# Computação Gráfica I

Professor:

Anselmo Montenegro
www.ic.uff.br/~anselmo

Conteúdo:

- Objetos gráficos planares

# <u>Objetos gráficos</u>: conceitos

- O conceito de *objeto gráfico* é fundamental para a Computação Gráfica e áreas afins.

- Um objeto gráfico representa a *geometria* (forma) e os *atributos* (propriedades) de um objeto do mundo real.

# Objetos gráficos: conceitos

*Objeto gráfico 3D*

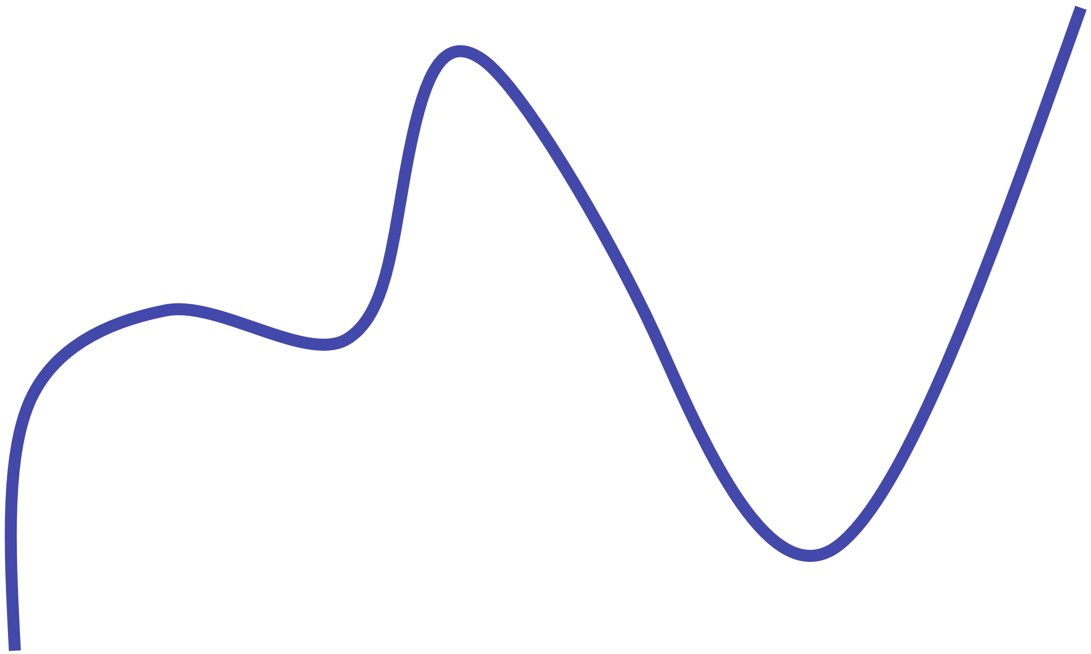
*Objeto gráfico 2D*

# Objetos gráficos: conceitos

- A área que lida com a modelagem de objetos gráficos é denominada *Modelagem Geométrica*.

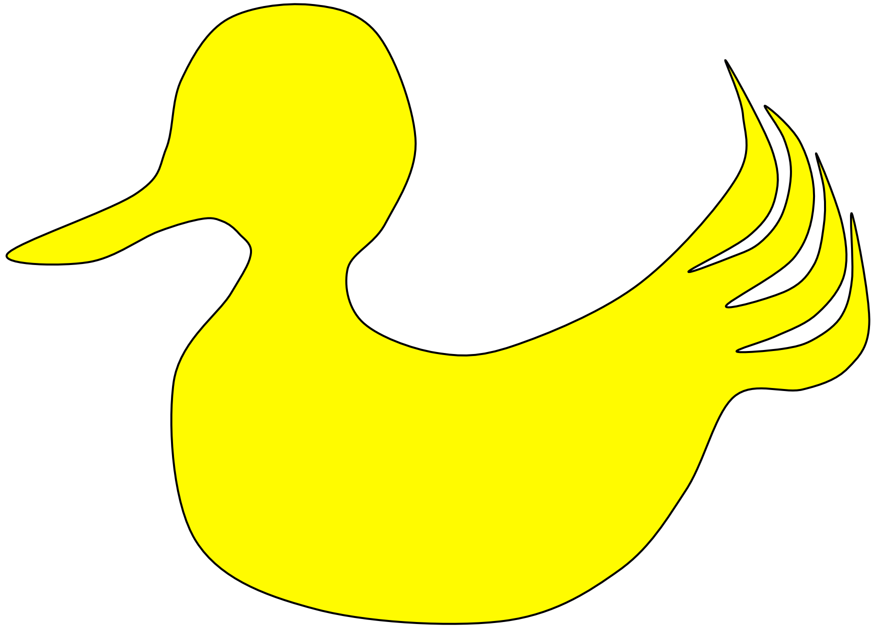
- *Sistemas gráficos* são sistemas de software que processam, manipulam e visualizam objetos gráficos.

# Objetos gráficos: exemplos



*Curva no plano*

# **Objetos gráficos: exemplos**



*Região do plano com atributo de cor*

## Objetos gráficos: exemplos

*Imagem em tons de cinza (monocromática)*

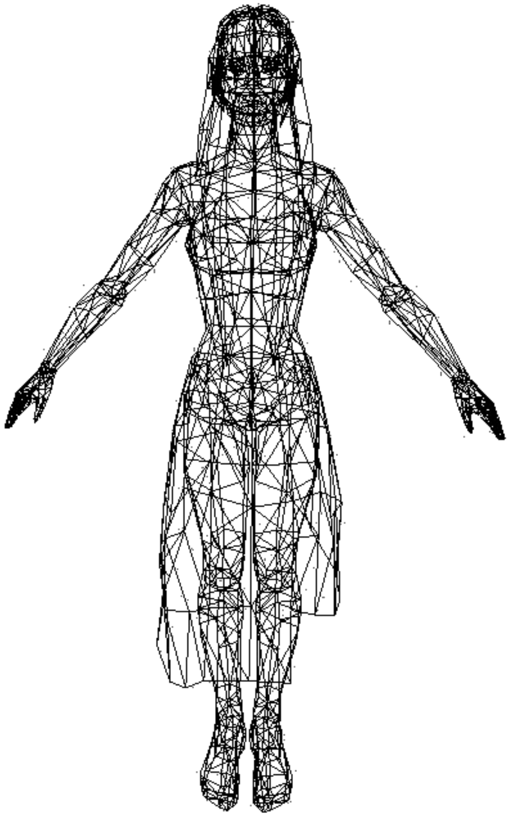
## Objetos gráficos :*definições*

- Um objeto gráfico é definido por um *subconjunto* $S \subset R^m$ e uma função $f: S \subset R^m \rightarrow R^n$.

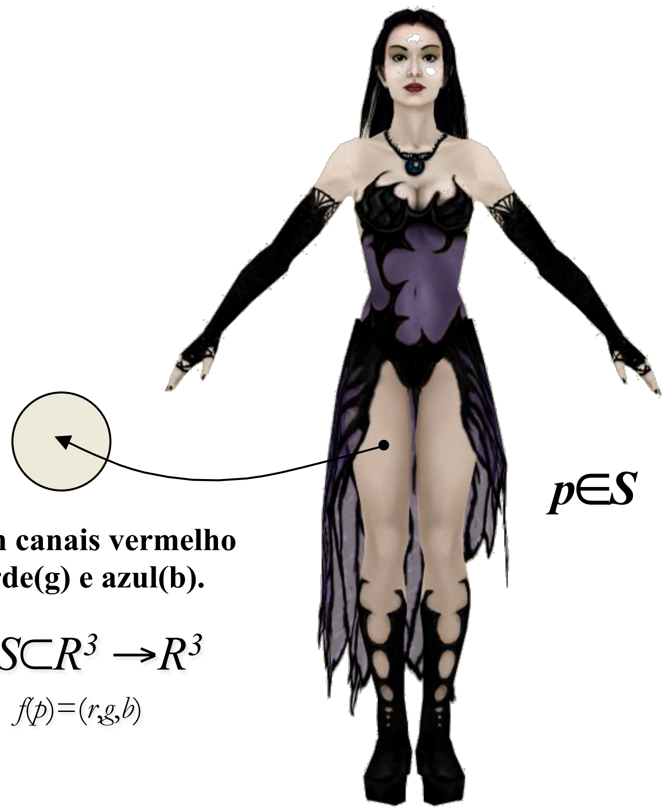
- O conjunto S é denominado *suporte geométrico* de um objeto gráfico.

- A função f é denominada *função de atributos* do objeto gráfico.

# Objetos gráficos :*definições*



Geometria - $S \subset R^3$




**Cor em canais vermelho (r), verde(g) e azul(b).**

$$f\colon S \subset R^3 \rightarrow R^3$$

$$f(p)=(r,g,b)$$

Objeto gráfico – geometria + atributos

## <u>Objetos gráficos</u> :*definições*

- A *dimensão* do objeto gráfico é dada pela dimensão do suporte geométrico.

- Um objeto gráfico é *planar* se a dimensão do *espaço ambiente* é 2 e *espacial* se a dimensão é $\geq 3$.

# Objetos gráficos planares: *curvas*

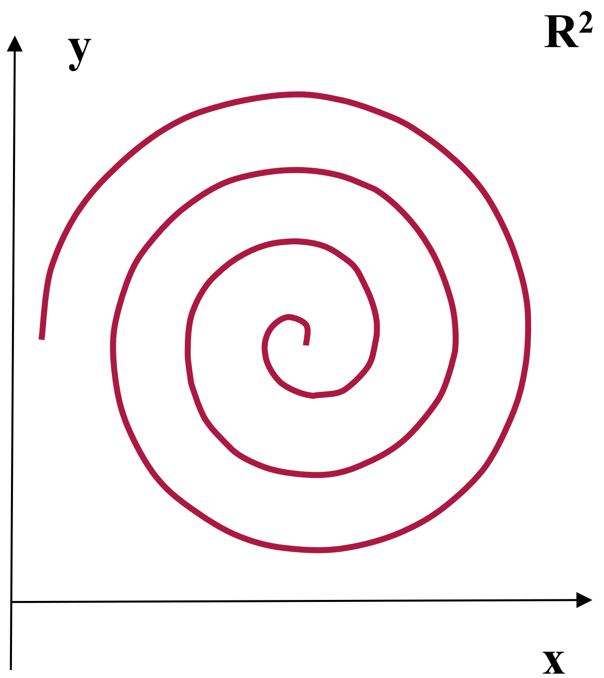
- São objetos gráficos *unidimensionais*.
- Base para a descrição de formas em Computação Gráfica:
  - Simples: círculos, elipses, diagramas.
  - Complexas: aeronaves, navios, dutos.

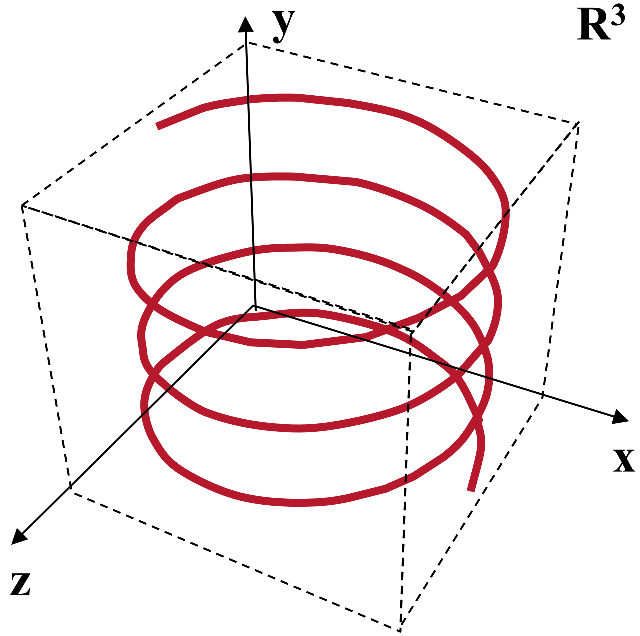
## <u>Objetos gráficos planares</u>: *curvas*

- Aplicações:
  - Descrição de *objetos sintéticos*.
  - *Modelagem e visualização* de dados e fenômenos científicos.
  - Representação de *trajetórias e animação*.

# Objetos gráficos planares: *curvas*

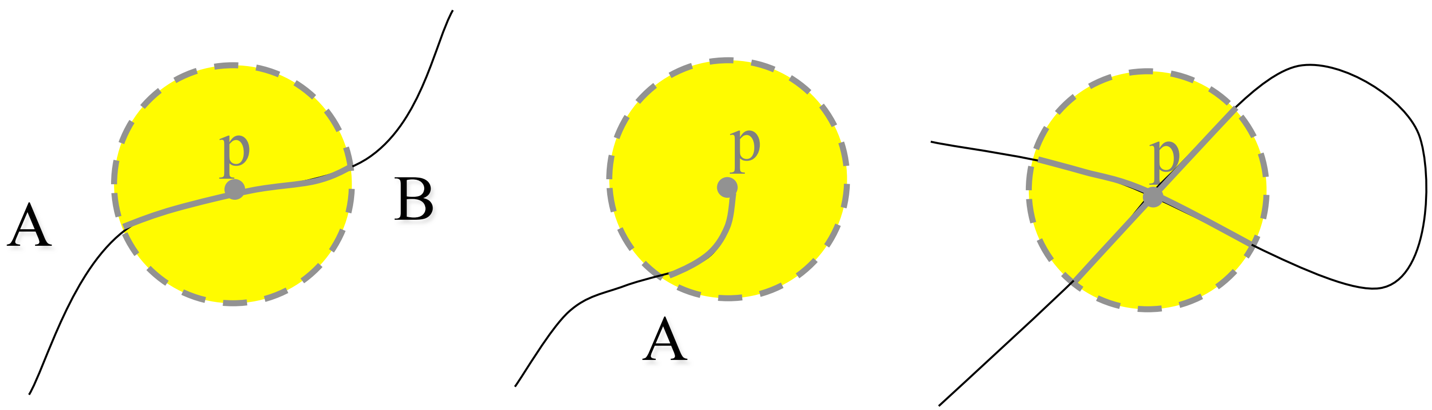
- Podem estar definidas em um espaço bidimensional ou de maior dimensão:



# Objetos gráficos planares: *curvas planares*

- **Curva planar (simples):** *subconjunto $c \subset R^2$* cujas vizinhanças em cada ponto tem características de um *intervalo* aberto (0,1) ou semi-aberto [0,1).




Curva não simples
(topologia da letra "X")

## Objetos gráficos planares: *curvas planares*

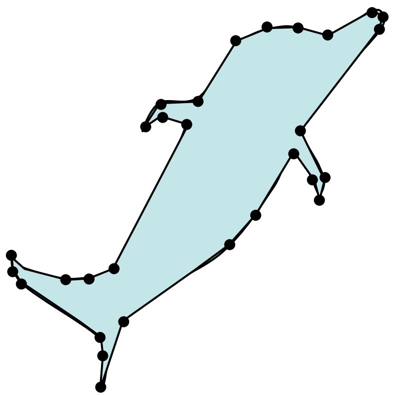
- Uma curva planar segundo a definição é denominada *curva topológica planar*.

- Curvas topológicas planares *não possuem auto-interseção*.

- Uma *curva planar fechada* tem a topologia de um círculo.

# <u>Objetos gráficos planares</u>: *representação de curvas*

- Curvas podem ser aproximadas através de segmentos de retas.



- Curvas mais complexas requerem formas mais eficientes de representação.

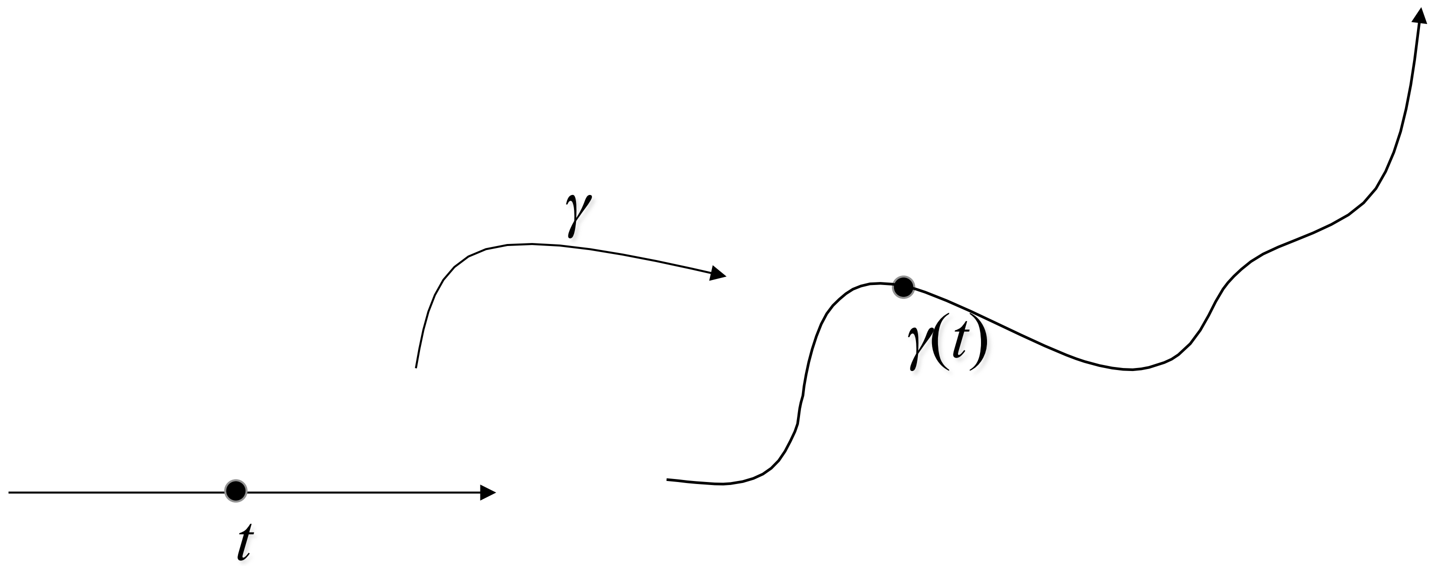
## <u>Objetos gráficos planares</u>: *representação de curvas*

- Uma alternativa consiste em representar curvas analiticamente através de *equações*.

- Temos duas formas clássicas de representação:
  - *Paramétrica*.
  - *Implícita*.

## Objetos gráficos planares: *curvas planares paramétricas*

- A descrição *paramétrica* de uma curva planar é uma função $\gamma : I \subset R \rightarrow R^2$ tal que $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.



## <u>Objetos gráficos planares</u>: *curvas planares paramétricas*

- Uma curva paramétrica pode ser vista como a *trajetória* de um ponto se interpretarmos o parâmetro $t$ como tempo .

- O conjunto de pontos de uma equação paramétrica $\gamma(t)$ é denominado *traço*.

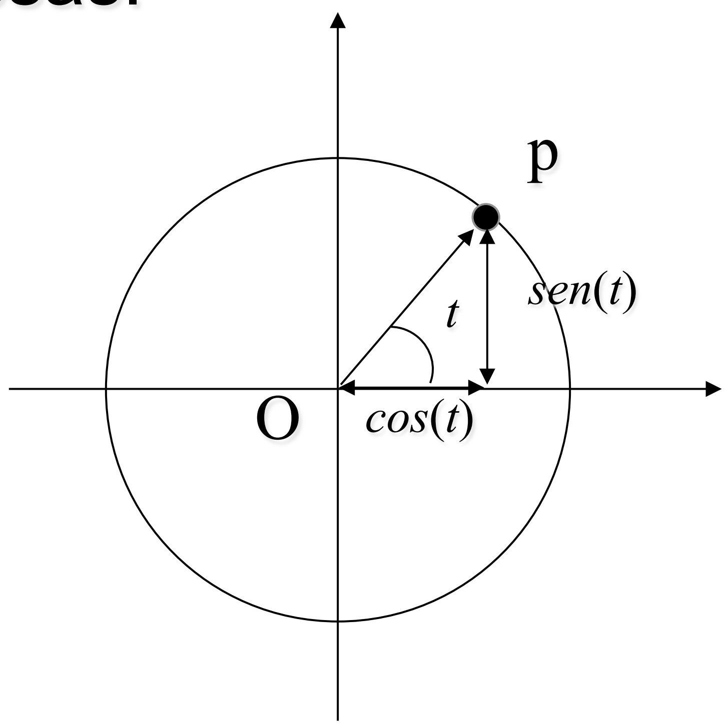
# Objetos gráficos planares: *curvas planares paramétricas*

- O traço de uma equação paramétrica nem sempre corresponde a uma curva topológica.

- Existem várias parametrizações possíveis para uma curva.

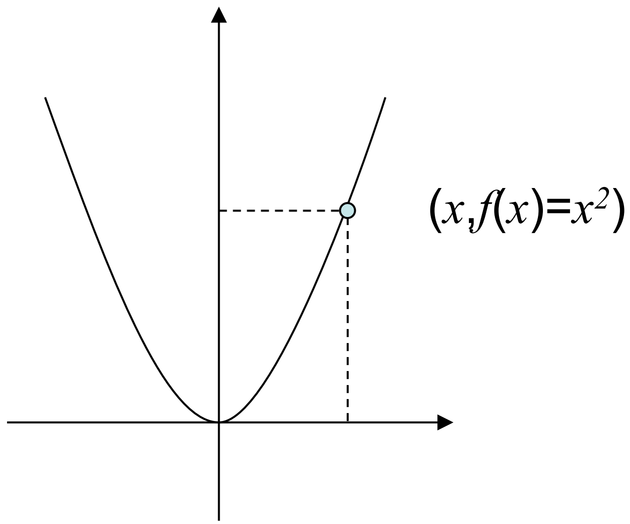
## Objetos gráficos planares: *curvas planares paramétricas - exemplos*

- Círculo: $(cos(t),sen(t))$, onde $t$ é o ângulo formado pelos pelo segmento $Op$ e o eixo das abscissas.



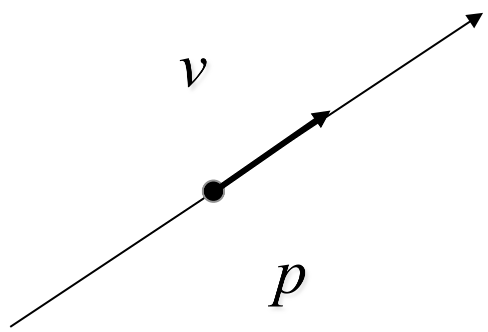
# <u>Objetos gráficos planares</u>: *curvas planares paramétricas - exemplos*

- Gráfico de uma função
  - Seja uma função $f: R \to R$. O *gráfico de f* é o conjunto $G(f)=\{(x,f(x))\ ;\ x \in I\}$ que define uma curva topológica.
  - A parametrização do gráfico de uma função é dada pela equação $\gamma(t)=(t,f(t))$.



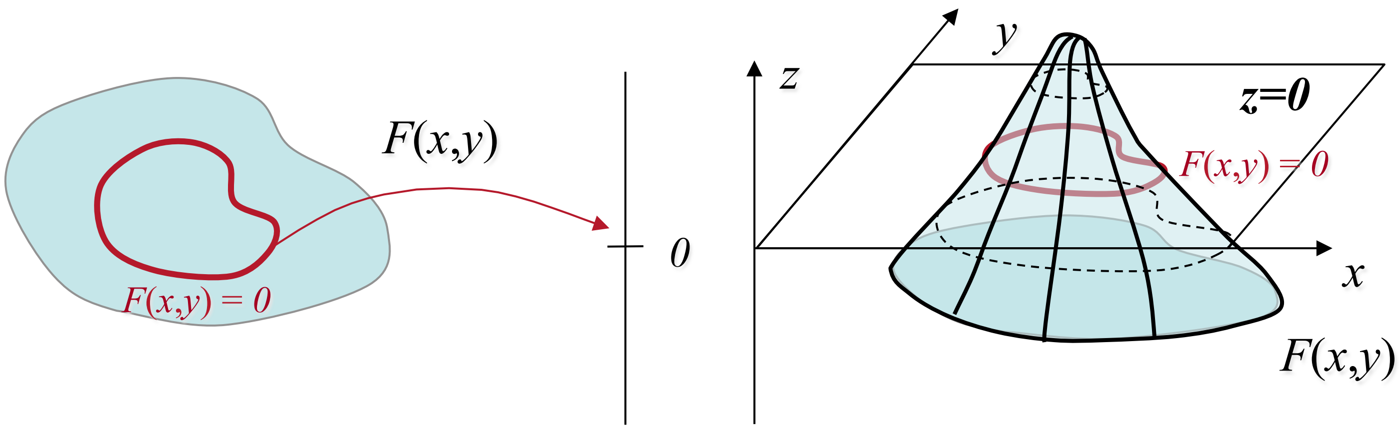
# <u>Objetos gráficos planares</u>: *curvas planares paramétricas - exemplos*

- Reta do plano (equação vetorial): $\gamma(t) = p+vt$, onde $p$ é um ponto do $R^2$, $v$ um vetor do $R^2$ e $t \in R$.



# Objetos gráficos planares: *representação implícita de curvas planares*

- A descrição implícita define uma curva como o *conjunto de raízes* de uma equação $F(x,y) = 0$.



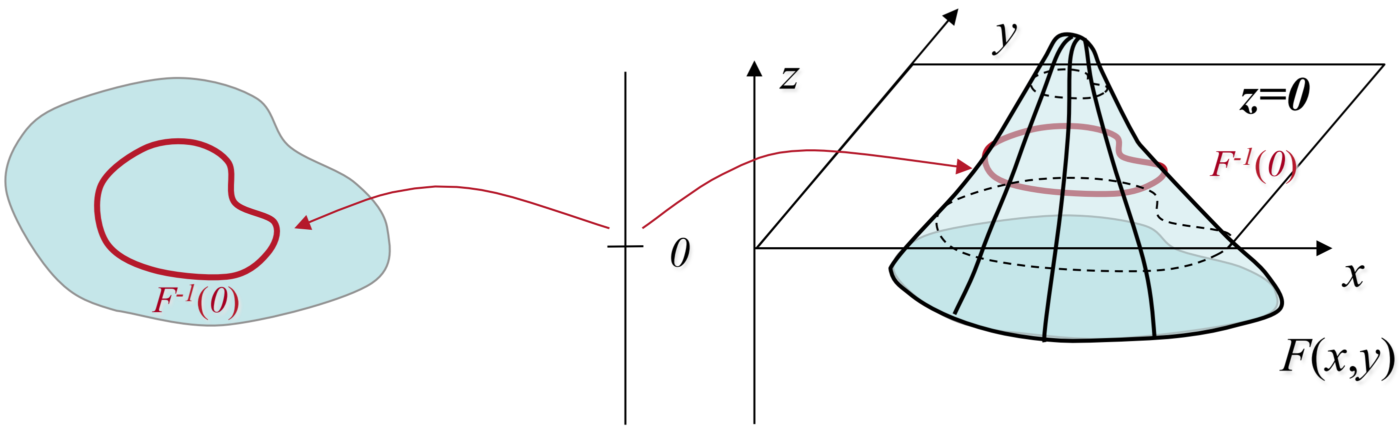
# <u>Objetos gráficos planares</u>: *representação implícita de curvas planares*

- Seja $F\!:\!U\!\subset\! R^2 \!\rightarrow\! R$ uma função implícita que descreve uma curva.

- O *suporte geométrico* da curva é dada pelos *conjunto de soluções* da equação $F(x,y) = 0$.

# <u>Objetos gráficos planares</u>: *representação implícita de curvas planares*

- O conjunto de raízes de $F(x,y)=0$ é a *imagem inversa do 0* e é indicada por $F^{-1}(0) = \{(x,y) \in R^2 \mid F(x,y)=0\}$.



# <u>Objetos gráficos planares</u>: *representação implícita de curvas planares*

- Exemplos:

  – (Equação implícita da reta)

    - $ax+by+c=0,\ ab\neq 0$

  – (Equação implícita do círculo)

    - $x^2+y^2-r^2 = 0$

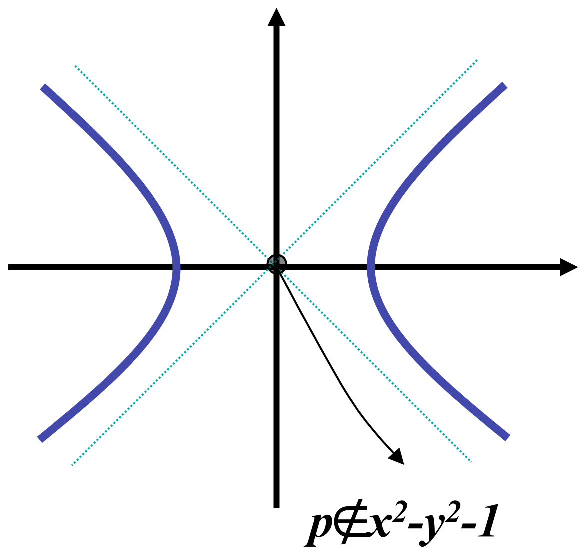
## <u>Objetos gráficos planares</u>: *representação implícita de curvas planares*

- Nem sempre a equação implícita define uma curva topológica.

- Uma condição suficiente é o de que não haja pontos singulares. Ou seja, $grad(F) \neq 0$, para todo ponto $(x_0,y_0) \in F^{-1}(0)$.

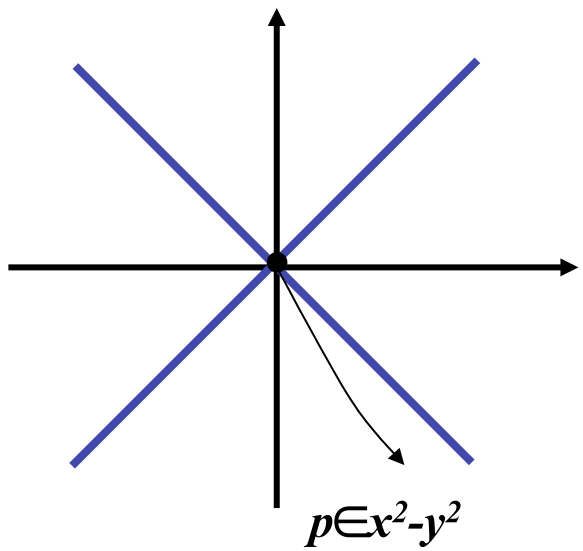
# **Objetos gráficos planares**: *representação implícita de curvas planares*

- $F(x, y) = x^2 - y^2 - k$
- $grad\ F(x, y) = (2x, -2y)$
- (logo, $grad\ F(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$)
- $k = 1$: não há pontos singulares



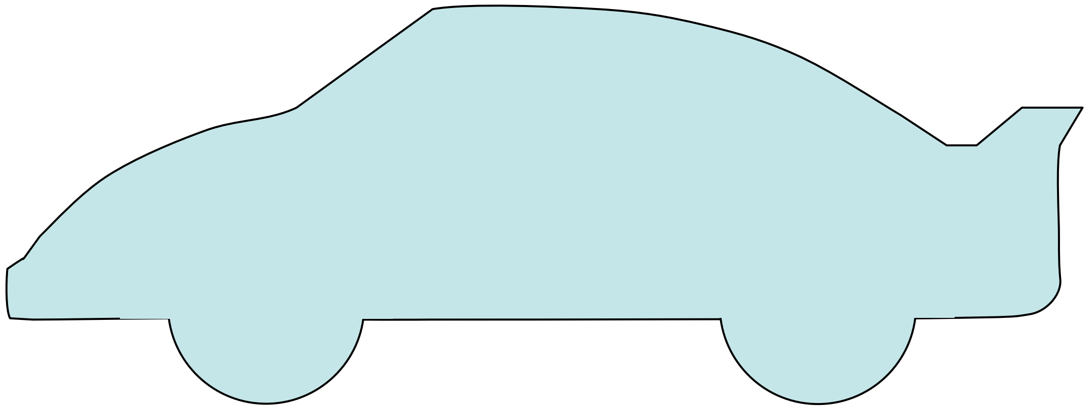
# <u>Objetos gráficos planares</u>: *representação implícita de curvas planares*

- $F(x, y) = x^2 - y^2 - k$
- $grad\ F(x, y) = (2x, -2y)$
- (logo, $grad\ F(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$)
- $k = 0$: $(0, 0)$ é um ponto singular



## <u>Objetos gráficos planares</u>: *regiões planas*

- Correspondem a subconjuntos bidimensionais do plano.



## Objetos gráficos planares: *objetos implícitos ou paramétricos – quando utilizar*

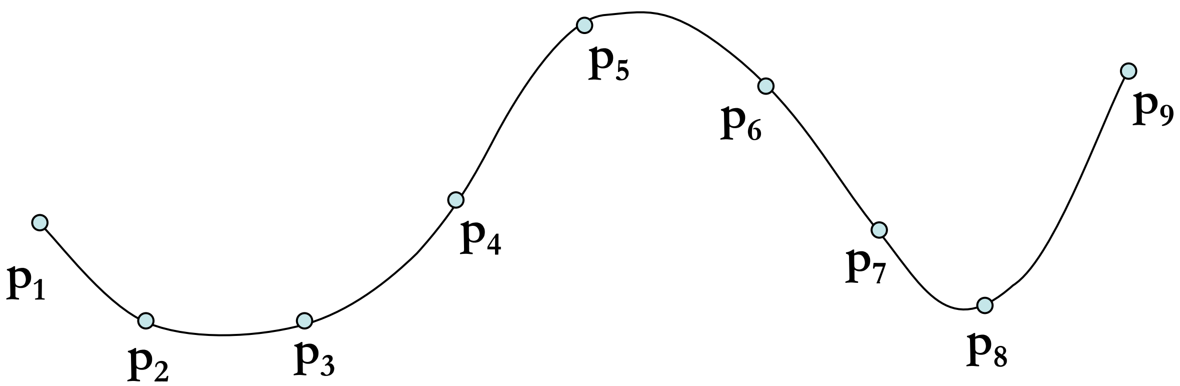
- Depende do problema.

- Consideraremos dois problemas fundamentais:

  – *Amostragem pontual*
  – *Classificação Ponto-Conjunto*

## <u>Objetos gráficos planares</u>: *objetos implícitos ou paramétricos – amostragem pontual*

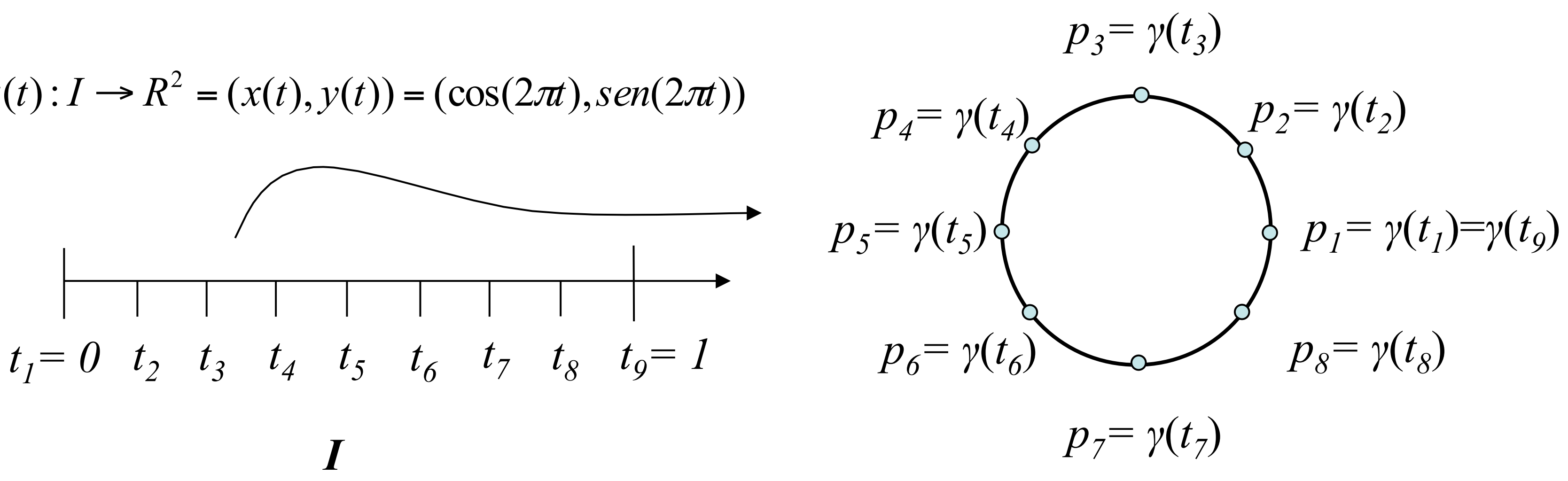
- Dado um objeto gráfico 2D com suporte geométrico $S$ determinar um conjunto de pontos $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tais que $p_i \in S$.



# <u>Objetos gráficos planares</u>: *objetos implícitos ou paramétricos – amostragem pontual*

- Objetos paramétricos – fácil
  - Tomar amostras no *espaço de parâmetros* $I$ e *avaliar a função* $\gamma(t)$ em tais amostras.

$$\gamma(t): I \to R^2 = (x(t), y(t)) = (\cos(2\pi t), sen(2\pi t))$$



# <u>Objetos gráficos planares</u>: *objetos implícitos ou paramétricos – amostragem pontual*

- Objetos implícitos – mais difícil
  - Necessário encontrar as raízes de $f(x,y)=0$.
  - As raízes podem consistir de um conjunto infinito sendo necessário tomar um subconjunto finito.

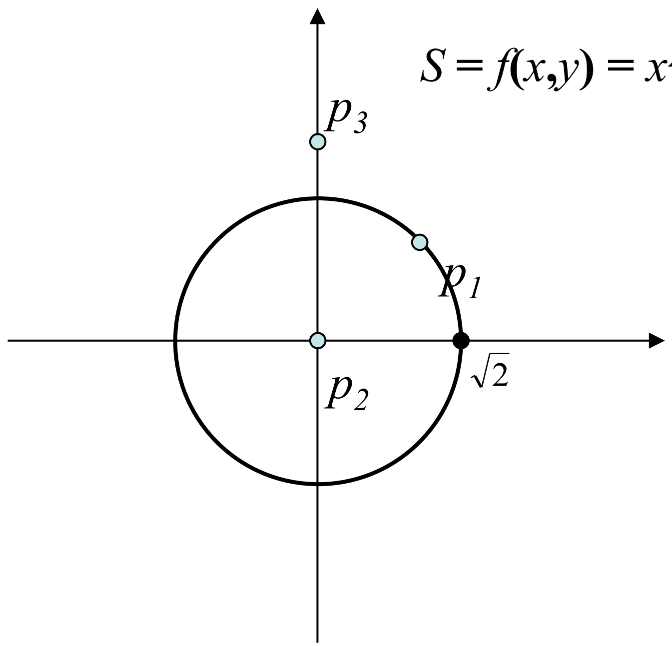
## <u>Objetos gráficos planares</u>: *objetos implícitos ou paramétricos – classificação ponto-conjunto*

- *Classificação Ponto-Conjunto*: Dado um ponto $p \in R^2$ e um objeto gráfico com suporte $S$, determinar se $p \in S$.

# Objetos gráficos planares: *objetos implícitos ou paramétricos – classificação ponto-conjunto*

- Objetos implícitos – simples.
  - Basta avaliar o sinal da função $f(x,y)$ no ponto $p=(x_0,y_0)$

$$S = f(x,y) = x^2+y^2-2=0$$



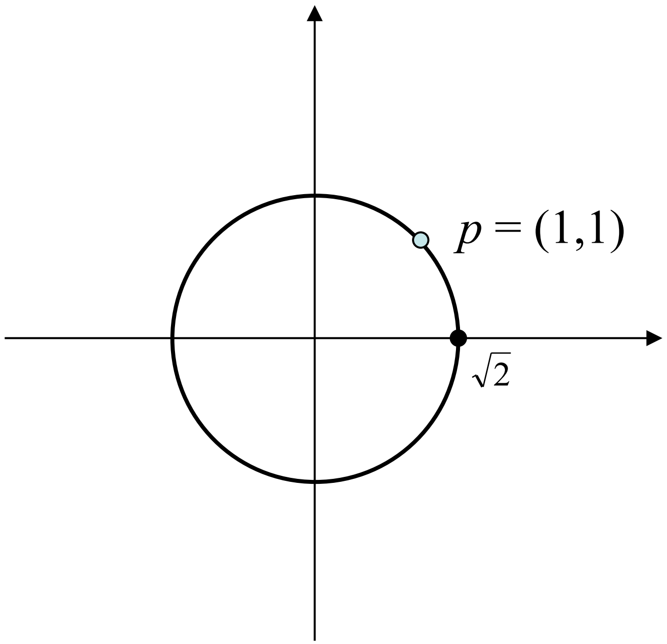

$p_1 = (1,1) \in$ S, f(1,1) = 0

$p_2 = (0,0)$ interior a S, f(0,0) < 0

$p_3 = (0,2)$ exterior a S, f(0,2) > 0

# <u>Objetos gráficos planares</u>: *objetos implícitos ou paramétricos – classificação ponto-conjunto*

- Objetos paramétricos – mais complicado.
  - Requer a verificação da existência de soluções para o sistema dado pelas equações $x(t) = x_0$ e $y(t) = y_0$.




$$\gamma(t): I \to R^2 = (x(t), y(t)) = (\cos(t), sen(t))$$

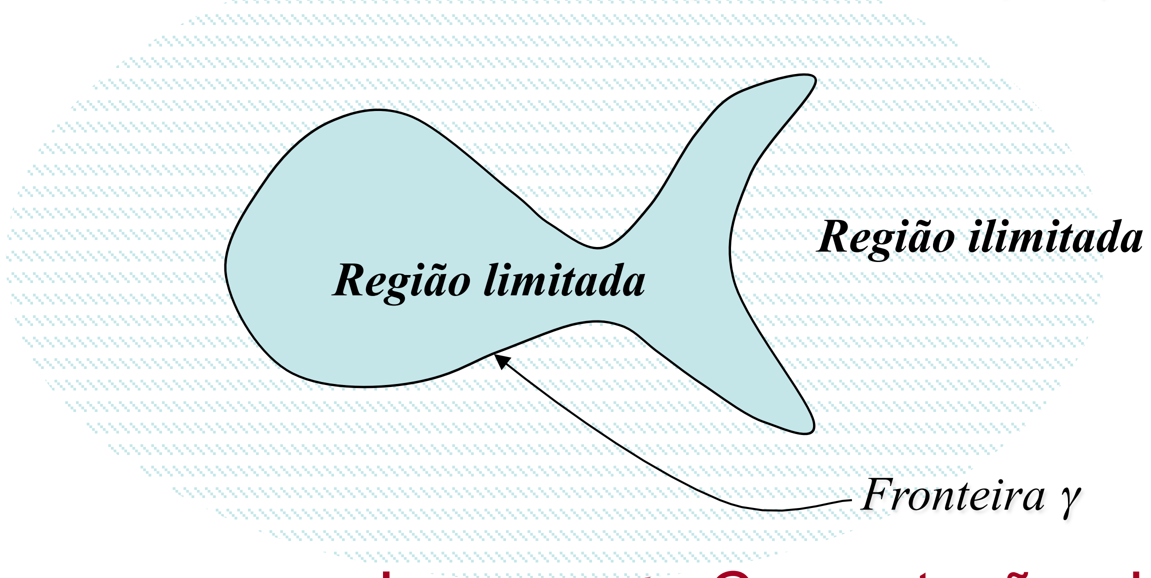
$$p = (1,1) \in S = (x(t), y(t)) = (\sqrt{2}\cos(t), \sqrt{2}sen(t)),$$

$$\begin{cases} \cos(t) = \sqrt{2}/2 \\ sen(t) = \sqrt{2}/2 \end{cases} \Rightarrow t = \pi/4$$

# <u>Objetos gráficos planares</u>: *como especificar uma região planar*

- A forma mais simples consiste em descrever a curva que delimita sua fronteira.

- Teorema de Jordan: *Uma curva topológica fechada $\gamma$ divide o plano em duas regiões abertas, uma limitada e a outra ilimitada. A fronteira entre as duas regiões é dada por $\gamma$.*



## **Objetos gráficos planares**: ***como especificar uma região planar***

- Precisamos então:

    1. Especificar a *fronteira da curva*.
    2. Especificar um método para *determinar quais pontos pertencem a região interna ou externa* da curva.

- A segunda parte é fácil de ser resolvida se a fronteira é uma curva implícita.

## <u>Objetos gráficos planares</u>: *representação de curvas e regiões*

- Os objetos gráficos definidos no universo matemático precisam ser representados *discretamente*.

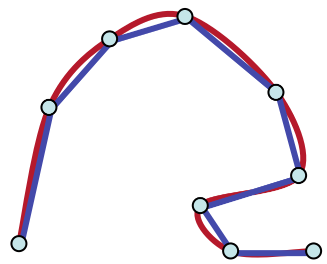
- A representação, em geral, apresenta uma versão aproximada dos objetos gráficos definidos matematicamente.

## <u>Objetos gráficos planares</u>: *representação de curvas e regiões*

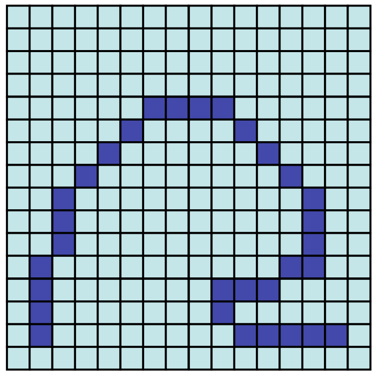
- A estratégia utilizada se baseia em :
  - O *dividir* o suporte geométrico do objeto gráfico ou o espaço onde ele está inserido.
  - Obter uma *representação simples* em cada *elemento da subdivisão*.

# Objetos gráficos planares: *representação de curvas e regiões*

- Assim obtemos duas formas de representação:
  - **Decomposição intrínseca**
    ( o suporte geométrico é subdividido)



  - **Decomposição espacial**
    ( o espaço onde o suporte está mergulhado é subdividido).



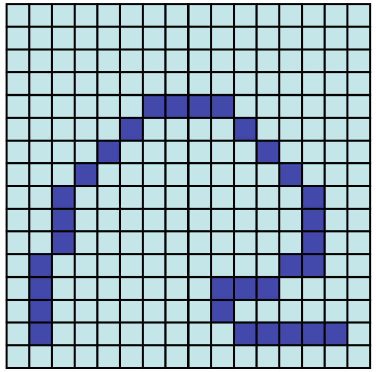
## <u>Objetos gráficos planares</u>: *representação por decomposição intrínseca*

- Neste caso o suporte geométrico é subdividido.
- Cada parte da subdivisão é representada por um elemento mais simples.
- A representação por *elementos lineares* é uma das mais utilizadas.

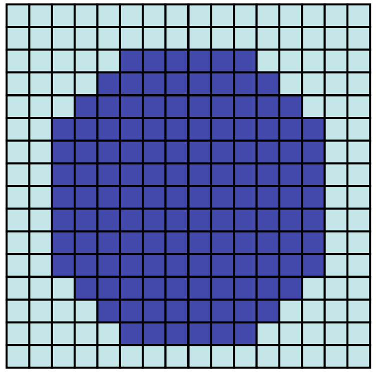
# <u>Objetos gráficos planares</u>: *representação por decomposição espacial*

- O modo mais comum : baseado na representação matricial.

- Objetivo: representar a geometria do objeto através de um conjunto de retângulos.



*Curva*

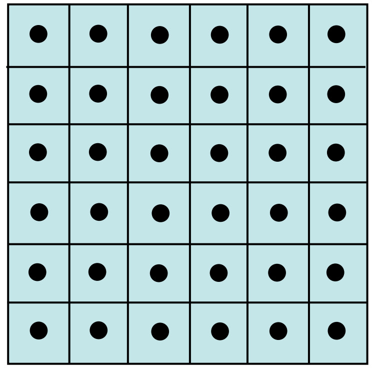


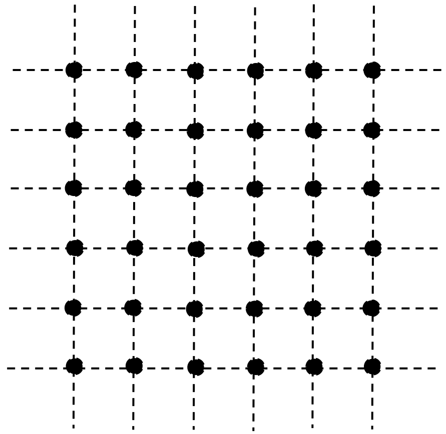
*Região*

# <u>Objetos gráficos planares</u>: *representação por decomposição espacial*

- Podemos especificar cada célula de dois modos:
  - Pelas coordenadas de um dos seus vértices.
  - Pelo centróide.

- Os centróides das células definem um outro reticulado: o *reticulado dual*.


Centróides


Reticulado dual

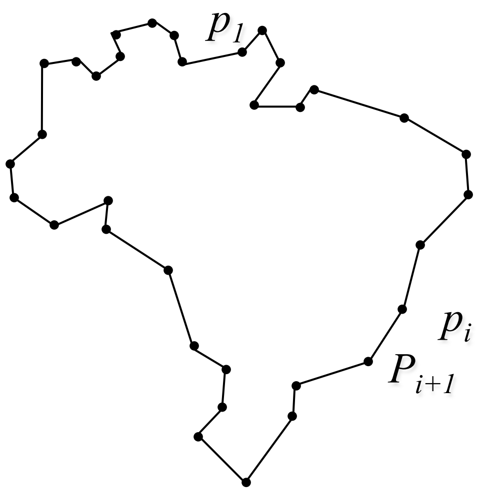
# <u>Objetos gráficos planares</u>: *representação linear por partes*

- Neste tipo de representação decompomos o objeto em *elementos lineares*.
- Exemplos:
  - Curva representada por uma *curva poligonal*.
  - Região do plano representada por uma *região poligonal*[1] ou especificada por uma triangulação.

[1] delimitada por uma curva poligonal

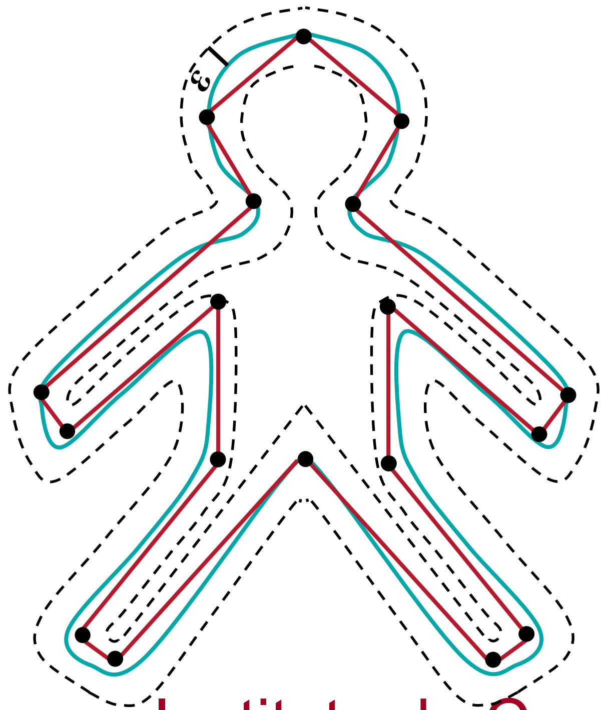
# <u>Objetos gráficos planares</u>: *representação de curvas – curvas poligonais*

- Seja $p_1, p_2, \ldots, p_n$ um conjunto de pontos distintos do plano.
- Uma *curva poligonal* é definida pelo conjunto de segmentos $p_1p_2, p_2p_3, \ldots, p_{n-1}p_n$.
- Os pontos $p_i$ são denominados *vértices* da curva poligonal os segmentos $p_ip_{i+1}$ definem as arestas da curva.



# <u>Objetos gráficos planares</u>: *representação de curvas – curvas poligonais*

- Curvas poligonais são muito utilizadas por dois motivos:
  - São fáceis de se especificar e representar.
  - Aproximam uma grande variedade de curvas.

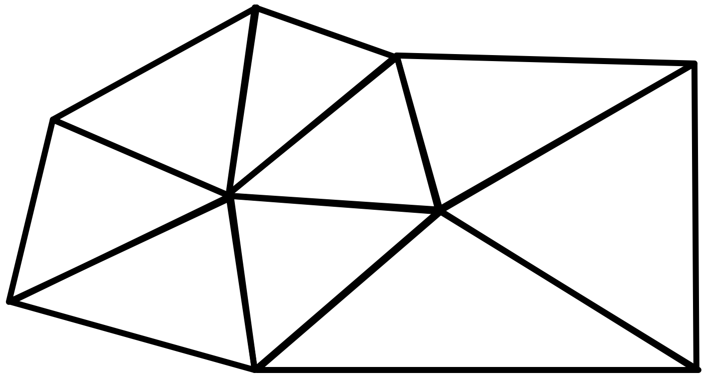


## Objetos gráficos planares: *representação de regiões – triangulações 2D*

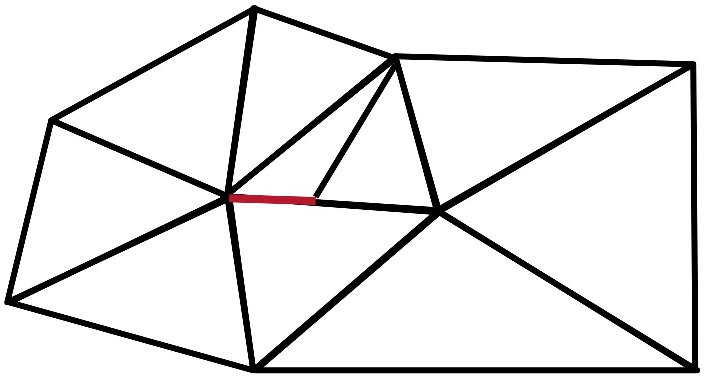
- Triangulação de uma região do plano: *coleção $\mathcal{T} = \{T_i\}$ de triângulos* tal que:
  - para dois triângulos distintos $T_i$ e $T_j$ em $\mathcal{T}$, com $T_i \cap T_j \neq \varnothing$ temos:
    - $T_i \cap T_j$ é um vértice em comum ou,
    - $T_i \cap T_j$ é uma aresta em comum.
- Triangulações fornecem uma solução tanto para o problema de *representação* quanto de *reconstrução*.

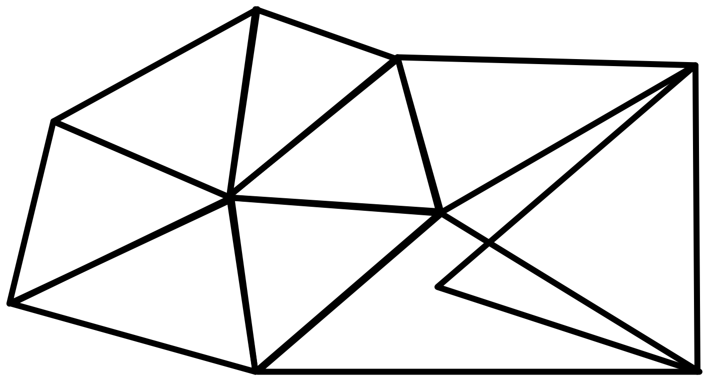
## **Objetos gráficos planares**: *representação de regiões – triangulações 2D*

- Exemplo de triangulação:



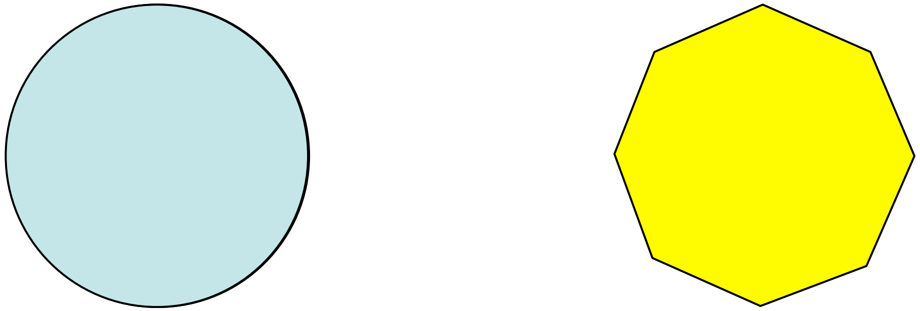
- Contra-exemplos:





## Objetos gráficos planares: *Poligonização*

- Representação da curva (região) através de sua decomposição em segmentos (polígonos).



- Os métodos de poligonização dependem da descrição do objeto gráfico: paramétrica ou implícita.

# Objetos gráficos planares: *Poligonização de curvas paramétricas*

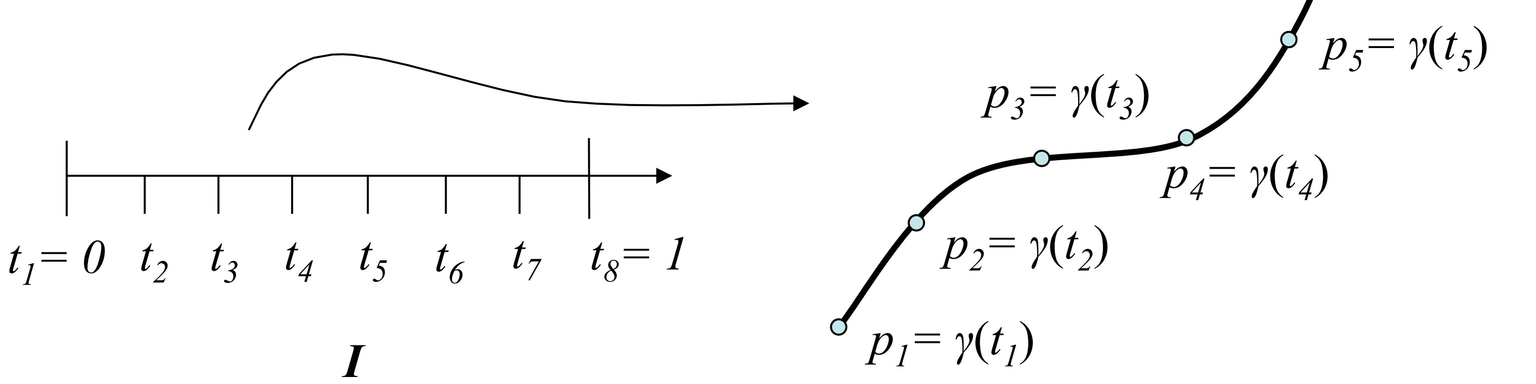
- O *método uniforme* é o método mais simples para poligonizar uma curva paramétrica.

- Seja uma curva $\gamma(t)$ definida em um intervalo $I=[a,b]$.
  1. Obtemos uma partição uniforme $a=t_0<t_1<...<t_n=b$ do intervalo $I$.
  2. Avaliamos a curva nos pontos $t_i$ obtendo uma sequência de pontos $p_0,p_1,...,p_n$ onde $p_i = \gamma(t_i)$.

# Objetos gráficos planares: *Poligonização de curvas paramétricas*

- O *método uniforme* é o método mais simples para poligonizar uma curva paramétrica.

$$\gamma(t) : I \rightarrow R^2$$



# <u>Objetos gráficos planares</u>: *Poligonização de curvas paramétricas*

- Observe que é importante *estruturar* a seqüência de pontos de forma que a topologia original do objeto seja preservada.

- Esta estruturação é realizada *ordenando-se os pontos da seqüência* de acordo com a ordem das amostras tomadas do intervalo.

- A reconstrução então envolve um processo de *amostragem* e *estruturação* (ordenação).

# Objetos gráficos planares: *Poligonização de curvas implícitas*

- Para poligonizar uma curva $\gamma$ definida implicitamente por uma função $F:U \subset R^2 \rightarrow R$ devemos tomar amostras do conjunto $F^{-1}(0)$.

- Além disso, é necessário fornecer uma *estruturação* adequada às amostras tomadas.

# Objetos gráficos planares: *Poligonização de curvas implícitas*

- Solução:
  1. Determinar uma *triangulação do domínio* de $F$.

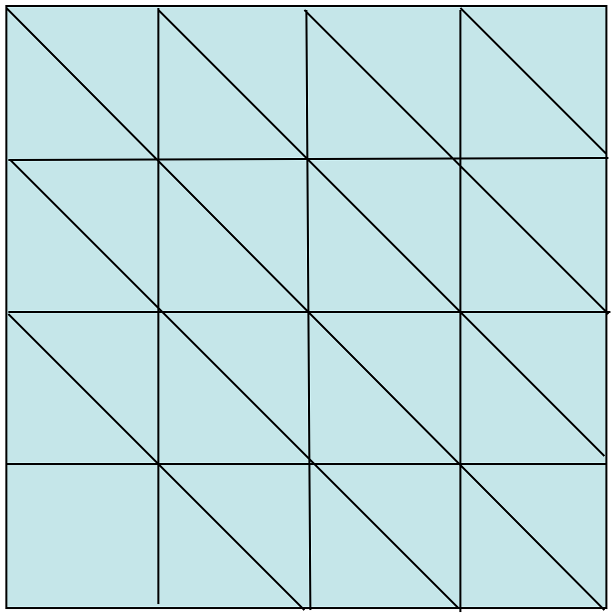
  2. *Aproximar* $F$ em cada triângulo por uma *função linear* $F'$.

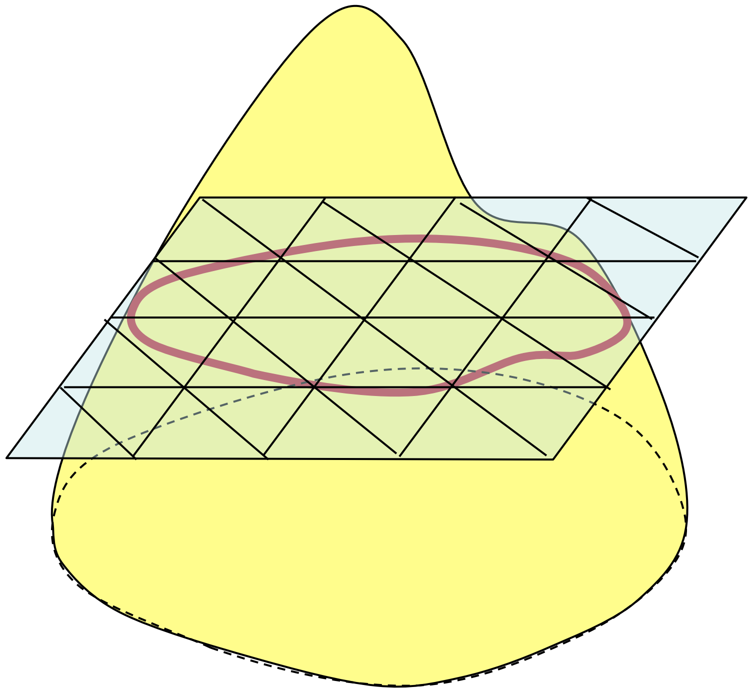
  3. *Solucionar* $F'(x,y)=0$ em cada triângulo. A solução é em geral um segmento de reta.

  4. A estruturação das amostras é induzida pela *estrutura da triangulação subjacente*.

# <u>Objetos gráficos planares</u>: *Poligonização de curvas implícitas*

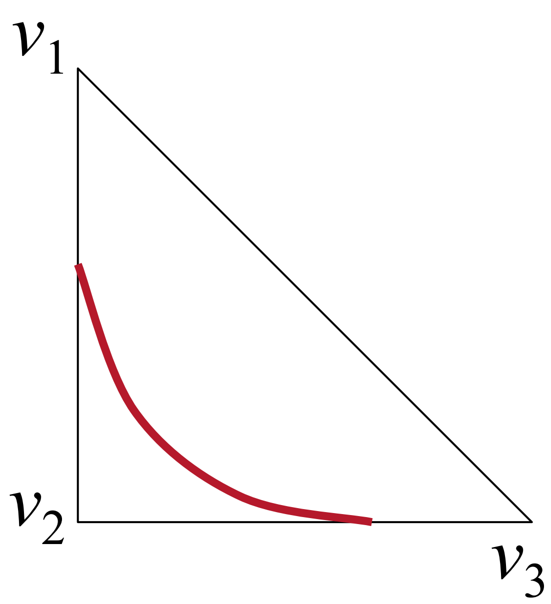
- Determinamos uma *triangulação do domínio* de $F$.

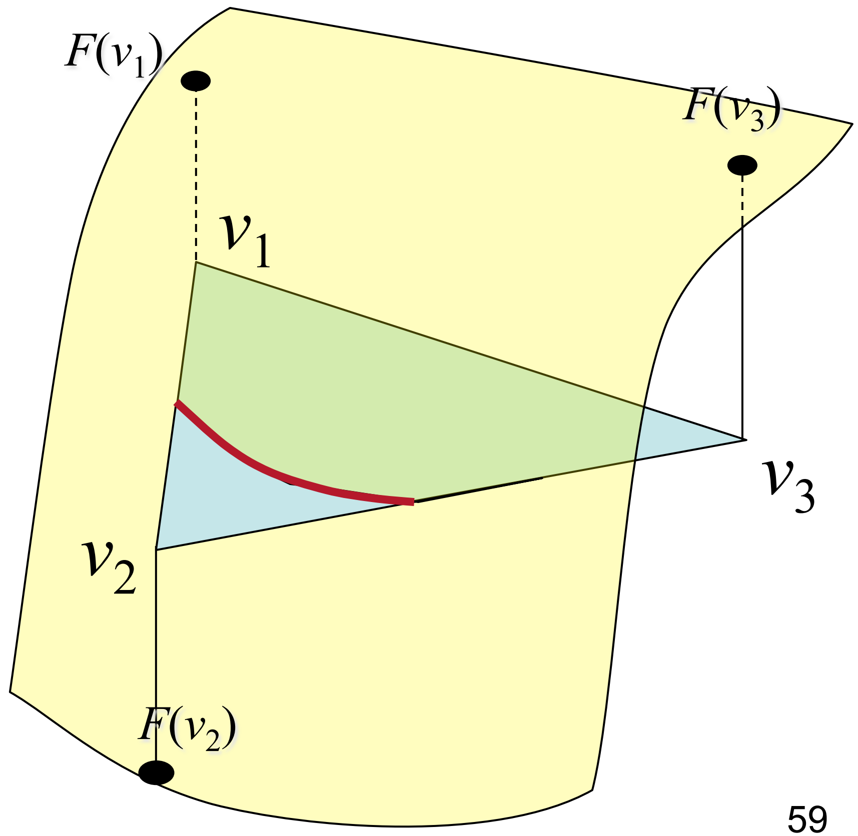




# <u>Objetos gráficos planares</u>: *Poligonização de curvas implícitas*

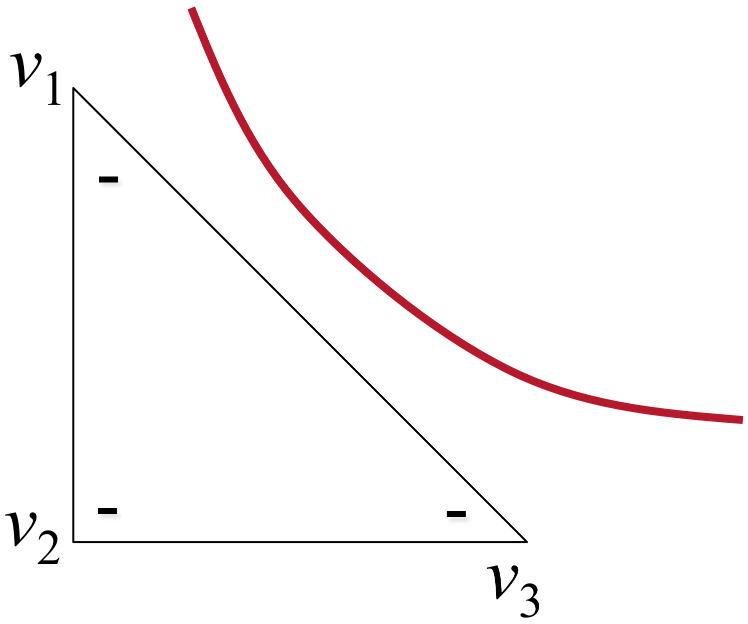
- Em cada triângulo calculamos os valores $F(v_1)$, $F(v_2)$, $F(v_3)$.

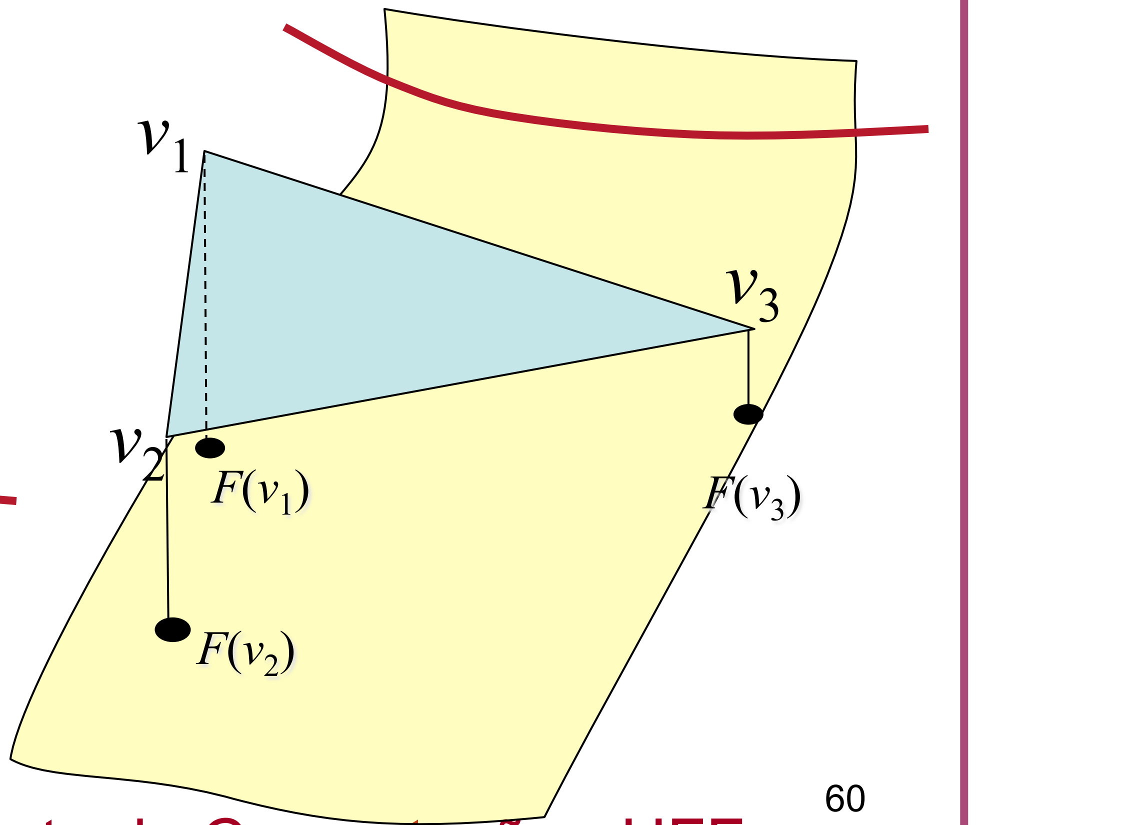


# <u>Objetos gráficos planares</u>: *Poligonização de curvas implícitas*

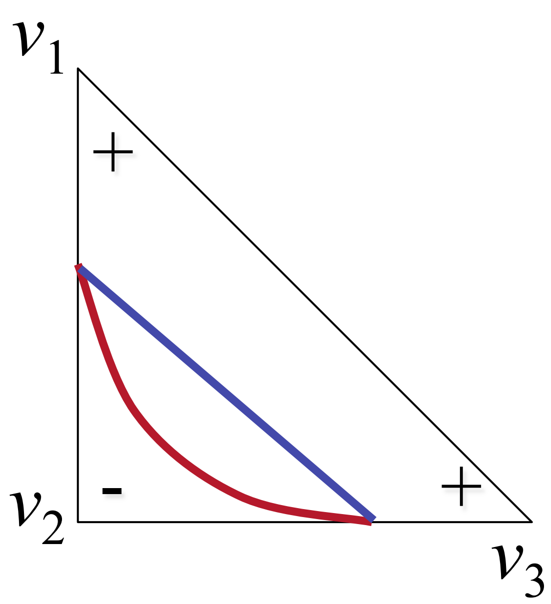
- Se os sinais nos vértices forem todos iguais, consideramos que a curva não intersecta o triângulo.

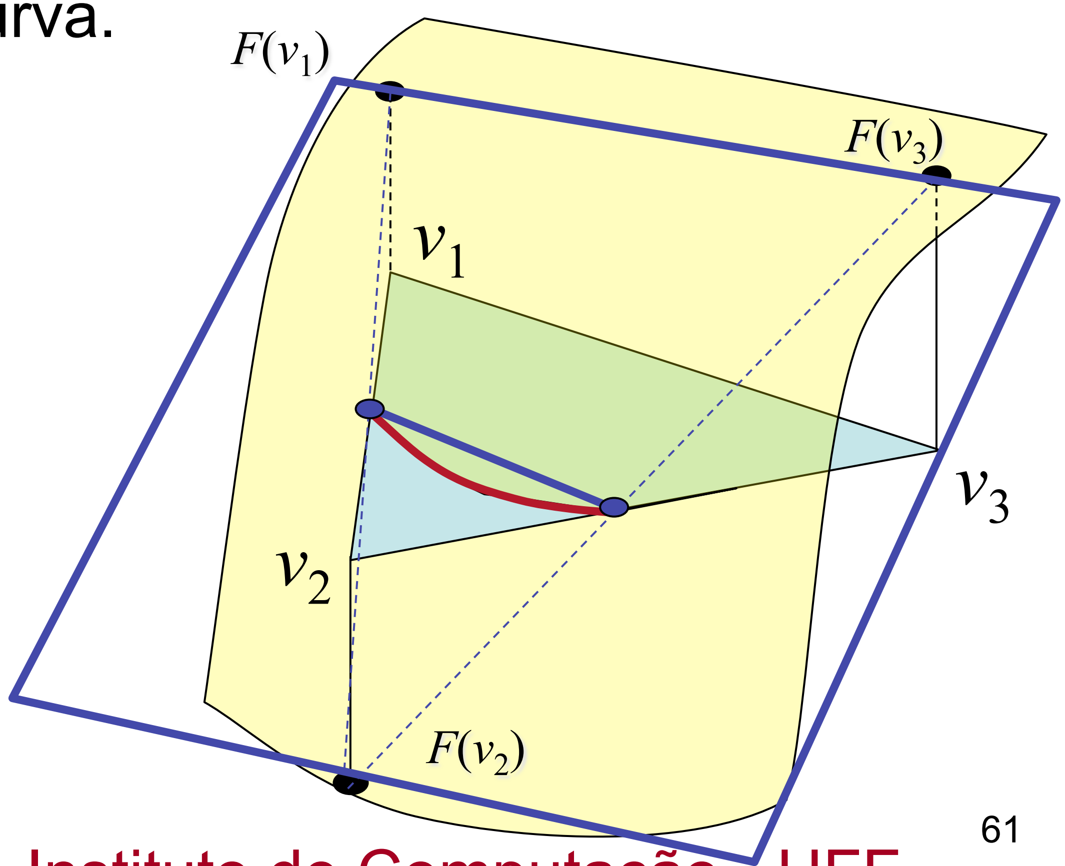


# Objetos gráficos planares: *Poligonização de curvas implícitas*

- Senão, estimamos por interpolação linear a interseção com cada lado em que há variação de sinal e obtemos aproximação da curva.



## **Objetos gráficos planares**: ***Poligonização de curvas implícitas***

- Resultado: