

# Computação Gráfica I

## Professor:

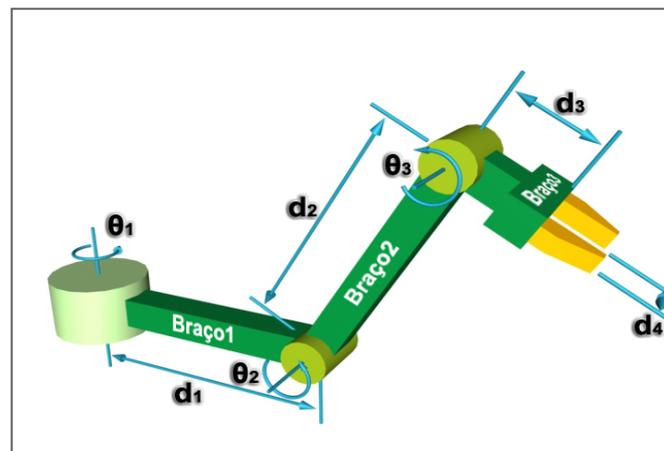
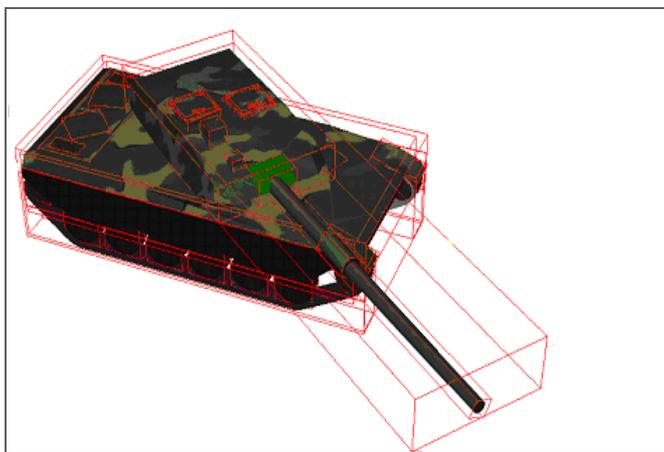
Anselmo Montenegro  
[www.ic.uff.br/~anselmo](http://www.ic.uff.br/~anselmo)

## Conteúdo:

- Transformações geométricas no plano.

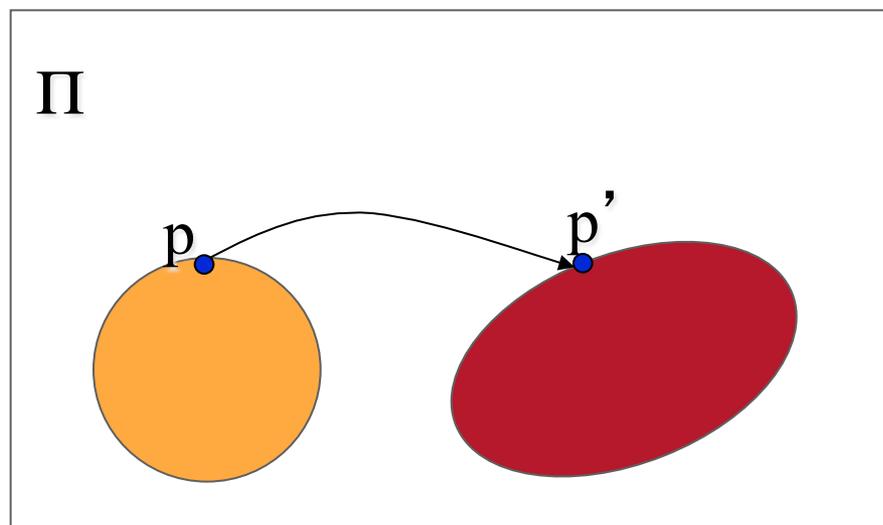
# Transformações geométricas: Introdução

- Na Computação Gráfica é essencial poder *movimentar* e *deformar* objetos.
- Casos particulares: *transformações geométricas*.



# Transformações geométricas: Introdução

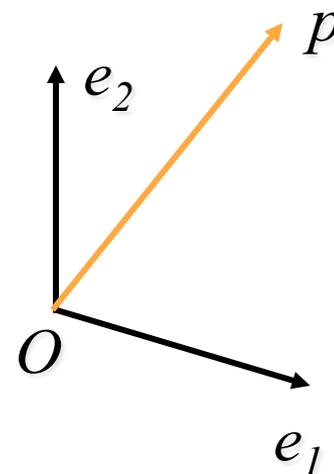
- Uma transformação  $T$  no plano é uma função que associa a cada ponto  $p$  do plano euclidiano  $\Pi$  um ponto  $p'$  em  $\Pi$ .



- Conveniente introduzir um *sistema de coordenadas*.

# Transformações geométricas: transformações no plano (2D)

- Referencial no plano
  - $(O, e_1, e_2)$ , onde  $O$  é um ponto escolhido como *origem* e  $(e_1, e_2)$  forma uma *base* do  $R^2$ .
  - $OP = xe_1 + ye_2$
  - $x$  e  $y$  são as coordenadas de  $p$  no referencial  $(O, e_1, e_2)$ .
  - Coordenadas da origem  $O$ :  $(0,0)$ .



## Transformações geométricas: transformações no plano (2D)

- Um referencial estabelece uma *correspondência entre o plano euclidiano  $\Pi$  e  $R^2 = \{(x,y) \mid x, y \in R\}$ .*
- Permite estudar transformações do plano a partir de transformações em  $R^2$ .
- Ponto de partida: *estrutura de espaço vetorial do  $R^2$*  (logo, do plano).

## Transformações geométricas: transformações lineares

- Uma transformação  $L:R^2 \rightarrow R^2$  é dita linear quando

$$L(\alpha p_1 + \beta p_2) = \alpha L(p_1) + \beta L(p_2),$$

onde  $p_1, p_2 \in R^2$  e  $a, b \in R$ .

- Obs:  $L(0, 0) = (0, 0)$  (ou seja, *a origem O do referencial é mantida fixa por uma transformação linear*).

## Transformações geométricas: transformações lineares

- Uma transformação linear  $L:R^2 \rightarrow R^2$  fica completamente determinada quando se conhecem  $L(e_1)$  e  $L(e_2)$ , onde  $(e_1, e_2)$  formam uma base do  $R^2$ .

$$L(e_1) = ae_1 + be_2, L(e_2) = ce_1 + de_2$$

$$p = xe_1 + ye_2 \Rightarrow L(p) = xL(e_1) + yL(e_2) =$$

$$= x(ae_1 + be_2) + y(ce_1 + de_2) = (ax + cy)e_1 + (bx + dy)e_2$$

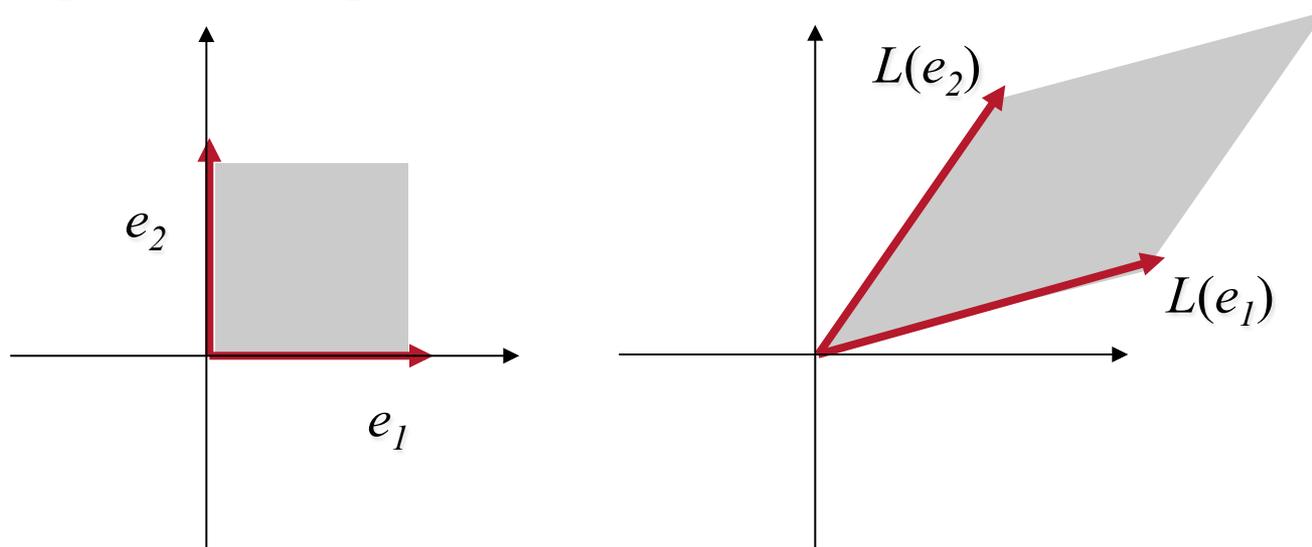
Matriz da  
transformação

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$\uparrow$   $\uparrow$   
 $L(e_1)$   $L(e_2)$

# Transformações geométricas: transformações lineares

- O mais comum é representar uma transformação linear com respeito à base canônica do  $\mathbb{R}^2$ :  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$ .

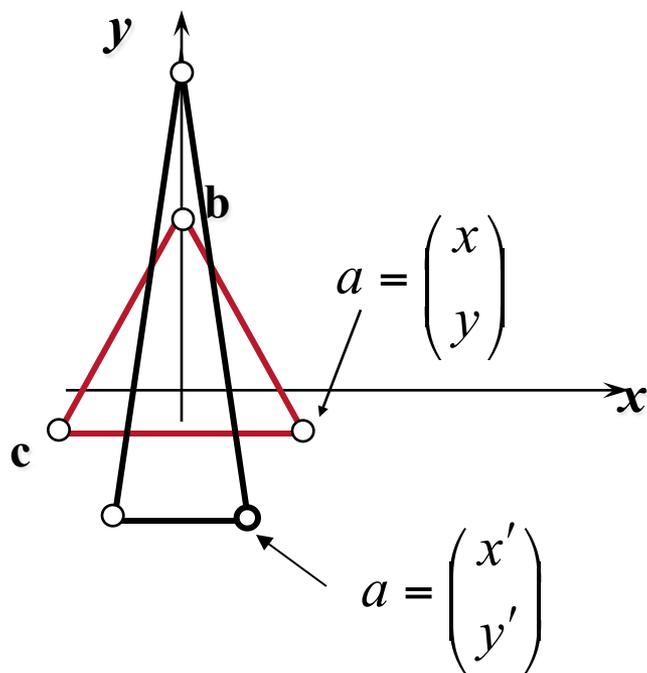


- Transformações lineares *preservam elementos lineares* (retas, planos, etc)

## Transformações geométricas: transformações lineares

- Algumas transformações lineares correspondem a *transformações geométricas* importantes.
  - Escalas.
  - Reflexões.
  - Rotações.
  - Cisalhamento.

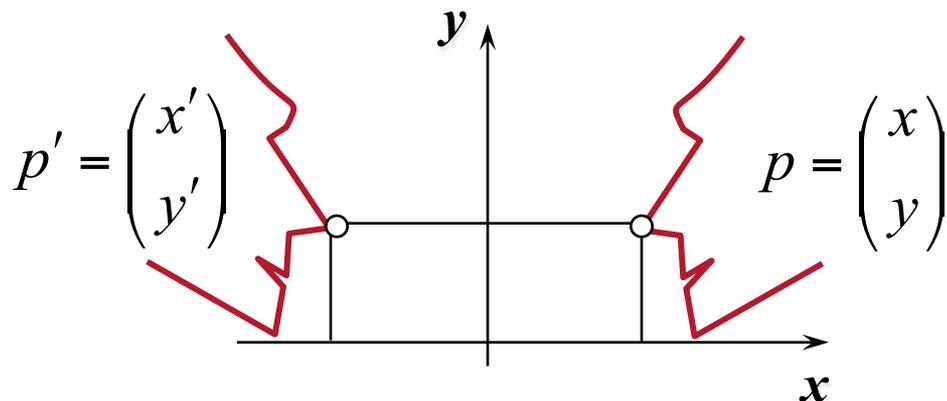
# Transformações geométricas: transformações lineares



Redução ( $0 < s_x < 1$ ),  
Aumento ( $s_y > 1$ )

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x \cdot x \\ s_y \cdot y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

# Transformações geométricas: transformações lineares

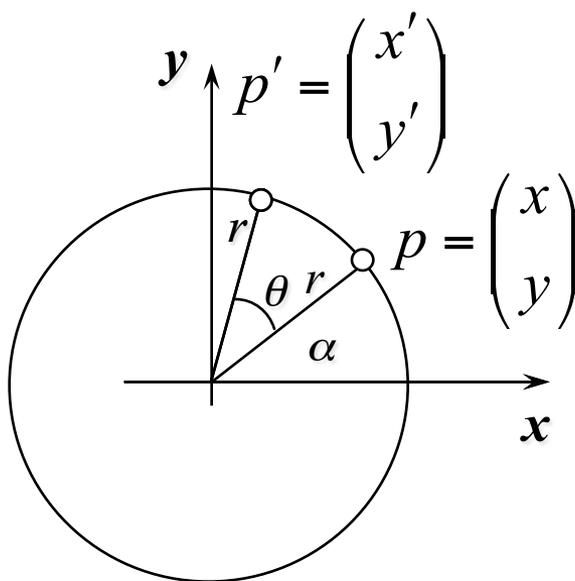


$$\begin{aligned}x' &= -1 \cdot x \\y' &= y\end{aligned}$$

Espelhamento em  
relação ao eixo y

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

# Transformações geométricas: transformações lineares



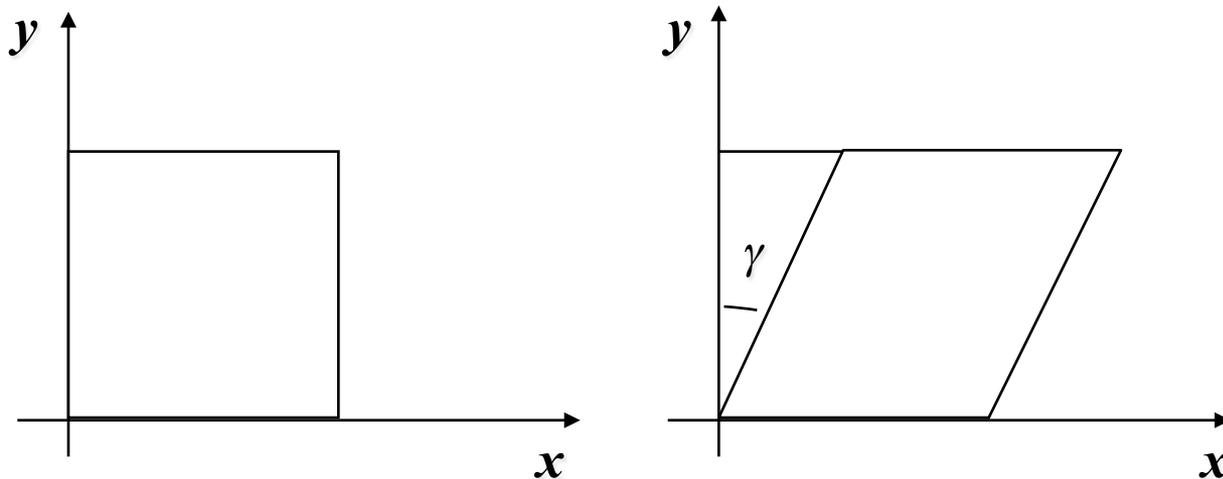
$$x = r \cos \alpha$$

$$y = r \sin \alpha$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\alpha + \theta) \\ r \sin(\alpha + \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \alpha \cdot \cos \theta - r \sin \alpha \sin \theta \\ r \sin \alpha \cdot \cos \theta + r \cos \alpha \cdot \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos \theta - y \sin \theta \\ x \sin \theta + y \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

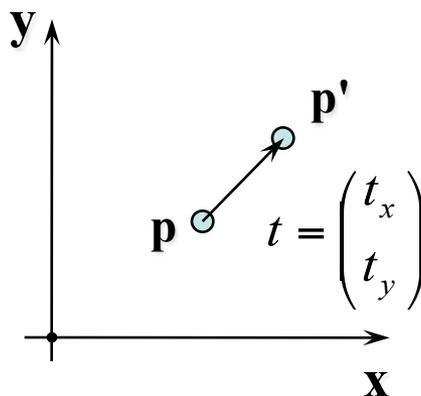
# Transformações geométricas: transformações lineares



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \tan \gamma \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

## Transformações geométricas: transformações lineares

- Não: mantêm a origem invariante. Logo, não podem representar translações.



$$p' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$

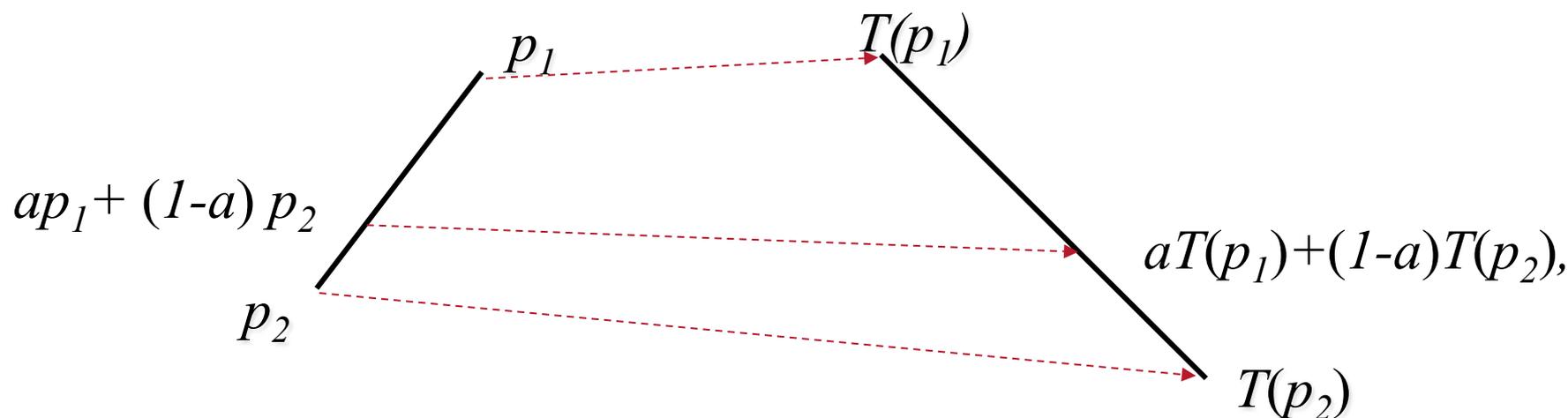
- Considerar uma classe mais ampla: *transformações afins*.

## Transformações geométricas: transformações afins

- Uma transformação  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita afim quando

$$T(ap_1 + (1-a)p_2) = aT(p_1) + (1-a)T(p_2),$$

onde  $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$  e  $a \in \mathbb{R}$ .



## Transformações geométricas: transformações afins

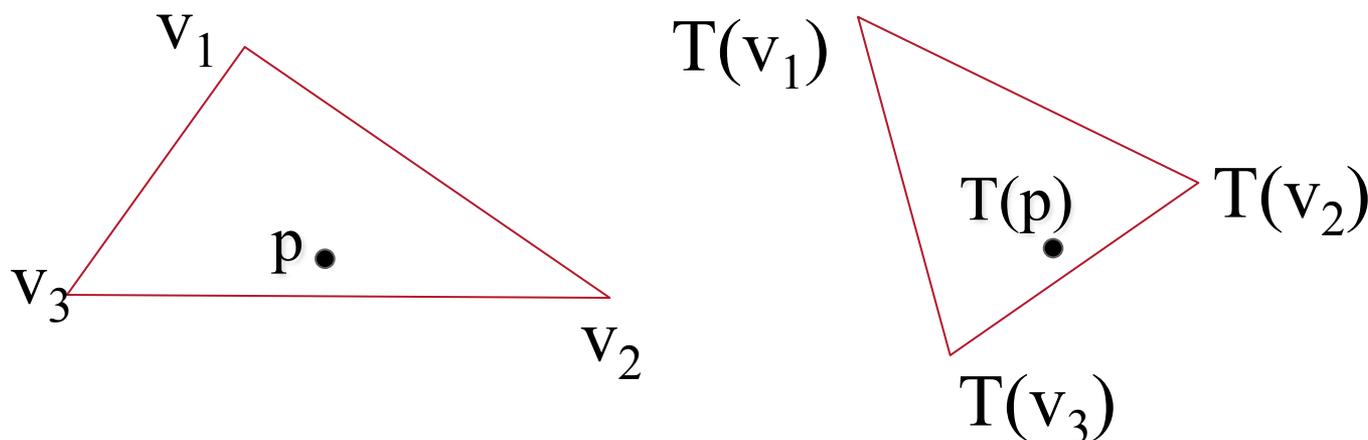
- Uma transformação  $T$  é afim se e somente se é da forma  $T(p) = L(p) + t$ , onde  $L$  é linear.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

## Transformações geométricas: transformações afins

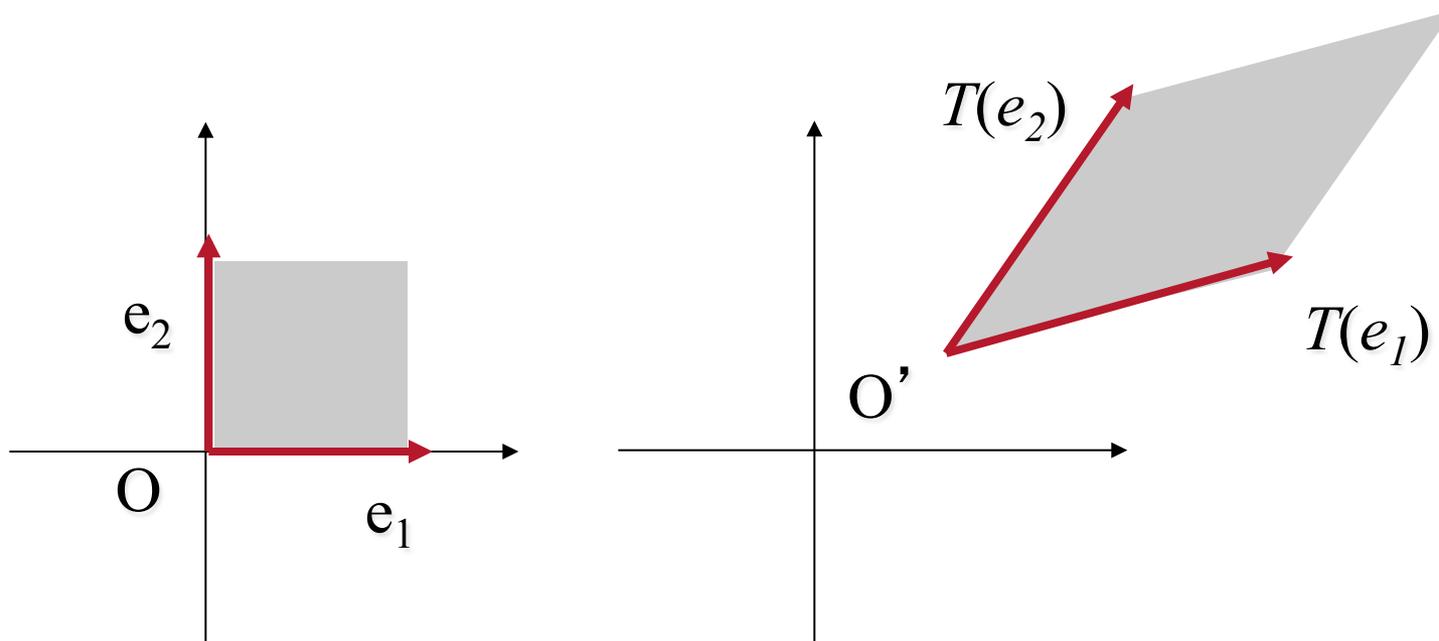
- Preservam retas, razão de seção e coordenadas baricêntricas.

Se  $p = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ , com  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ , então  $T(p) = \lambda_1 T(v_1) + \lambda_2 T(v_2) + \lambda_3 T(v_3)$ .



## Transformações geométricas: transformações afins

- Uma transformação afim fica determinada quando se conhece  $T(v_1)$ ,  $T(v_2)$  e  $T(v_3)$ , onde  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$  formam um triângulo.
- Caso particular: referencial  $(O, e_1, e_2)$



## Transformações geométricas: Coordenadas Homogêneas

- Podemos tratar todas as transformações de forma unificada se representarmos os pontos do espaço em *coordenadas homogêneas*.
- Em coordenadas homogêneas, um ponto do plano é representado por uma tripla  $[x,y,w]$  ao invés de um par  $(x,y)$ .
- Duas coordenadas homogêneas  $[x,y,w]$  e  $[x',y',w']$  representam o mesmo ponto se uma é um *múltiplo da outra*.

## Transformações geométricas: Coordenadas Homogêneas

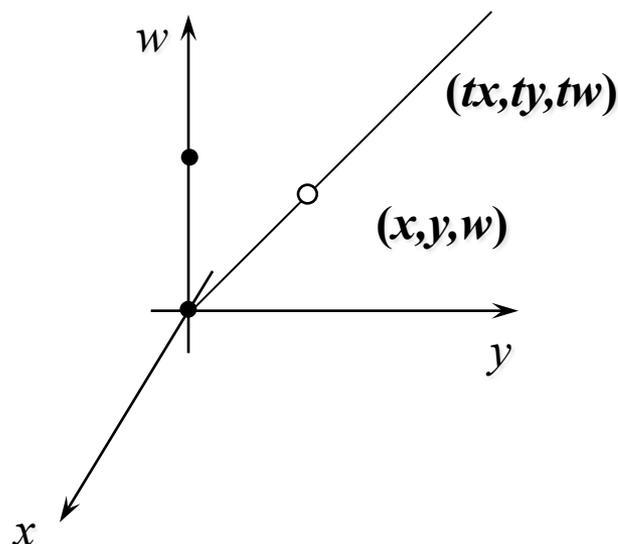
- Se  $w \neq 0$  podemos *dividir as coordenadas homogêneas por  $w$* .

$(x, y, w)$  representa o mesmo ponto que  $(x/w, y/w, 1)$ .

- Se  $w = 0$ , então  $(x, y, w)$  é um ponto no infinito e representa uma direção do plano (mais sobre isto depois...)

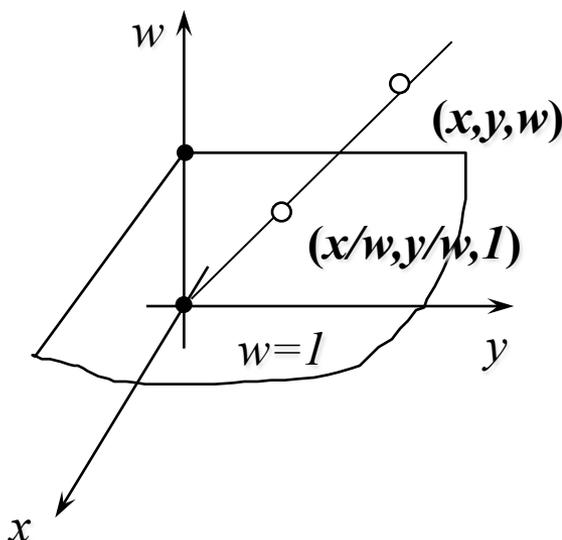
# Transformações geométricas: Coordenadas Homogêneas

- O uso de coordenadas homogêneas consiste em *representar um espaço 2D imerso em um espaço 3D*.
- Se tomarmos todas as triplas  $(tx, ty, tw)$ ,  $w \neq 0$ , que representam um mesmo ponto, temos uma reta no espaço 3D.



## Transformações geométricas: Coordenadas Homogêneas

- Os pontos da forma  $[x, y, 1]$  formam um plano com coordenadas  $w=1$  no espaço  $(x, y, w)$ .



## Transformações geométricas: Coordenadas Homogêneas

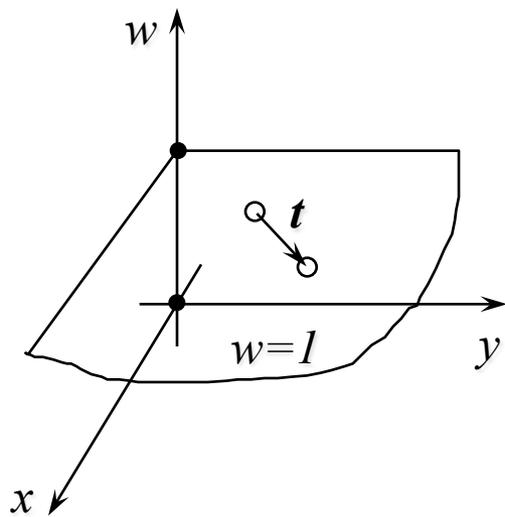
- Pontos são representados em coordenadas homogêneas por vetores de 3 componentes.
- Logo, as matrizes de transformação devem ser representadas por matrizes 3x3.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c & e \\ b & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

# Transformações geométricas: translações em coordenadas homogêneas



$$p = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Transformações geométricas: matrizes de transformação em coordenadas homogêneas

Escala

$$S.x = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

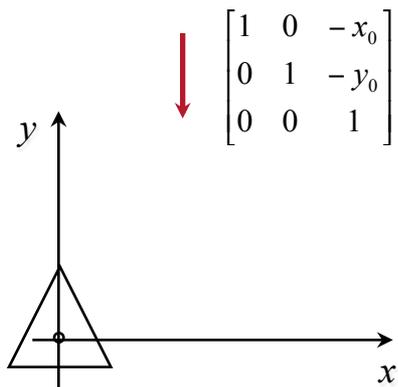
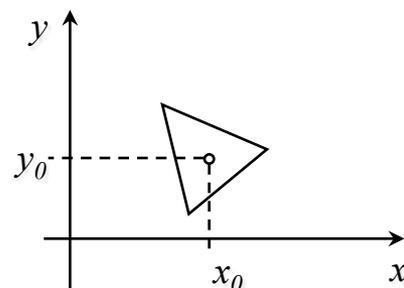
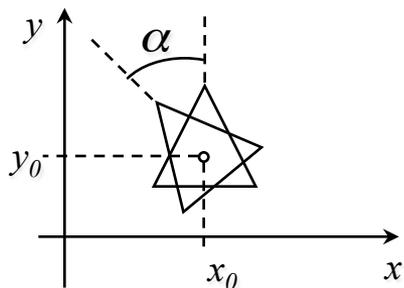
Rotação

$$R_\theta.x = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

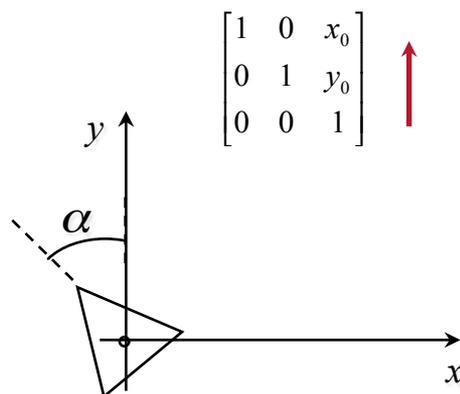
Cisalhamento

$$C.x = \begin{pmatrix} 1 & \tan \gamma & 0 \\ \tan \psi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Transformações geométricas: Composição de transformações 2D



$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 1 & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{Bmatrix}$$

# Transformações geométricas: OpenGL

- A OpenGL *trata objetos planares como sendo objetos tridimensionais com uma das coordenadas constante.*
- Logo, todas as transformações são realizadas no  $R^3$  (de fato no espaço homogêneo 3d).
- Translação
  - `glTranslate{fd}(TYPE x, TYPE y, TYPE z);`
- Rotação de *angle* graus em torno de um eixo  $(x,y,z)$ .
  - `glRotate{fd}(TYPE angle, TYPE x, TYPE y, TYPE z);`
- Escala
  - `glScale{fd}(TYPE sx, TYPE sy, TYPE sz);`

## Transformações geométricas: transformações de tela

- A exibição de objetos gráficos é uma aplicação importante de mudança de sistema de coordenadas.
- Os dispositivos gráficos de saída possuem uma superfície planar onde a representação de objetos gráficos é materializada.
- Denominamos esta superfície de superfície de suporte.

## Transformações geométricas: transformações de tela

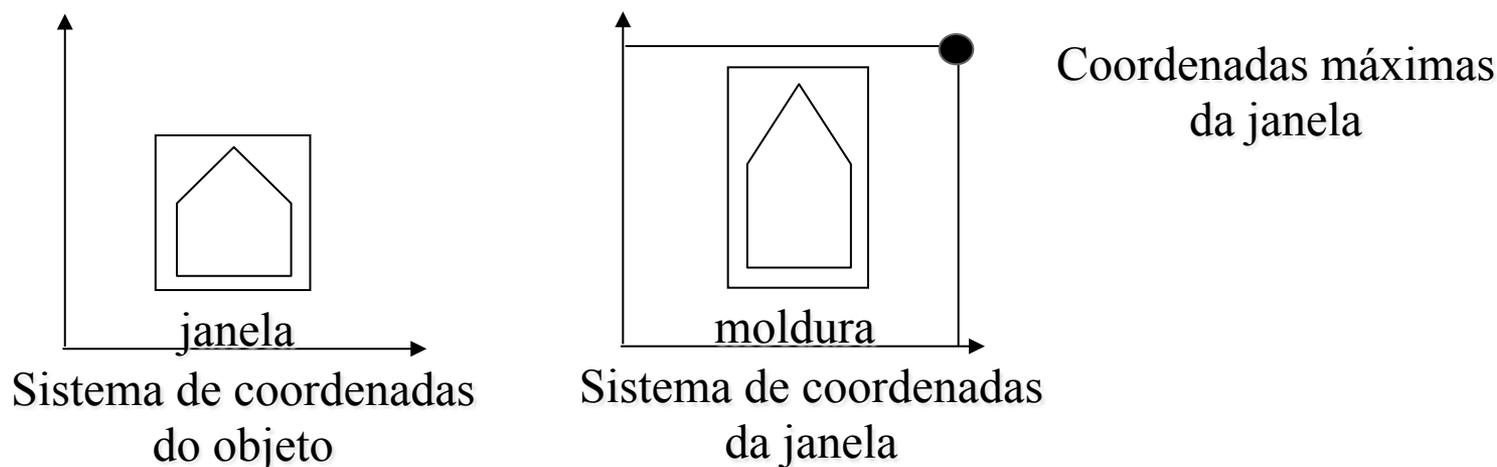
- A superfície de suporte possui um sistema de coordenadas denominado sistema de coordenadas do dispositivo.
- Exemplo: monitor
  - A tela do monitor é a materialização de uma superfície retangular com um sistema de coordenadas ortogonais com origem em algum ponto da tela.

## Transformações geométricas: transformações de tela

- Um objeto gráfico possui um sistema de coordenadas no qual as coordenadas dos seus pontos são especificadas.
- Esse sistema de coordenadas é denominado sistema de coordenadas do objeto.
- Para exibirmos um objeto gráfico precisamos fazer uma mudança de sistema de coordenadas do objeto para o sistema do dispositivo.

# Transformações geométricas: transformações de tela

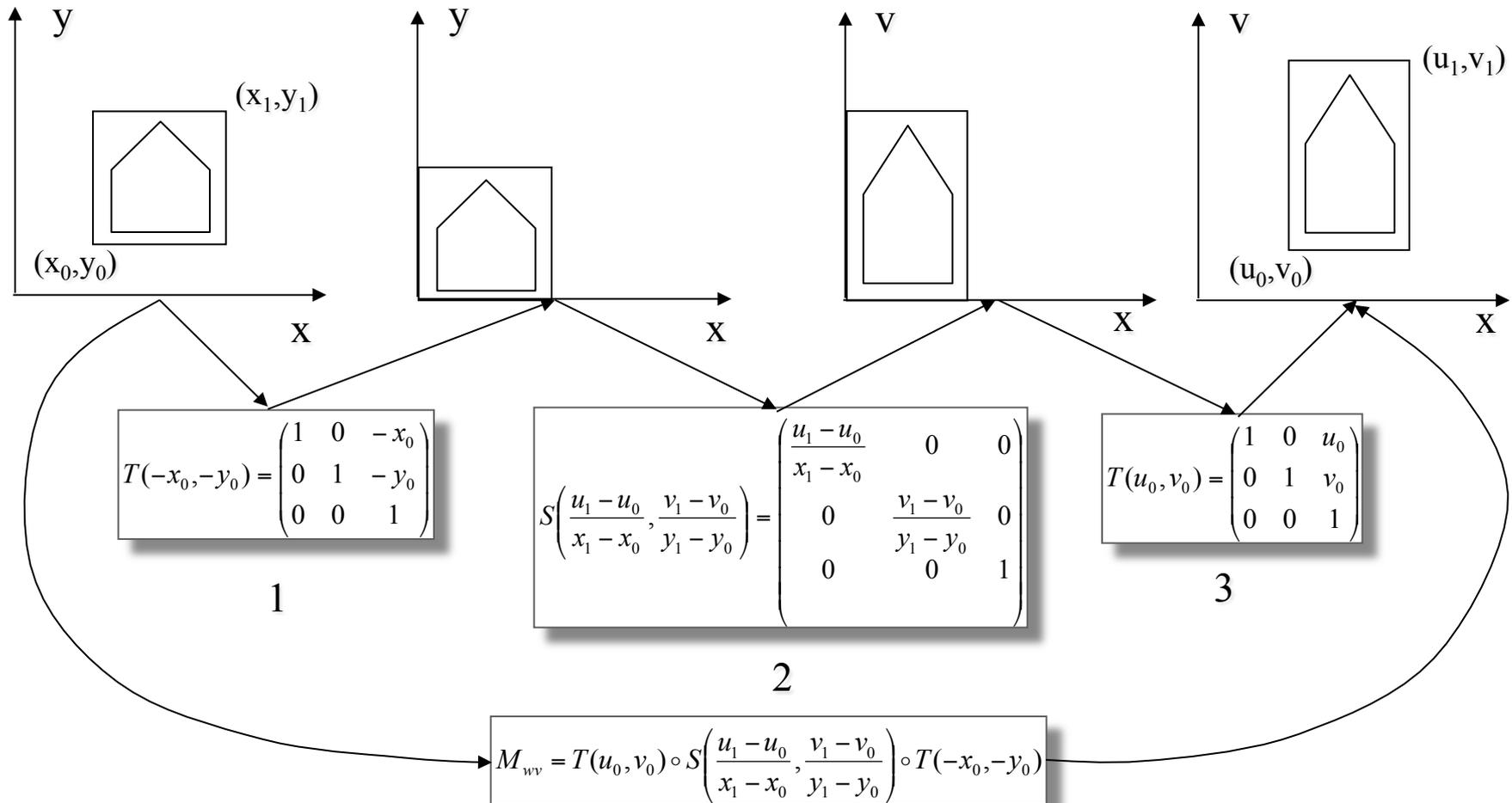
- Na transformação de tela é feita através do mapeamento entre dois retângulos.
  - A janela (*window*), definida no sistema de coordenadas do objeto, e a moldura (*viewport*), é definida no sistema de coordenadas do dispositivo.



## Transformações geométricas: transformações de tela

- A janela é especificada através de um par de pontos  $(x_0, y_0)$  e  $(x_1, y_1)$  e a viewport por um outro par  $(u_0, v_0)$  e  $(u_1, v_1)$ .
- As mudanças de coordenadas são realizadas através da seguinte sequência de transformações:
  1. Translada-se o ponto  $(x_0, y_0)$  para a origem do sistema de coordenadas do mundo.
  2. Aplica-se uma mudança de escala para transformar o novo retângulo da janela num retângulo congruente ao retângulo da moldura.
  3. Translada-se o ponto da origem do sistema do dispositivo para o ponto  $(u_0, v_0)$  da moldura.

# Transformações geométricas: transformações de tela



## Algoritmos para rastreio: introdução

- Rastreio: processo através do qual primitivas geométricas como, por exemplo, linhas e polígonos, são transformadas em imagens digitais.
- Composto de duas etapas:
  - Determinar quais células da imagem são ocupadas pela primitiva.
  - Atribuir os respectivos atributos (cor, profundidade, etc.) a cada uma dos elementos ocupados.