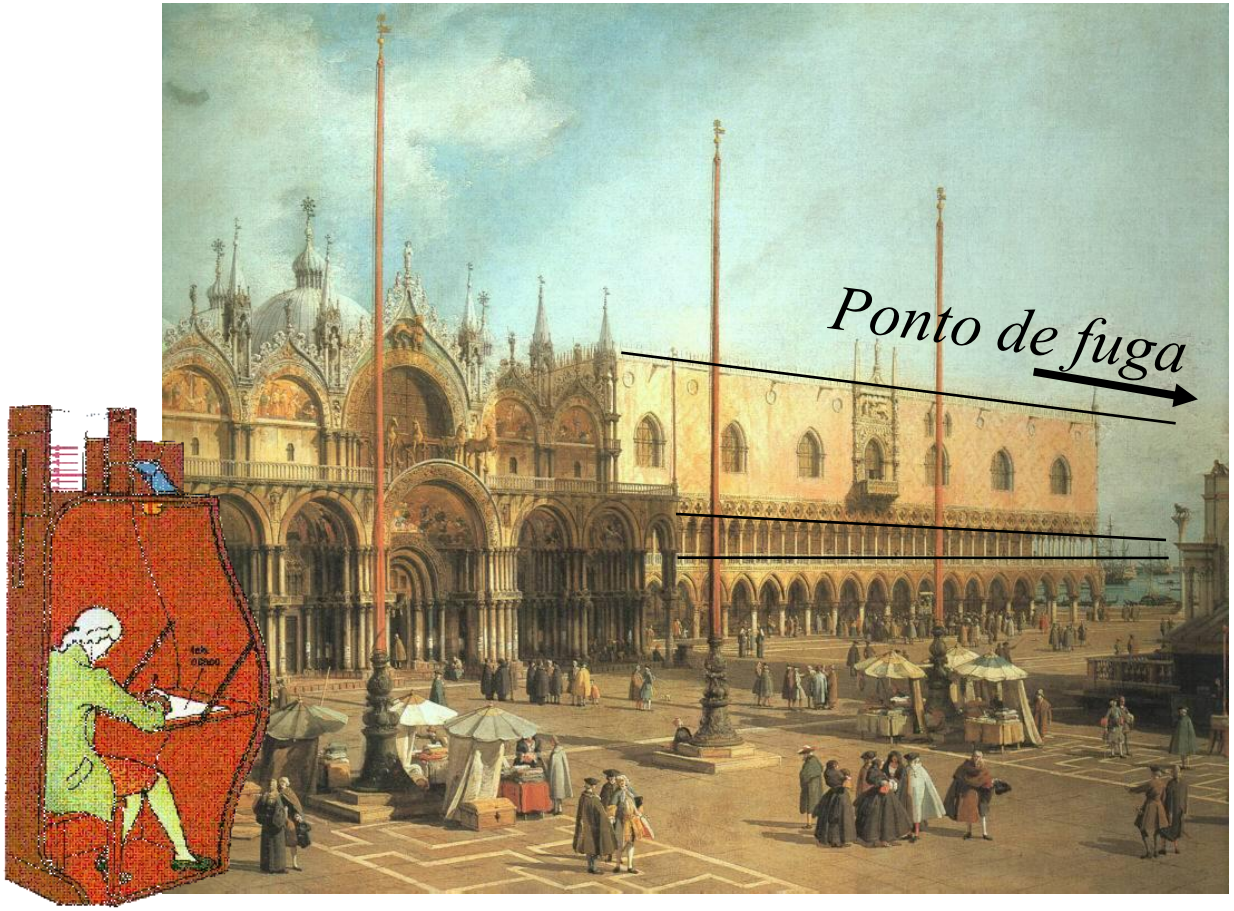


Projeções e câmera virtual: *câmeras e geometria projetiva*

- O modelo matemático que rege os processos de geração de imagens, tanto em câmeras reais quanto em câmeras virtuais é o de *projeção*.

- Por este motivo, a *Geometria Projetiva* tem um papel fundamental na geração de imagens a partir de objetos tridimensionais.

Projeções e câmera virtual: *câmeras e geometria projetiva*



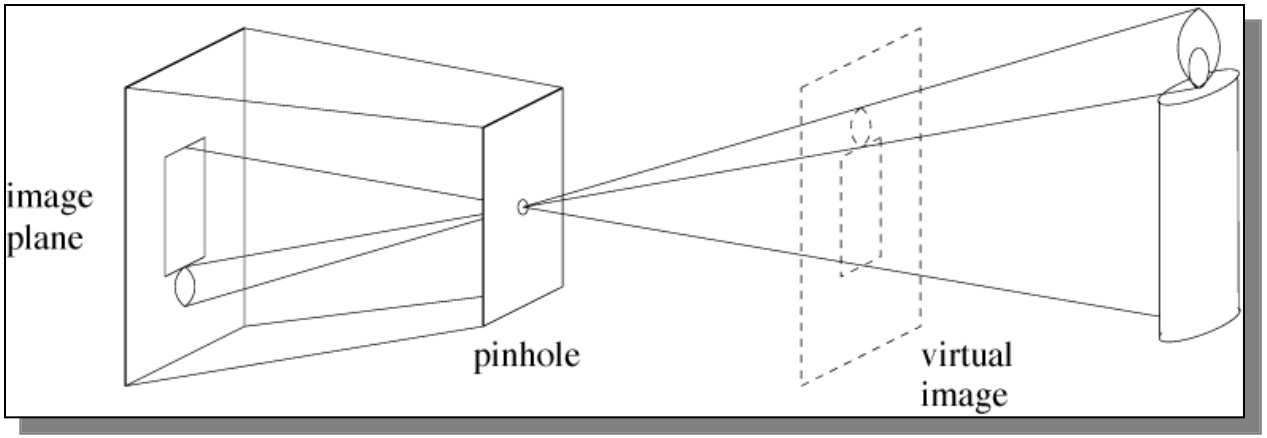
Canaletto (Giovanni Antonio Canal) (1697-1768).

Projeções e câmera virtual: *modelo de câmera*

- Uma câmera pode ser caracterizada matematicamente através de seus parâmetros *intrínsecos* e *extrínsecos*.
- Os *parâmetros intrínsecos* correspondem aos parâmetros internos da câmera como a distância focal, tamanho do pixel e as distorções de lente.
- Os *parâmetros extrínsecos* correspondem a orientação e posição da câmera em relação a um sistema de referência no mundo.

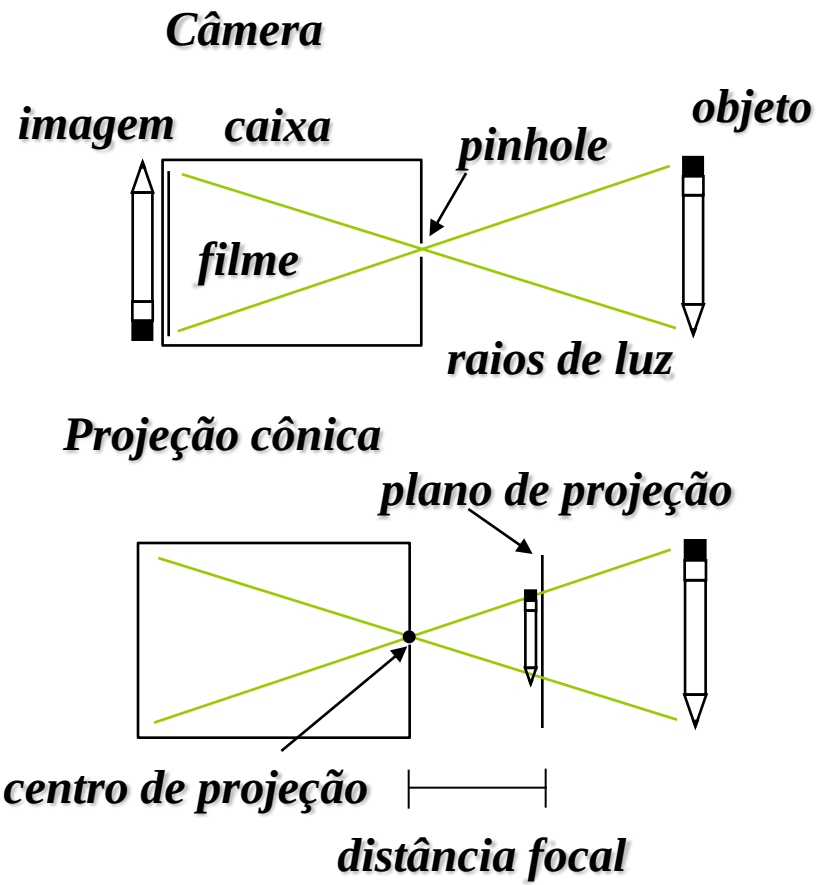
Projeções e câmera virtual: *modelo de câmera – câmera de furo*

- O modelo que utilizaremos para a definição da câmera virtual é baseado em uma *câmera de furo*.
- Neste modelo, a luz passa pelo orifício *O* em um dos lados de uma caixa e projeta a imagem do plano oposto.



Projeções e câmera virtual: *modelo de câmera – câmera de furo*

- A geometria do modelo de câmera de furo se reduz a *projeção cônica*.
- Para evitar que a imagem seja invertida, deslocamos o plano de projeção que é posicionado entre o *centro de projeção* e o objeto.
- O único parâmetro intrínseco é a *distância focal*.



Projeções e câmera virtual: *especificação de câmera virtual*

- Existem diversas formas de especificar uma câmera virtual que segue o modelo da câmera de furo (*pinhole*).

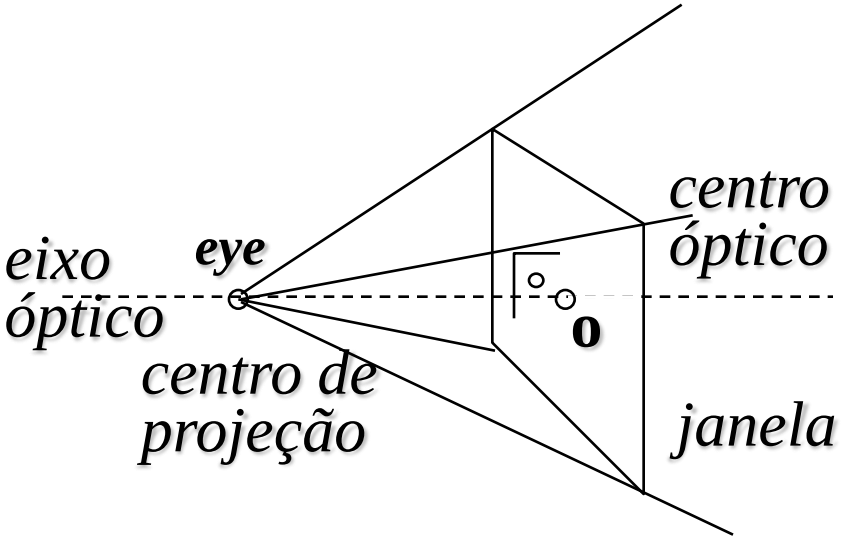
- O modelo de câmera e o esquema utilizado para sua especificação, aqui apresentados, são baseados na câmera virtual utilizada na biblioteca *OpenGL*.

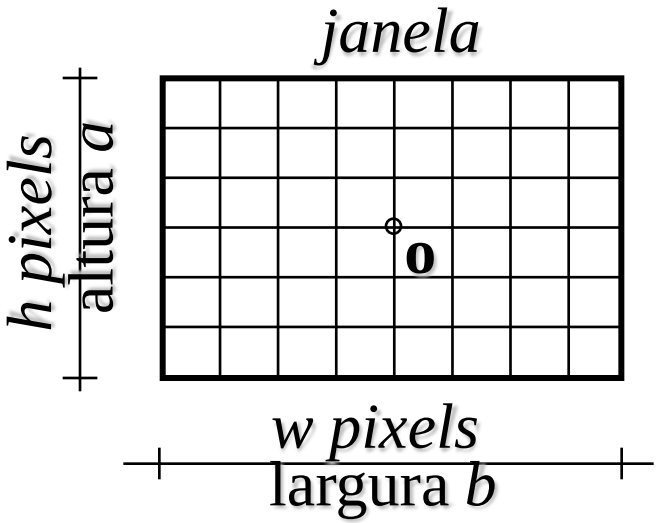
Projeções e câmera virtual: *modelo de câmera virtual*

- Os parâmetro intrínsecos da câmera são definidos pelo *centro de projeção*, o *eixo óptico* e as dimensões da tela virtual (um *retângulo de* $w \times h$ *pixels*).

- O eixo óptico é determinado pela reta que passa pelo centro de projeção e fura a tela virtual em um ponto denominado *centro óptico* ou *ponto principal*.

Projeções e câmera virtual: *modelo de câmera virtual*



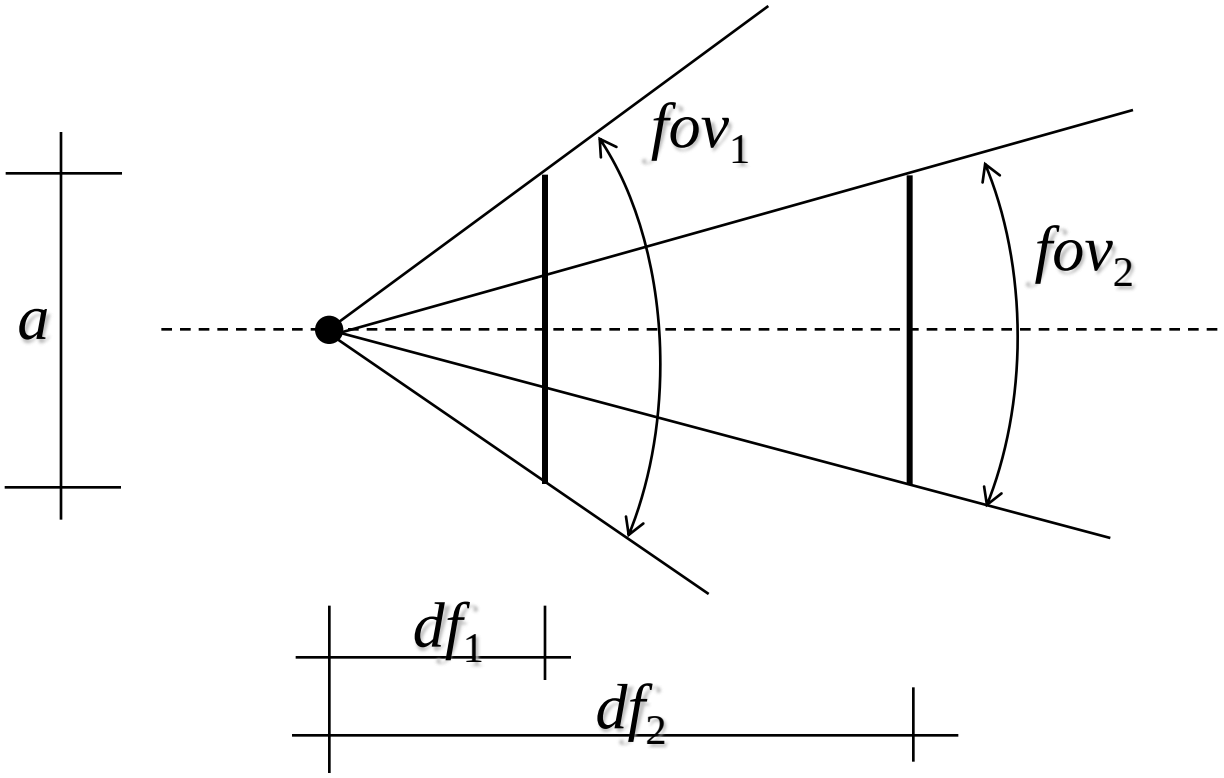


Projeções e câmera virtual: *modelo de câmera virtual*

- Um caso bastante comum é aquele em que o eixo óptico é perpendicular à tela virtual e intercepta exatamente seu centro.

- Nestes casos o tamanho do retângulo e a sua distância ao centro de projeção definem a *abertura da câmera* ou *campo de visão* (*fov*).

Projeções e câmera virtual: *modelo de câmera virtual*

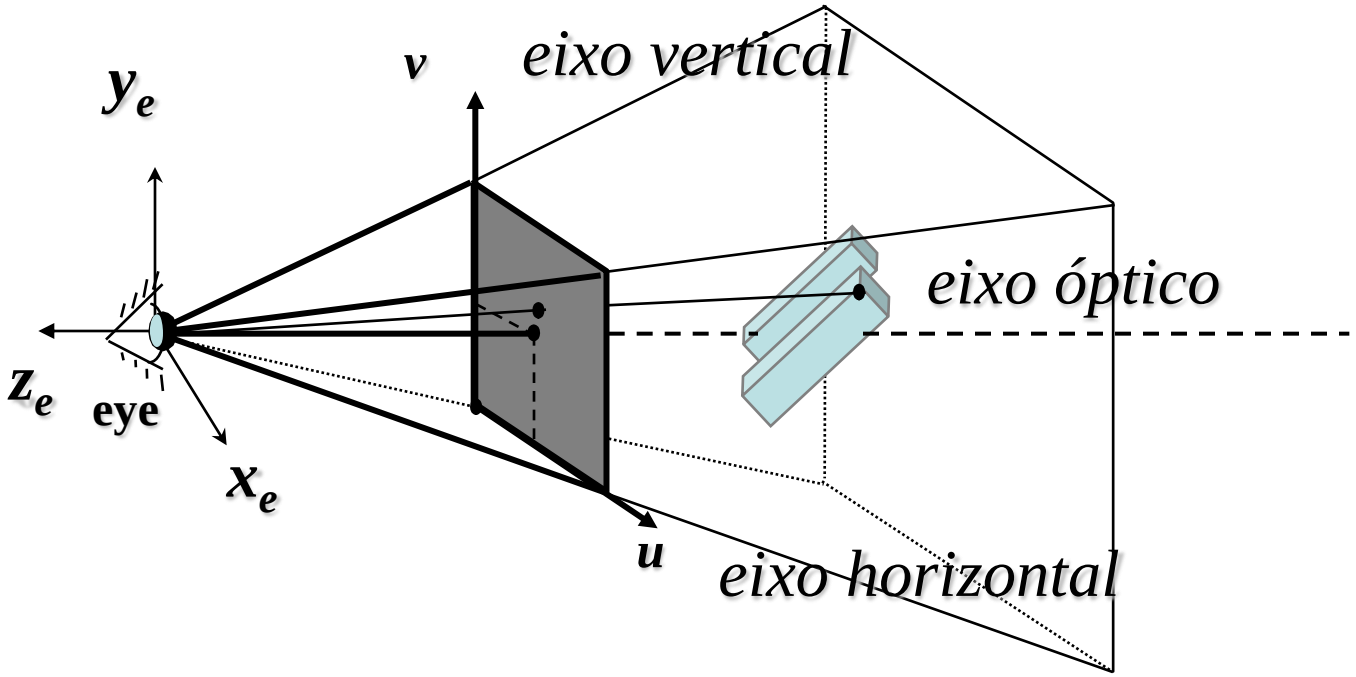


Projeções e câmera virtual: *modelo de câmera virtual*

- O eixo óptico e as direções dos lados do retângulo da tela definem três direções que definem os *eixos da câmera* $x_e y_e z_e$ e os *eixos da imagem* uv.

- A escolha do eixo z_e voltado para trás é feito para que o referencial tenha orientação positiva (mão direita), isto é, seja *dextrógiro*.

Projeções e câmera virtual: *modelo de câmera virtual*



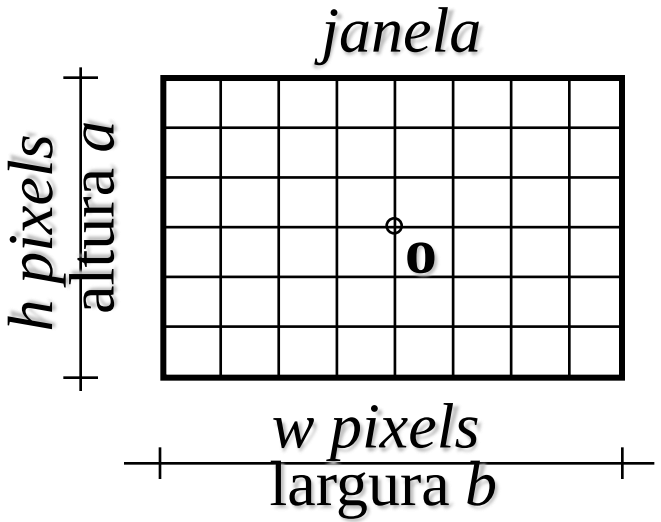
Projeções e câmera virtual: *especificação da câmera virtual*

- Os seguintes parâmetros são parâmetros internos da câmera virtual:
  - df – distância focal
  - fov – campo de visão
  - a e b – altura e largura da tela
  - w e h – numero de pixels na horizontal e vertical
- Esses parâmetros *não são independentes*.
- As relações entre os parâmetros permitem escolher quais especificam a câmera e quais ficam definidos automaticamente.

Projeções e câmera virtual: *especificação da câmera virtual*

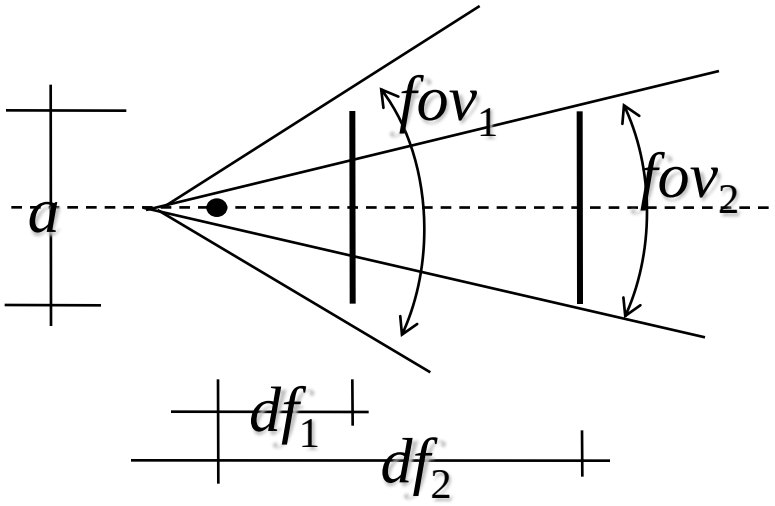
- Na maioria dos dispositivos o pixel é quadrado.
- Nestes casos, a razão entre os lados da janela é dada por:

$$b = \frac{w}{h} a$$



Projeções e câmera virtual: *especificação da câmera virtual*

- Uma outra expressão importante é a que relaciona o campo de visão *fov*, o número de pixels na vertical a e a distância focal *f*.



$$\frac{a}{2df} = \tan\left(\frac{fov}{2}\right)$$

$$a = 2df \tan\left(\frac{fov}{2}\right)$$

Projeções e câmera virtual: *especificação da câmera virtual*

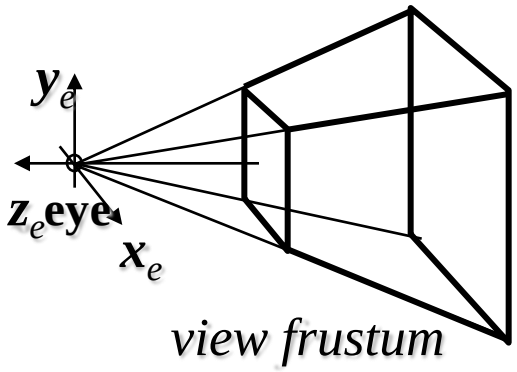
- Uma boa escolha para parametrizar uma câmera é utilizar os parâmetros *fov* e a *razão de aspecto* ***w/h*** entre a largura e altura da tela.

- Estes parâmetros, juntamente com duas distâncias *near* e *far* em relação ao centro de projeção são os parâmetros usados pela função da *OpenGL* :

```
void gluPerspective(Gldouble fovy,Gldouble aspect,
Gldouble near, Gldouble far);
```

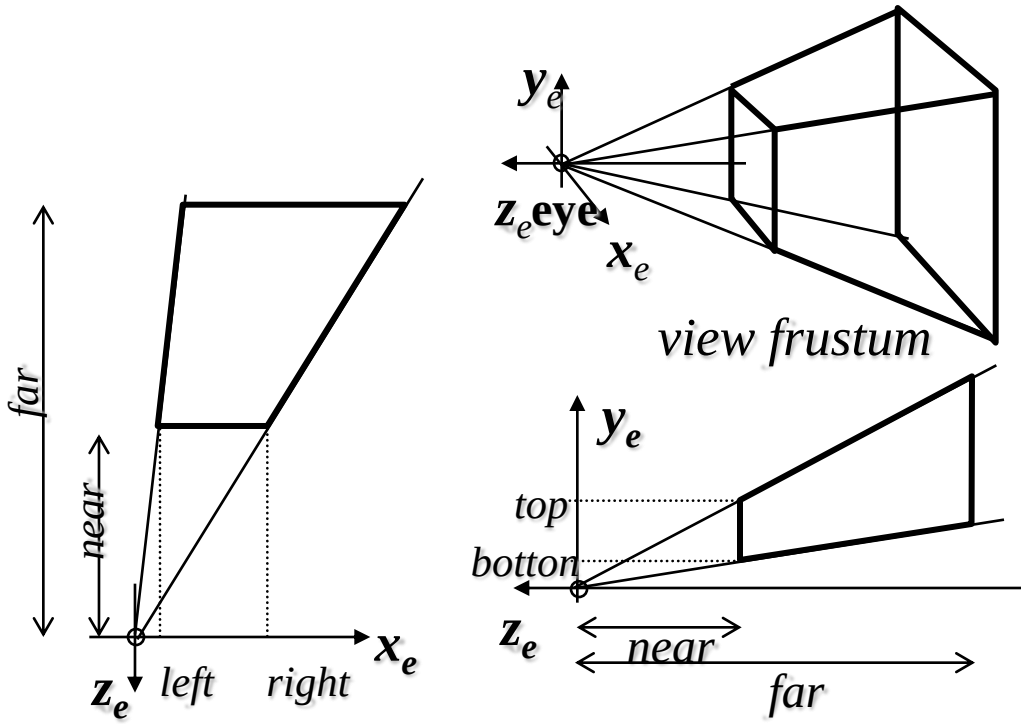
Projeções e câmera virtual: *especificação da câmera virtual*

- Os parâmetros descritos determinam um *volume de visualização* (*frustum*) na forma de um tronco de pirâmide reta.



Projeções e câmera virtual: *especificação da câmera virtual*

- Precisamos de um conjunto de parâmetros mais gerais quando o eixo ótico não atravessa o centro do plano de projeção.



Projeções e câmera virtual: *especificação da câmera virtual*

- Podemos utilizar as coordenadas dos cantos inferior esquerdo (*left*, *bottom*) e superior direito (*right*, *top*) que definem a tela virtual, juntamente com os planos em *–near* e *–far*.
- Estes parâmetros são utilizados pela função *glFrustum* da biblioteca *OpenGL*:

```
void glFrustum(GLdouble left,GLdouble right,  GLdouble
bottom, GLdouble top, GLdouble near, GLdouble far);
```

Projeções e câmera virtual: *sistema de coordenadas da câmera virtual*

- Até o momento especificamos uma câmera na posição padrão, o que é de pouca utilidade.

- Precisamos agora definir os parâmetros externos para que possamos *posicionar e orientar a câmera* no espaço como um objeto qualquer.

Projeções e câmera virtual: *sistema de coordenadas da câmera virtual*

- A posição da câmera é dada pelo proprio vetor (eye_x, eye_y, eye_z).
- O eixo z_e é definido pelo vetor normalizado correspondente a direção do eixo óptico.
- O eixo óptico, por sua vez, é dado pela reta que passa pelo *eye* e pelo *center*.

$$z_e = \frac{1}{\|eye - center\|}(eye - center)$$

Projeções e câmera virtual: *sistema de coordenadas da câmera virtual*

- O vetor Up é um vetor qualquer posicionado no plano $x_e y_e$.
- Logo o vetor unitário x_e pode ser obtido através da normalização de $up \times z_e$.

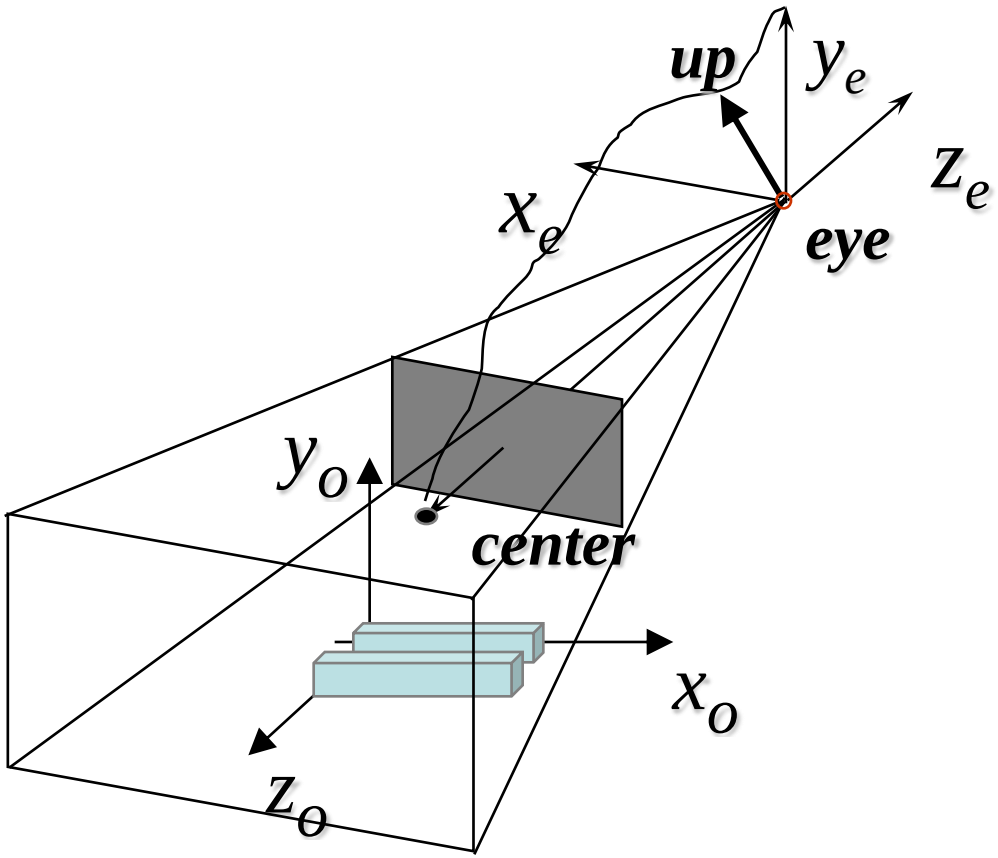
$$x_e = \frac{1}{\|up \times z_e\|}(up \times z_e)$$

Projeções e câmera virtual: *sistema de coordenadas da câmera virtual*

- Finalmente, o vetor y_e é obtido pelo produto vetorial $z_e \times x_e$ que deve ser normalizado como anteriormente.
- O uso dos parâmetros *eye*, *center* e *up* na definição do sistema de coordenadas da câmera é o mesmo utilizado pela função *gluLookAt* da biblioteca utilitária *GLU* da *OpenGL*.

```
void gluLookAt(GLdouble eyex, GLdouble eyey, GLdouble
eyez, GLdouble centerx, GLdouble centery, GLdouble
centerz, GLdouble upx, GLdouble upy, GLdouble upz);
```

Projeções e câmera virtual: *sistema de coordenadas da câmera virtual*



Projeções e câmera virtual: *transformações de visualização*

- O processo de geração de imagens envolve, além do processo de projeção, transformações entre os seguintes sistemas de coordenadas:
  - Sistema de coordenadas do objeto.
  - Sistema de coordenadas do mundo.
  - Sistema de coordenadas da câmera.
  - Sistema de coordenadas da tela.

Projeções e câmera virtual: *coordenadas do objeto para coordenadas do mundo*

- A mudança das coordenas de um objeto no seu sistema próprio, para as coordenadas do sistema do mundo (global) é obtida através de uma matriz de transformação M_{obj}.

- Estas transformações são exatamente as transformações de rotação, escala, cisalhamento e etc. que vimos anteriormente

Projeções e câmera virtual: *coordenadas do mundo para coordenadas da câmera*

- A transformação das coordenadas do mundo para as coordenadas da câmera, dos vértices de uma primitiva, consiste na composição de duas transformações, nesta ordem:
  - *Uma translação que leve o observador (eye) para a origem.*
  - *Uma rotação que alinhe os eixos da câmera com os eixos do mundo.*

Projeções e câmera virtual: *coordenadas do mundo para coordenadas da câmera*

- A matriz que representa esta composição é:

$$L_{at} = R_{ew} \circ T_{ew} = \begin{bmatrix} x_{ex} & x_{ey} & x_{ez} & 0 \\ y_{ex} & y_{ey} & y_{ez} & 0 \\ z_{ex} & z_{ex} & z_{ex} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -eye_x \\ 0 & 1 & 0 & -eye_y \\ 0 & 0 & 1 & -eye_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- O entendimento da translação é trivial.
- A matriz de rotação R_{ew} é a matriz inversa da matriz R_{we} que transforma a base do sistema do mundo $x_w y_w z_w$ para a base do sistema da câmera.

Projeções e câmera virtual: *coordenadas do mundo para coordenadas da câmera*

- As colunas da matriz R_{we} são os vetores da base do mundo transformados para a base da câmera.

$$R_{we} = \begin{bmatrix} x_{ex} & y_{ex} & z_{ex} & 0 \\ x_{ey} & y_{ey} & z_{ey} & 0 \\ x_{ez} & y_{ez} & z_{ez} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, R_{ew} = R_{we}^{-1} = R_{we}^{T} = \begin{bmatrix} x_{ex} & x_{ey} & x_{ez} & 0 \\ y_{ex} & y_{ey} & y_{ez} & 0 \\ z_{ex} & z_{ex} & z_{ex} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Como R_{we} é ortogonal, sua inversa, isto é, R_{ew} é dada por ${R_{we}}^{T}$.

Projeções e câmera virtual: *a matriz modelview*

- No sistema gráfico definido pela *OpenGL* existe uma única matriz que realiza a transformação de coordenadas do sistema do objeto para o sistema da câmera.

- Esta matriz é denominada *Modelview*.

Projeções e câmera virtual: *a matriz modelview*

- Ela realiza as transformações de modelagem e a transformação das coordenadas do mundo nas coordenadas da câmera.

- Logo, a *modelview* é dada por $M_{view}=L_{at} \circ M_{obj}$, isto é, a composição da matriz de transf. de câmera com a matriz de modelagem do objeto.

Projeções e câmera virtual: *a matriz modelview*

- Como na OpenGL acumulamos as matrizes através de uma multiplicação à direita, devemos:
  - Definir primeiramente a transformação de câmera através da *glLookAt*, por exemplo.
  - Aplicar as transformações de modelagem aos objetos.
- Quando vários objetos precisam ser instanciados podemos utilizar o esquema de pilha para armazenar matrizes que serão posteriormente recuperadas.

Projeções e câmera virtual: *a transformação de projeção*

- A transformação de projeção cônica pode ser facilmente definida na posição canônica.

- Para projetarmos um ponto genérico no plano *near*, basta escalarmos as coordenadas por um fator que leve a coordenada z para a posição $-n$.

- Ou seja, as coordenadas do ponto p_p na projeção de um ponto p são:

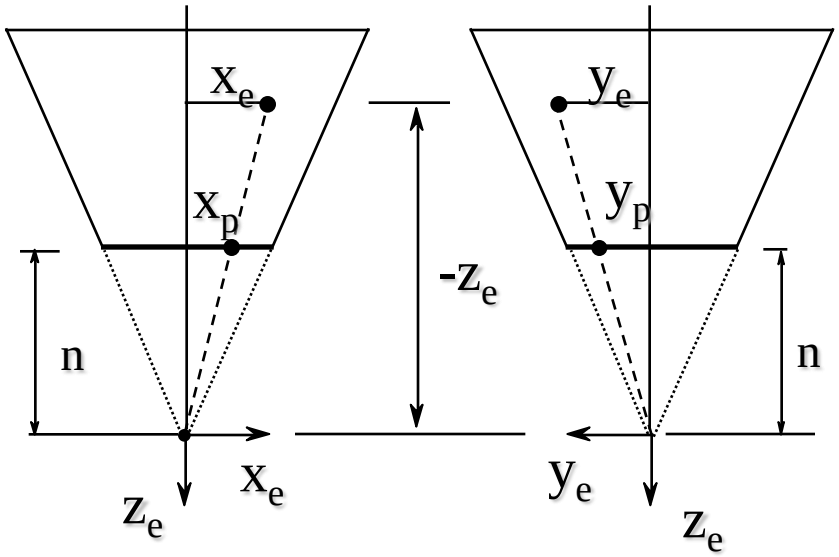
$$p_p = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \frac{n}{-z_e} \begin{pmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{pmatrix}$$

Projeções e câmera virtual: *a transformação de projeção*

- Esta mesma transformação também pode ser derivada por semelhança de triângulos.

$$\frac{x_p}{x_e} = \frac{n}{-z_e}$$

$$x_p = \frac{n}{-z_e} x_e$$



$$\frac{y_p}{y_e} = \frac{n}{-z_e}$$

$$y_p = \frac{n}{-z_e} y_e$$

Projeções e câmera virtual: *a transformação de projeção*

- Finalmente, podemos escrever a transformação como uma transformação projetiva (em coordenadas homogêneas), conforme abaixo:

$$\begin{bmatrix} wx_p \\ wy_p \\ wz_p \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} nx_e \\ ny_e \\ nz_e \\ -z_e \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{pmatrix} = \frac{1}{-z_e} \begin{pmatrix} nx_e \\ ny_e \\ nz_e \end{pmatrix}$$

Projeções e câmera virtual: *a transformação de projeção*

- Um dos problemas com esta formulação é o de que *perdemos a informação de profundidade dos pontos* já que as coordenadas z são levadas no plano $z = -n$.

- Por este motivo, *não seremos capazes de determinar quando uma superfície está a frente de uma outra*.

Projeções e câmera virtual: *a transformação de projeção*

- Para evitar este problema utilizamos uma transformação projetiva que *leva o centro de projeção para o infinito*.

- Este processo *transforma a transformação projetiva em uma transformação paralela ortográfica*.

- Lembremos que uma projeção cônica pode ser definida como a composição de uma transformação projetiva com uma transformação paralela.

Projeções e câmera virtual: *a transformação de projeção*

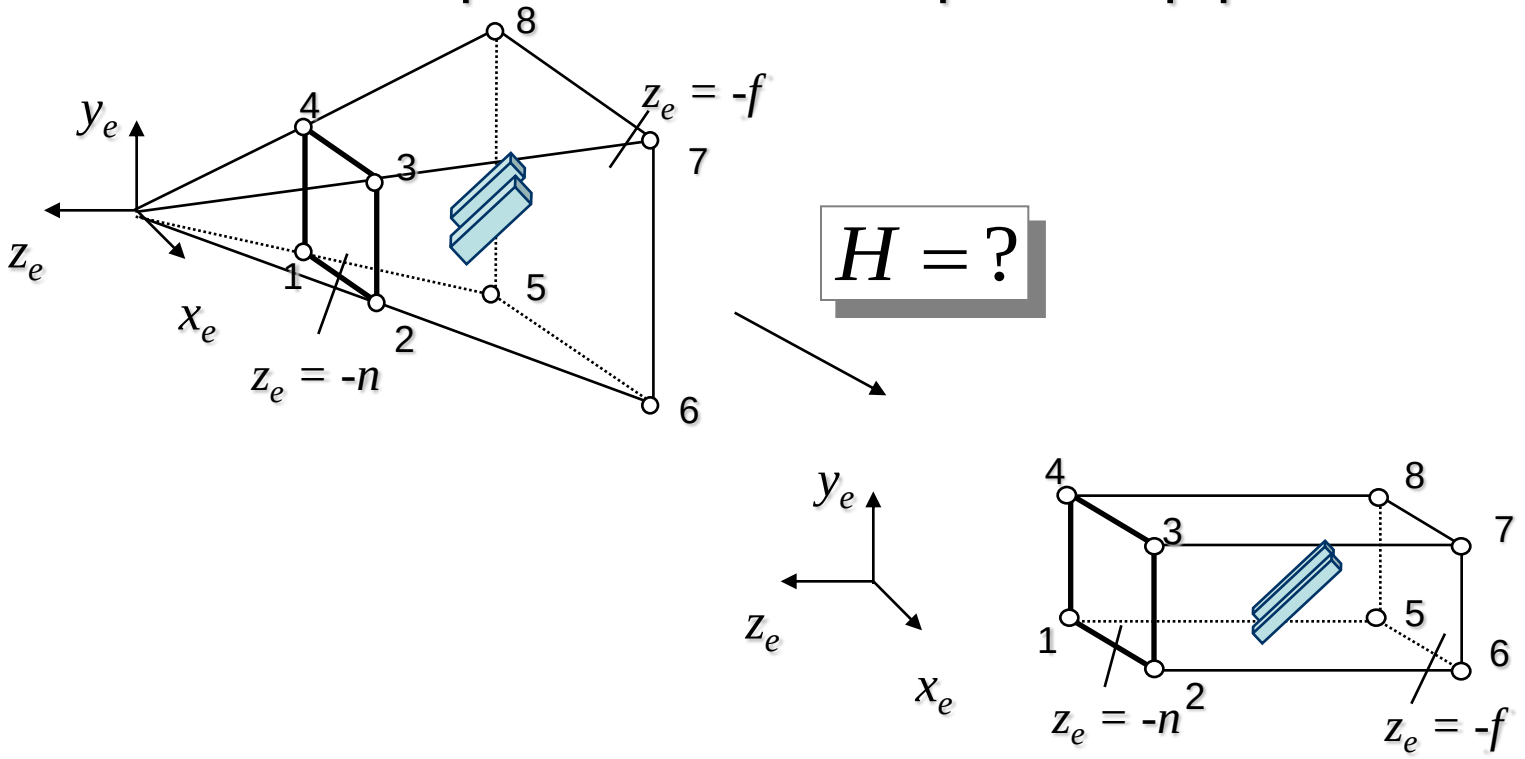
- A transformação projetiva *torna os raios projetores paralelos*.

- As coordenadas x e y dos vértices paralelos ao plano de projeção tem seus valores determinados corretamente.

- Além disso, *as profundidades relativas são preservadas na coordenada* z.

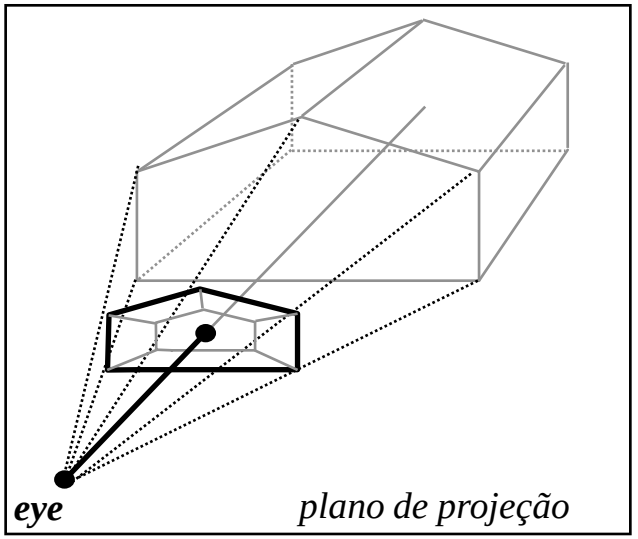
Projeções e câmera virtual: *a transformação de projeção*

- Vejamos como determinar a matriz que transforma um tronco de pirâmide em um paralelepípedo.

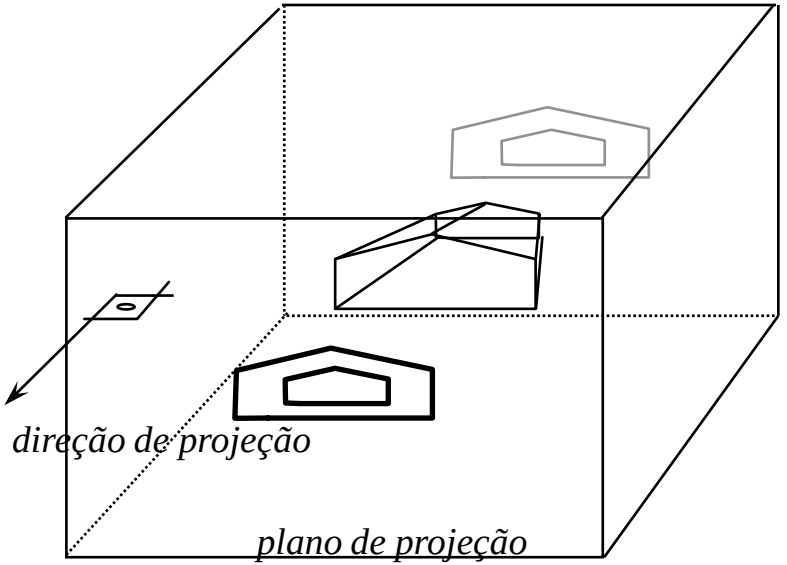


Projeções e câmera virtual: *a transformação de projeção*

Projeção cônica



Projeção ortográfica



Projeções e câmera virtual: *a transformação de projeção*

- Para determinar a matriz, partimos de uma matriz de transformação projetiva genérica em coordenadas homogêneas.

$$H = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n+f & nf \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

- (x_i,y_i,z_i) são as coordenadas cartesianas do ponto e (x_i',y_i',z_i') são as coordenadas do ponto transformado.

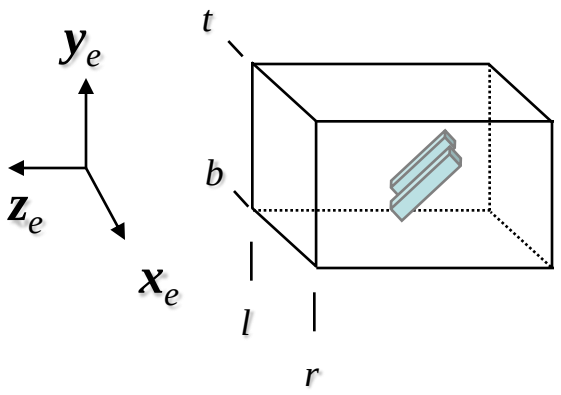
Projeções e câmera virtual: *transformação de normalização*

- Para efetuar operações de forma mais simples, normalizamos o paralelepípedo de visão de forma que se torne um cubo definido por [-1,1]× [-1,1] × [-1,1].

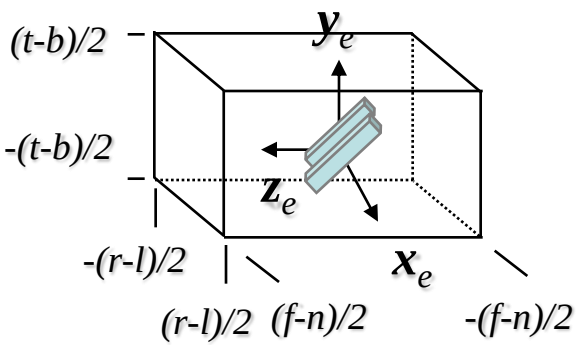
- Para isso, aplicamos as seguintes transformações:

  - *Transladamos* o centro do paralelepípedo para a origem.
  - *Aplcamos uma escala* sobre paralelepípedo de forma que se torne um cubo normalizado.
  - *Espelhamos* o cubo resultante em relação ao plano xy para que os menores z representem os pontos mais próximos.

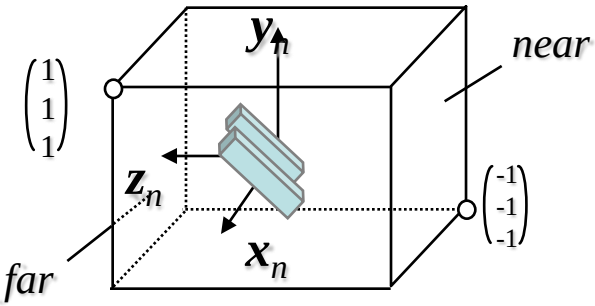
Projeções e câmera virtual: *transformação de normalização*



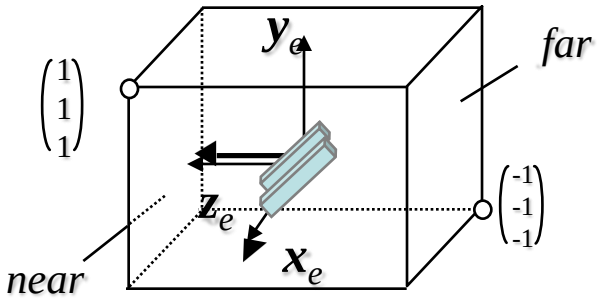
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -(r+l)/2 \\ 0 & 1 & 0 & -(t+b)/2 \\ 0 & 0 & 1 & (f+n)/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 2/(r-l) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/(t-b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/(f-n) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Projeções e câmera virtual: *transformação de normalização*

- A matriz associada a *transformação de normalização* é dada pela seguinte composição:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/(r-l) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/(t-b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/(f-n) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -(r+l)/2 \\ 0 & 1 & 0 & -(t+b)/2 \\ 0 & 0 & 1 & (f+n)/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{f-n} & -\frac{f+n}{f-n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

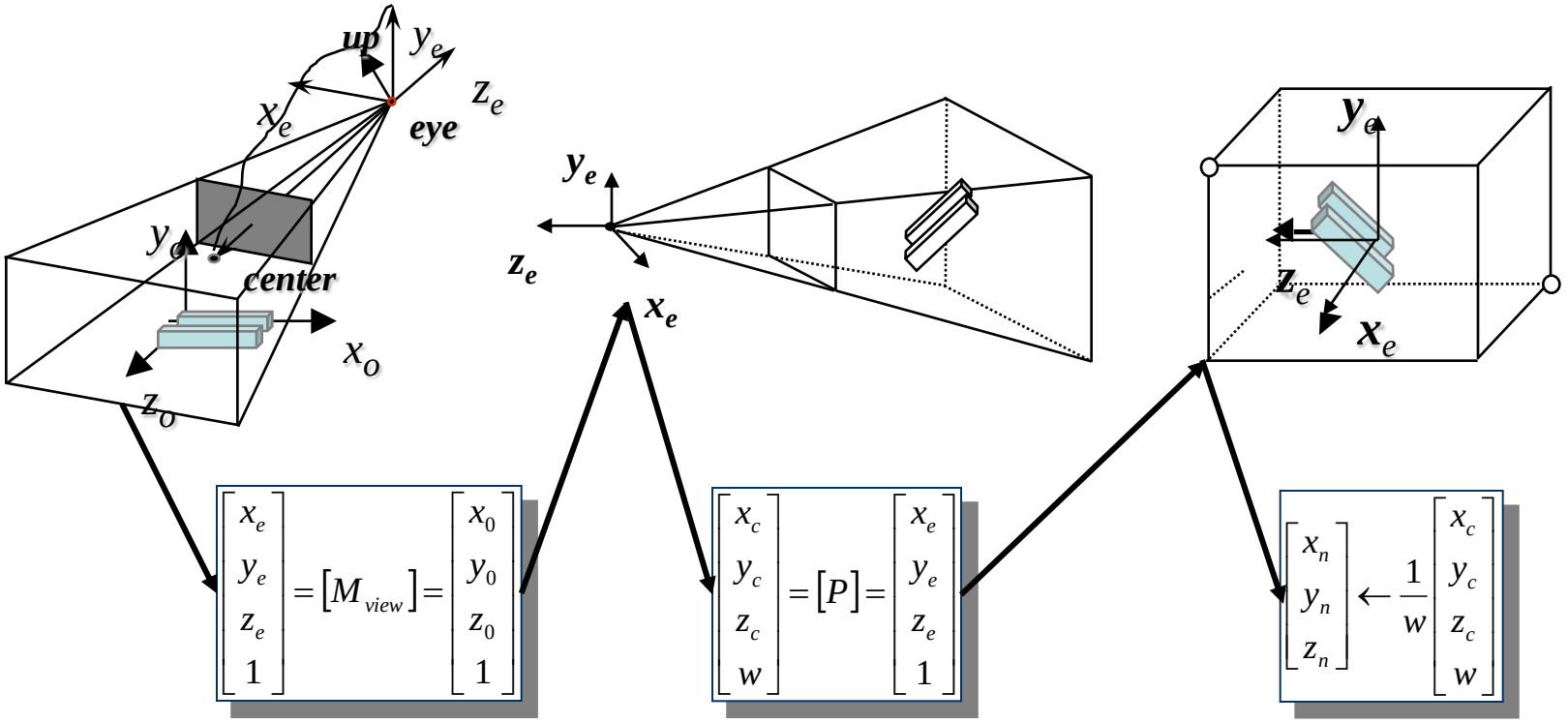
Projeções e câmera virtual: *transformação de normalização*

- Multiplicando a matriz de normalização pela matriz de projeção chegamos à

$$P = NH = \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & -\frac{2n}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

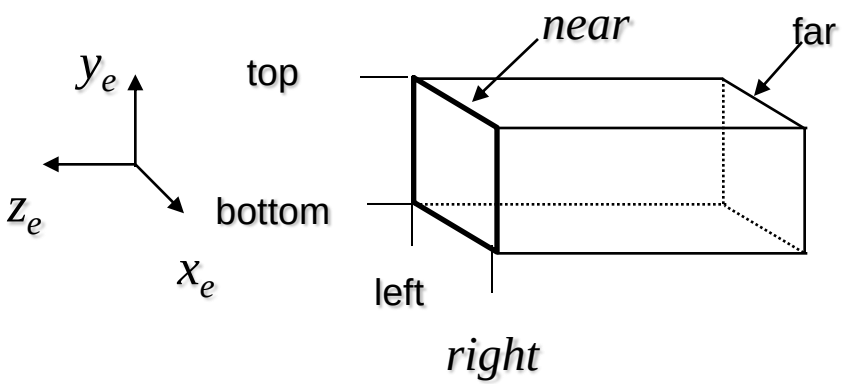
- Esta é a matriz que a especificação da OpenGL apresenta com a *matriz correspondente a função glFrustum*.

Projeções e câmera virtual: *resumo*



Projeções e câmera virtual: *projeção ortográfica*

- Na projeção ortográfica, os raios projetores não convergem para um centro de projeção.
- Ao contrário, são paralelos ao eixo z e ortogonais ao plano de projeção $z=near$.



Projeções e câmera virtual: *projeção ortográfica*

- O paralelepípedo de visão associado a um projeção ortográfica da *OpenGL* é o mesmo que resulta da transformação do troco de pirâmide pela transformação H.

- Logo, a matriz de projeção paralela, simplemente *leva o paralelepípedo para o cubo no espaço normalizado*.

Projeções e câmera virtual: *projeção ortográfica*

- A matriz de projeção paralela é a seguinte:

$$N = \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{f-n} & -\frac{f+n}{f-n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- As funções da OpenGL que produzem tal matriz são:

```
glOrtho(GLdouble left,GLdouble right,  GLdouble bottom,
GLdouble top, GLdouble near, GLdouble far)
```

```
glOrtho2D(GLdouble left,GLdouble right,  GLdouble bottom,
GLdouble top)
```

Projeções e câmera virtual: *projeção ortográfica*

- A projeção ortográfica, apesar de não ser tão realista tem muitas aplicações em engenharia e arquitetura.

- Ela *preserva paralelismo entre linhas e permite a definição de escala* tornando possível a tomada de medidas diretamente sobre a planta.