Computação Gráfica

TCC-00291

Assunto: Curvas e Superfícies

Instituto de Computação

Curvas e Superfícies

Introdução

Um objeto gráfico representa a geometria (forma) e os atributos (propriedades) de um objeto do mundo real.

Curvas e Superfícies

Introdução

Um objeto gráfico representa a geometria (forma) e os atributos (propriedades) de um objeto do mundo real.

A área que lida com a modelagem de objetos gráficos é denominada Modelagem Geométrica.

Curvas e Superfícies

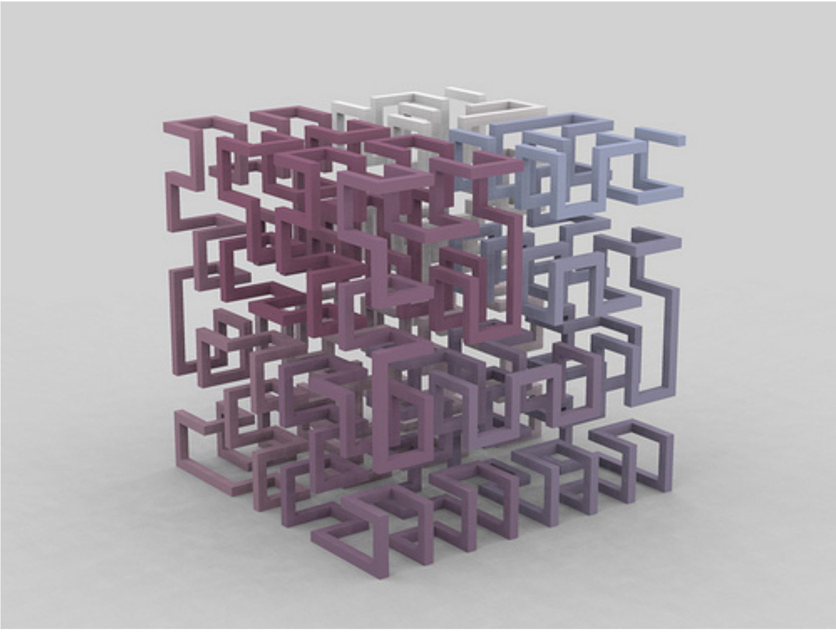
Introdução

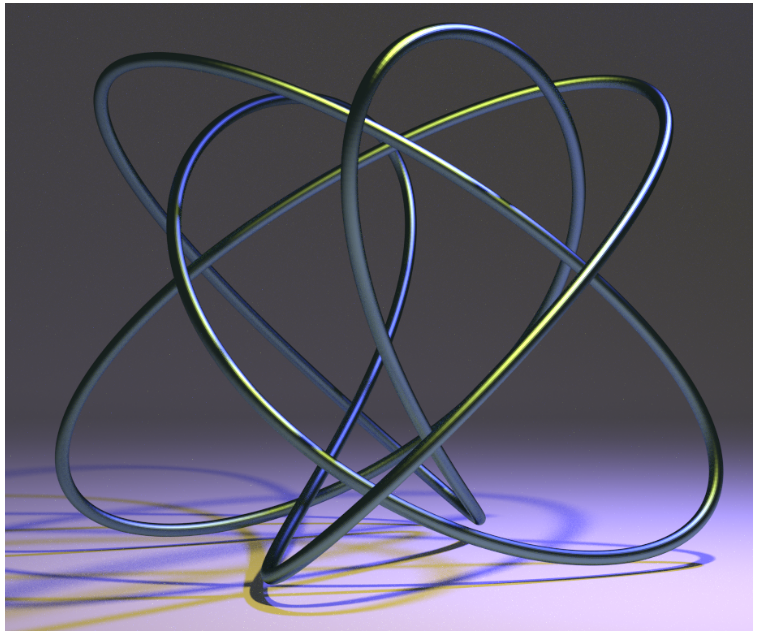
Estudaremos: Curvas e Superfícies.

Curvas e Superfícies

Introdução

Estudaremos: Curvas e Superfícies.





Curvas e Superfícies
Introdução

Estudaremos: Curvas e Superfícies.

Curvas e Superfícies

Introdução

Estudaremos: Curvas e Superfícies.

Curvas e superfícies são objetos matemáticos fundamentais na modelagem de objetos gráficos.

Curvas e Superfícies

Introdução

Estudaremos: Curvas e Superfícies.

Curvas e superfícies são objetos matemáticos fundamentais na modelagem de objetos gráficos.

Uma das representações mais utilizadas para curvas e superfícies é a baseada em funções paramétricas.

Curvas e Superfícies

Curvas paramétricas

Uma curva paramétrica no $\mathbb{R}^3$ é uma função:

$$I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

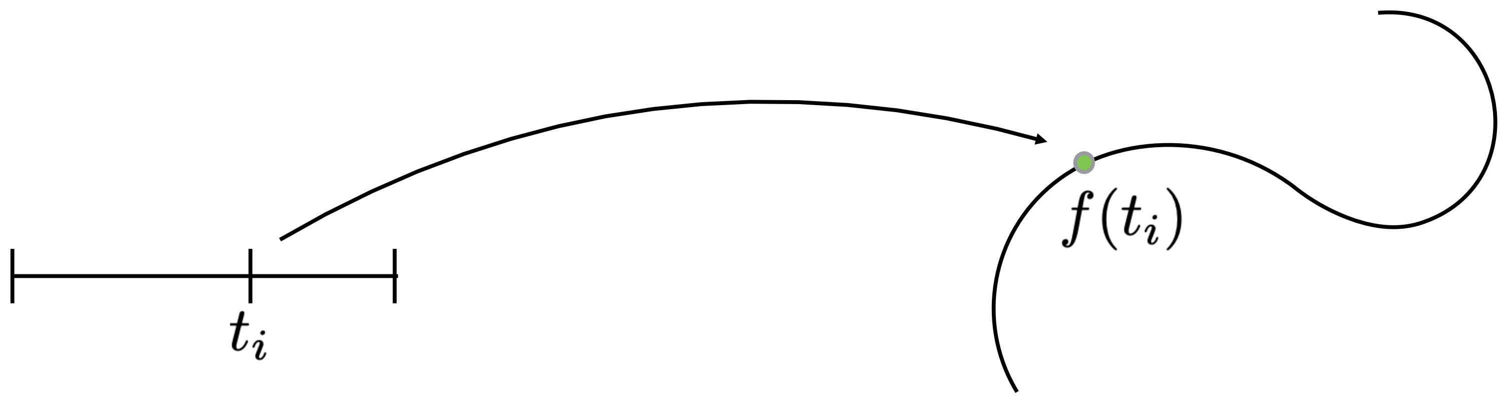
Curvas e Superfícies

Curvas paramétricas

Uma curva paramétrica no $\mathbb{R}^3$ é uma função:

$$I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

$$f(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

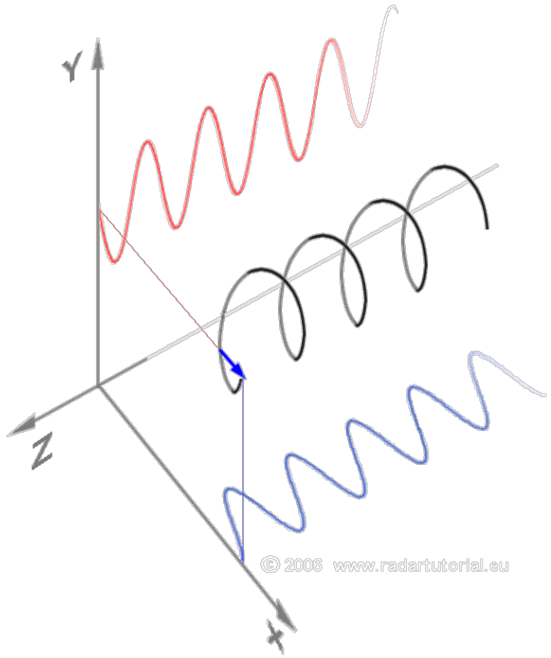


Curvas e Superfícies

Curvas paramétricas

Exemplos de parametrizações de curvas.

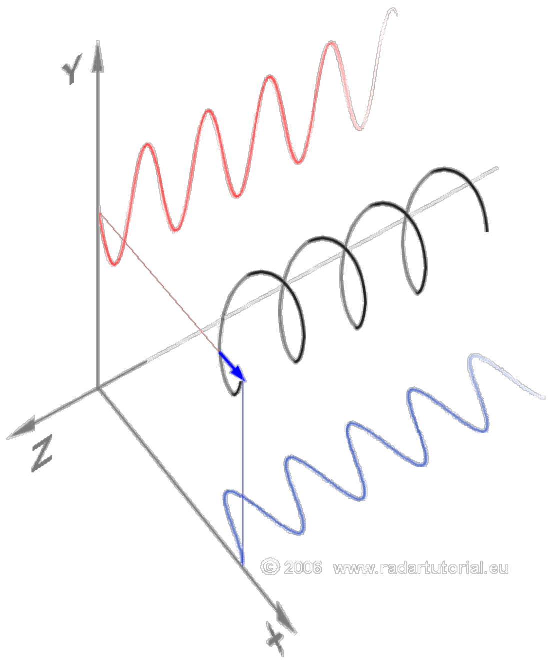
Hélice:



Curvas e Superfícies
Curvas paramétricas

Exemplos de parametrizações de curvas.

Hélice:



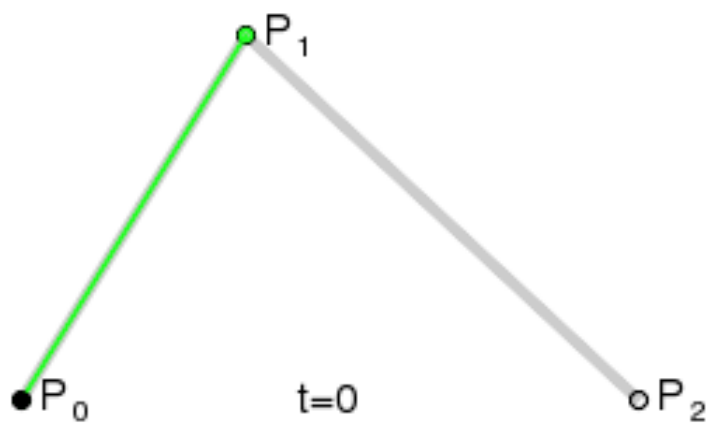
$$f(t) = \begin{cases} x(t) = cos(t) \\ y(t) = sen(t) \\ z(t) = t \end{cases}$$

Curvas e Superfícies

Curvas paramétricas

Exemplos de parametrizações de curvas.

Curvas interativas.

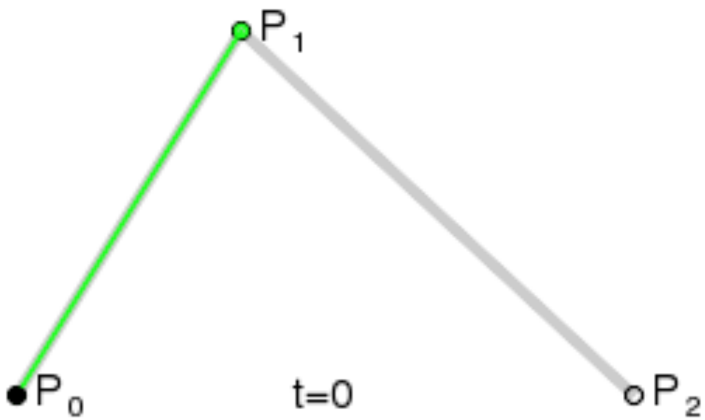


Curvas e Superfícies

Curvas paramétricas

Exemplos de parametrizações de curvas.

Curvas interativas.



$$f(t) =$$

Curvas e Superfícies

Curvas Interativas

Esquema paramétrico de representação apropriado para a modelagem interativa.

Curvas e Superfícies

Curvas Interativas

Esquema paramétrico de representação apropriado para a modelagem interativa.

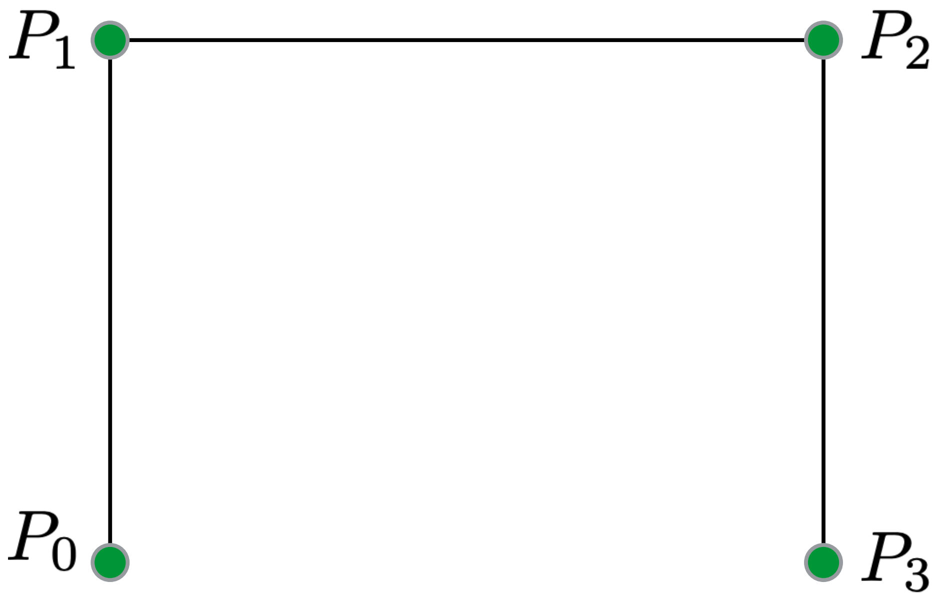
Caracterizada por dois conjuntos: Um formado por pontos de controle e outro formado por funções de base.

Obs:
Estudaremos apenas curvas de Bezier. Adaptações para superfícies são extensões das técnicas apresentadas.

Curvas e Superfícies

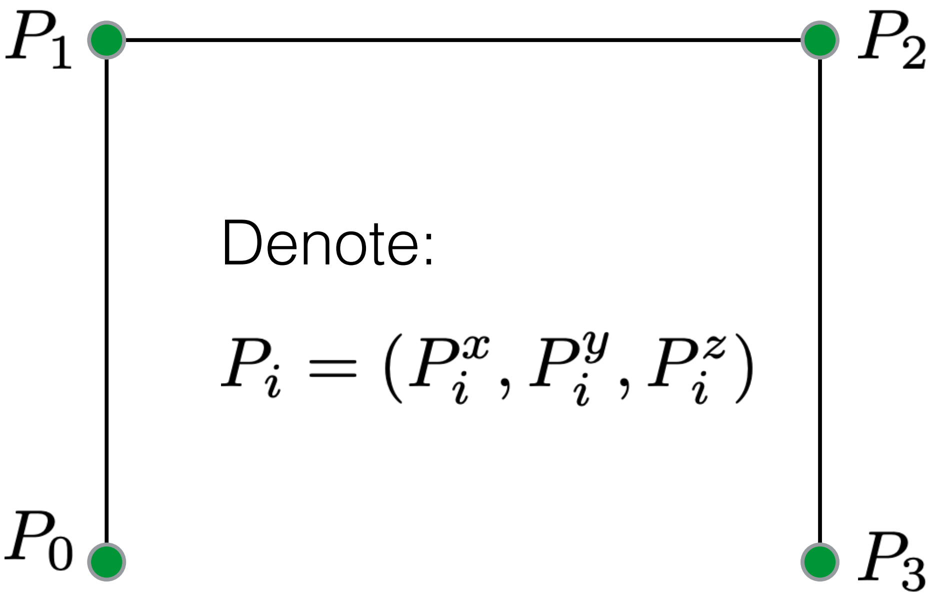
Curvas de Bézier

Considere a figura:



Curvas e Superfícies
Curvas de Bézier

Considere a figura:



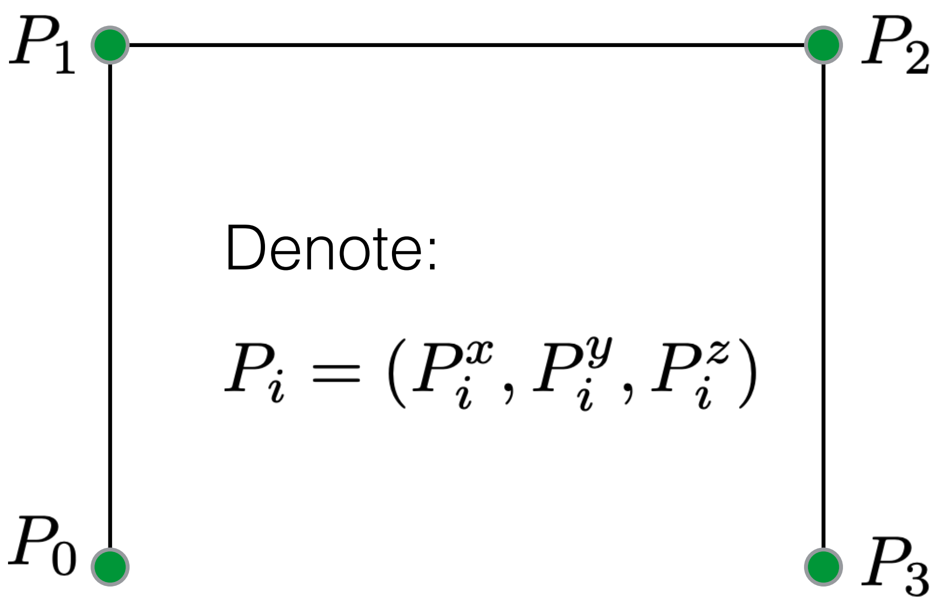
Denote:

$$P_i = (P_i^x, P_i^y, P_i^z)$$

Curvas e Superfícies

Curvas de Bézier

Considere a figura:



Denote:

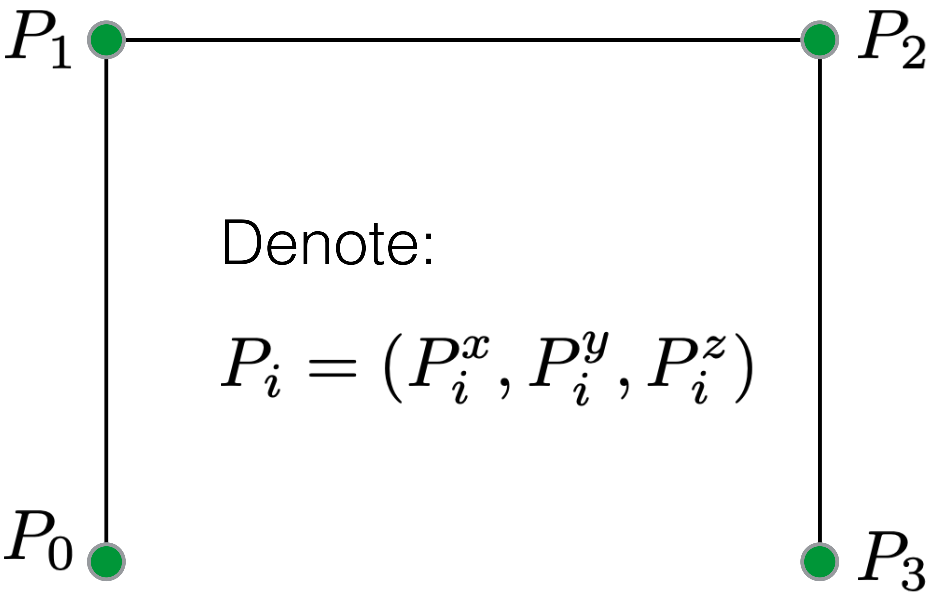
$$P_i = (P_i^x, P_i^y, P_i^z)$$

Pode-se determinar uma curva paramétrica através de uma expressão que pondere a contribuição das coordenadas de cada ponto de controle.

Curvas e Superfícies

Curvas de Bézier

Considere a figura:



Denote:

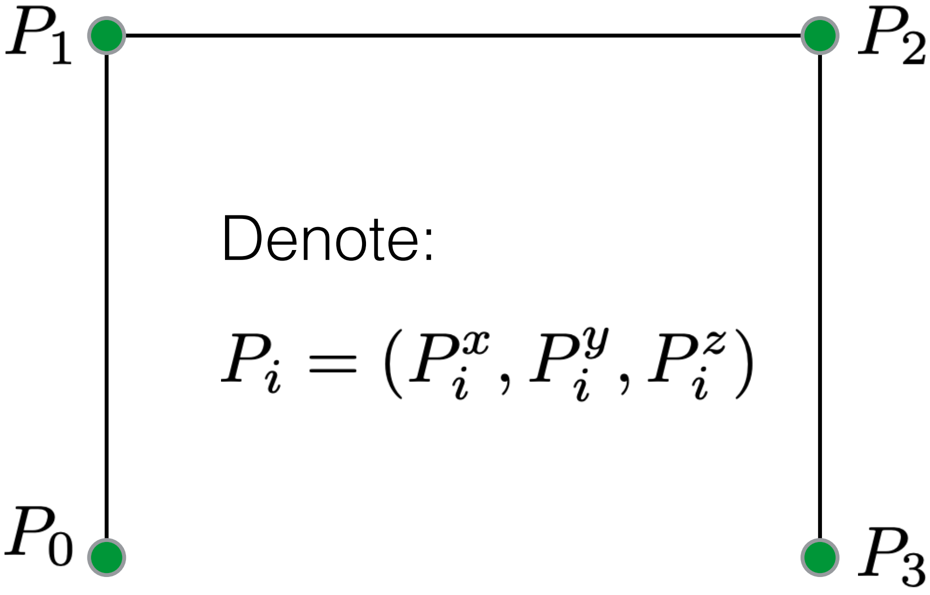
$$P_i = (P_i^x, P_i^y, P_i^z)$$

A ponderação é feita através da definição de uma função de base para cada ponto de controle.

Curvas e Superfícies

Curvas de Bézier

Considere a figura:



Denote:

$$P_i = (P_i^x, P_i^y, P_i^z)$$

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i^x B_i(t)$$

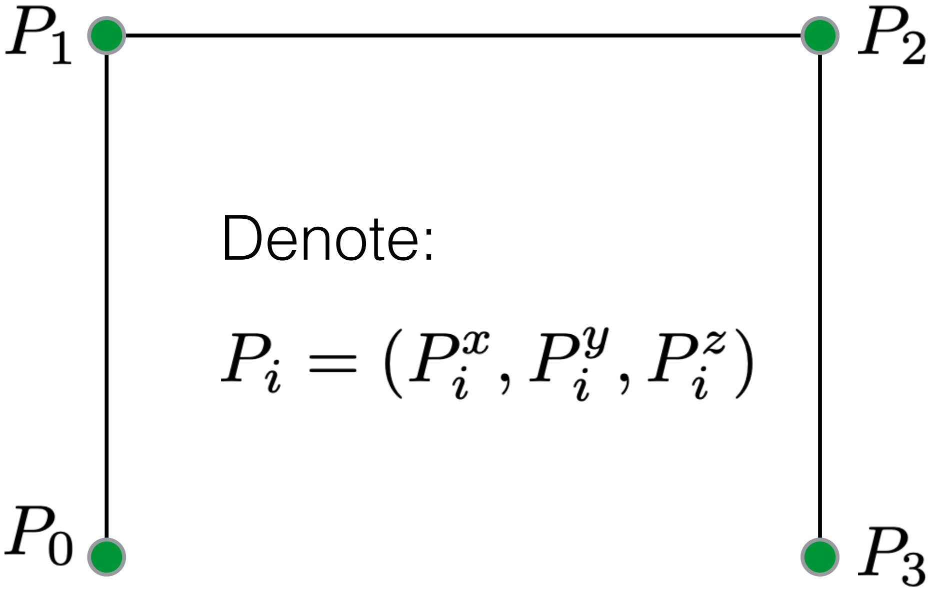
$$y(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i^y B_i(t)$$

$$z(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i^z B_i(t)$$

Curvas e Superfícies

Curvas de Bézier

Considere a figura:



Denote:

$$P_i = (P_i^x, P_i^y, P_i^z)$$

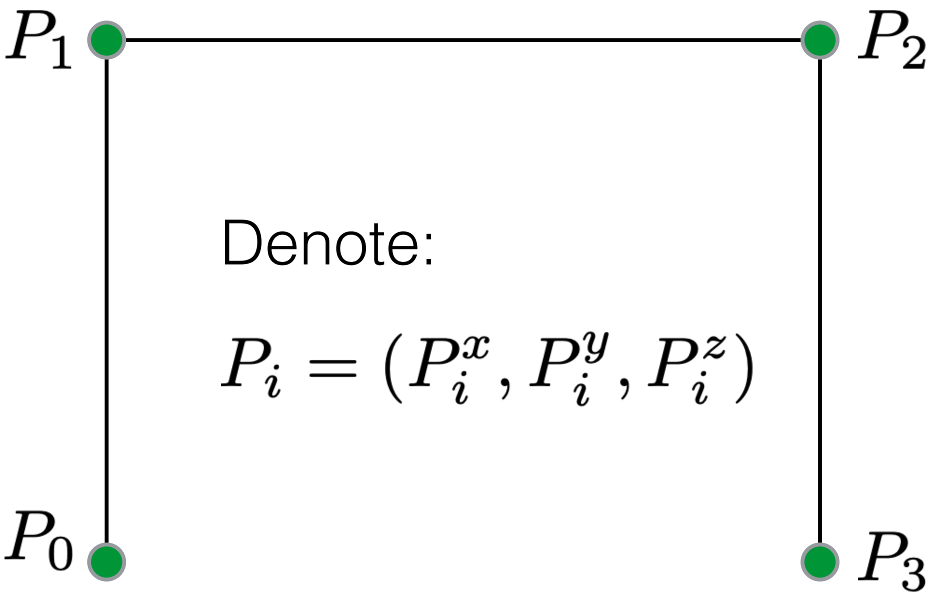
Cada tipo de função base possui suas características.

Uma das propriedades diz respeito ao fato delas gerarem curvas que interpolam ou aproximam os pontos de controle.

Curvas e Superfícies

Curvas de Bézier

Considere a figura:



Denote:

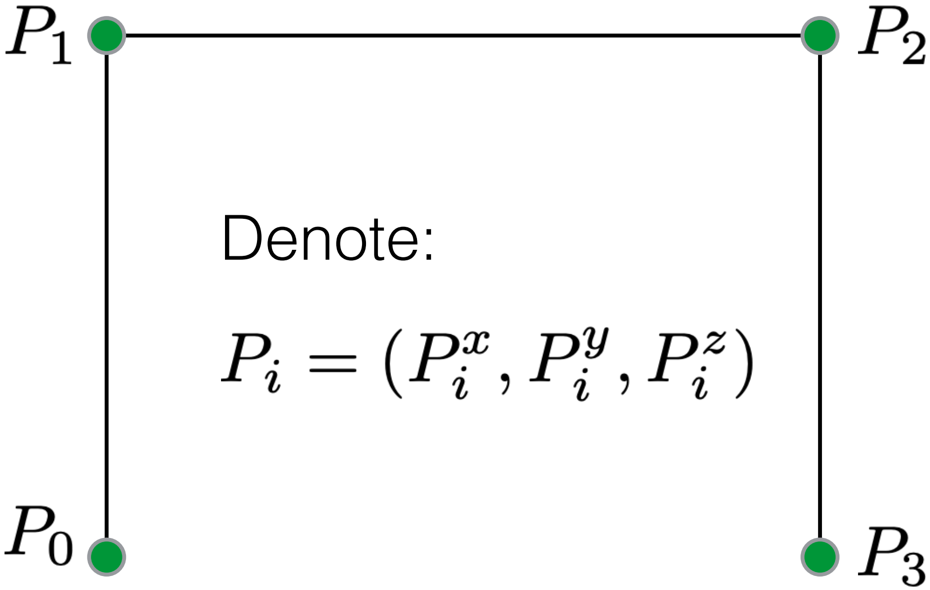
$$P_i = (P_i^x, P_i^y, P_i^z)$$

É comum utilizarmos funções de base cúbicas, já que estas são capazes de representar formas 3d.

Curvas e Superfícies

Curvas de Bézier

Considere a figura:



Denote:

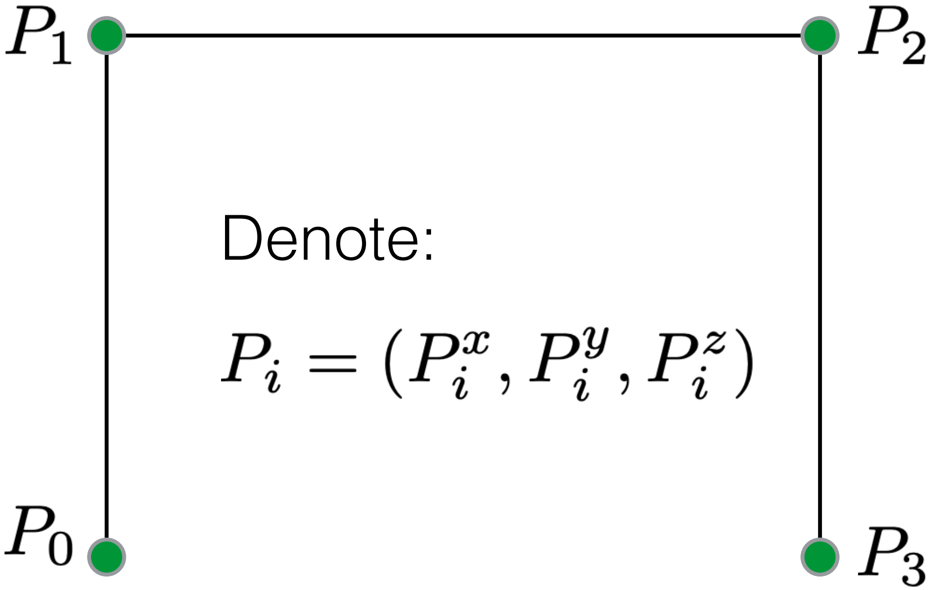
$$P_i = (P_i^x, P_i^y, P_i^z)$$

É comum utilizarmos funções de base cúbicas, já que estas são capazes de representar formas 3d.

Graus mais elevados aumentam o custo da representação.

Curvas e Superfícies
Curvas de Bézier

Considere a figura:



Denote:

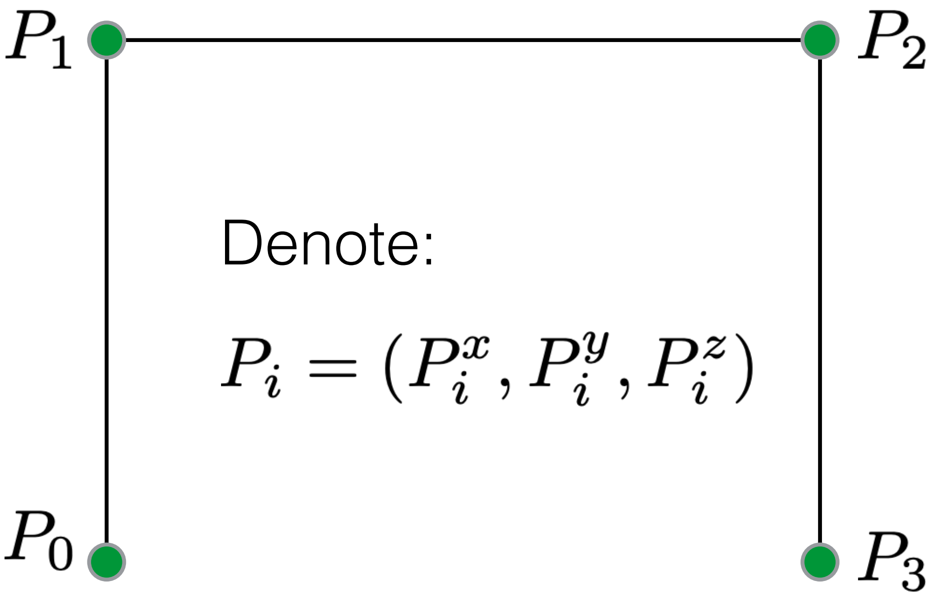
$$P_i = (P_i^x, P_i^y, P_i^z)$$

$$x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d^x$$
$$y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d^y$$
$$z(t) = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d^z$$

Curvas e Superfícies

Curvas de Bézier

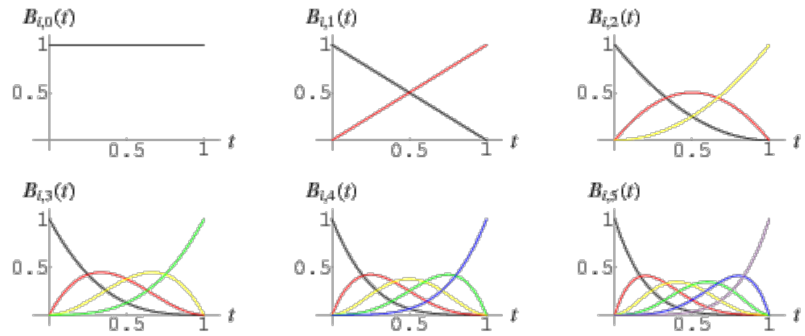
Considere a figura:



Denote:

$$P_i = (P_i^x, P_i^y, P_i^z)$$

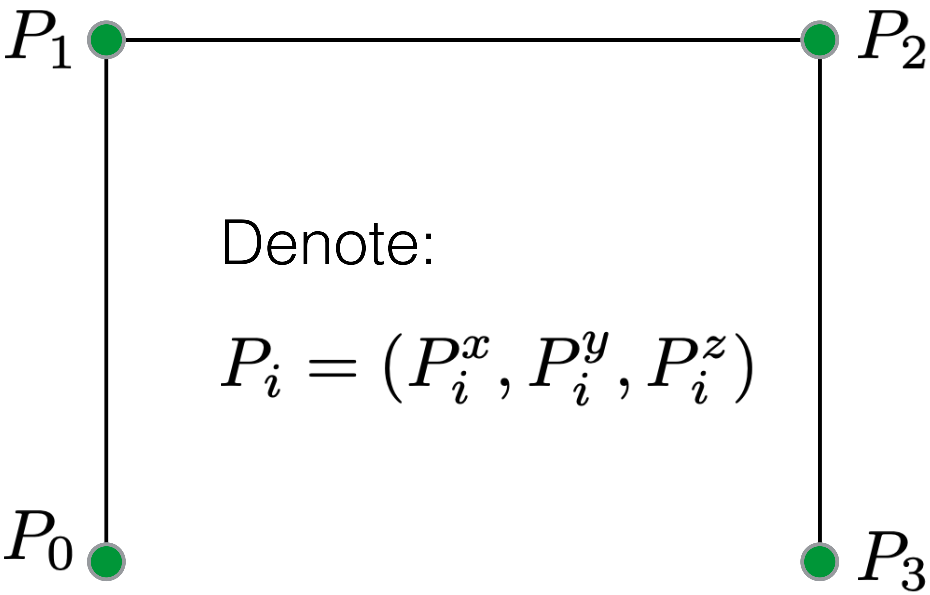
Base de Bernstein:



Curvas e Superfícies

Curvas de Bézier

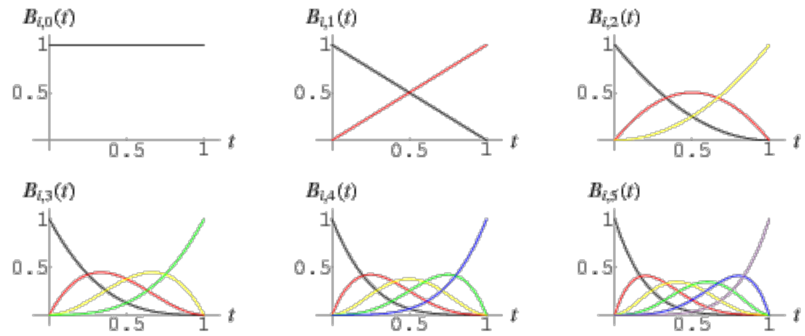
Considere a figura:



Denote:

$$P_i = (P_i^x, P_i^y, P_i^z)$$

Base de Bernstein:

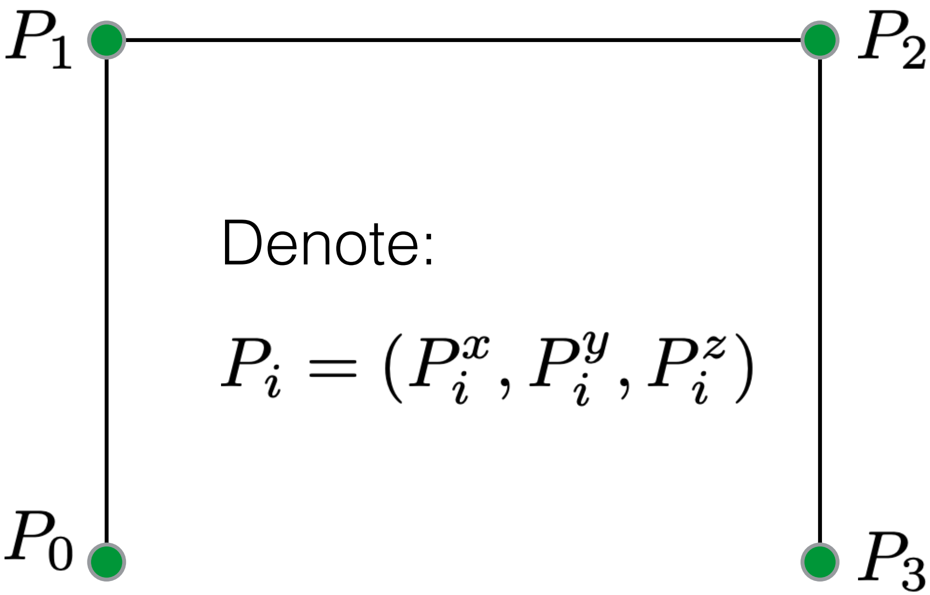


$$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

Curvas e Superfícies

Curvas de Bézier

Considere a figura:



Denote:

$$P_i = (P_i^x, P_i^y, P_i^z)$$

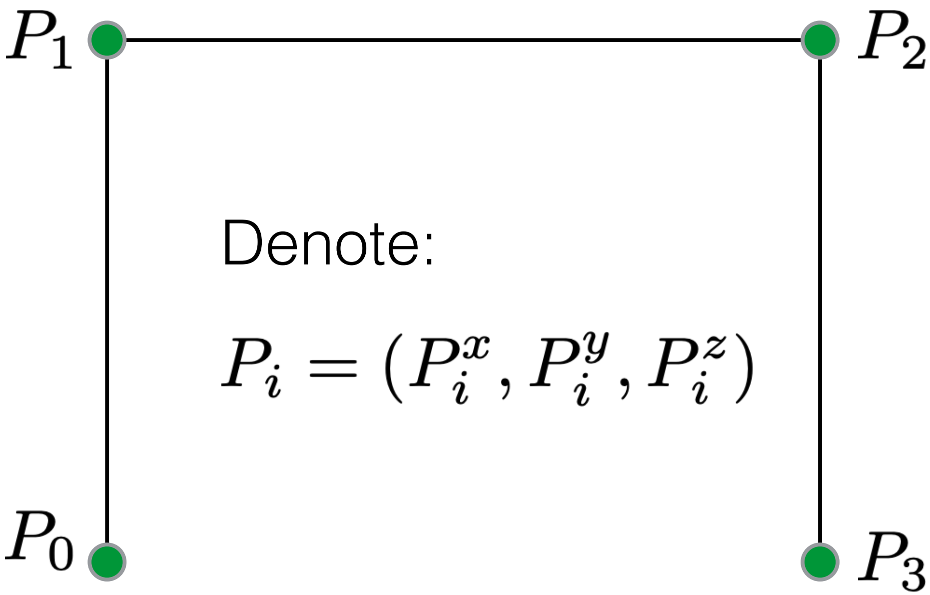
Base de Bernstein:

$$B_{0,3} = (1-t)^3$$
$$B_{1,3} = 3t(1-t)^2$$
$$B_{2,3} = 3t^2(1-t)$$
$$B_{3,3} = t^3$$

Curvas e Superfícies

Curvas de Bézier

Considere a figura:



Denote:

$$P_i = (P_i^x, P_i^y, P_i^z)$$

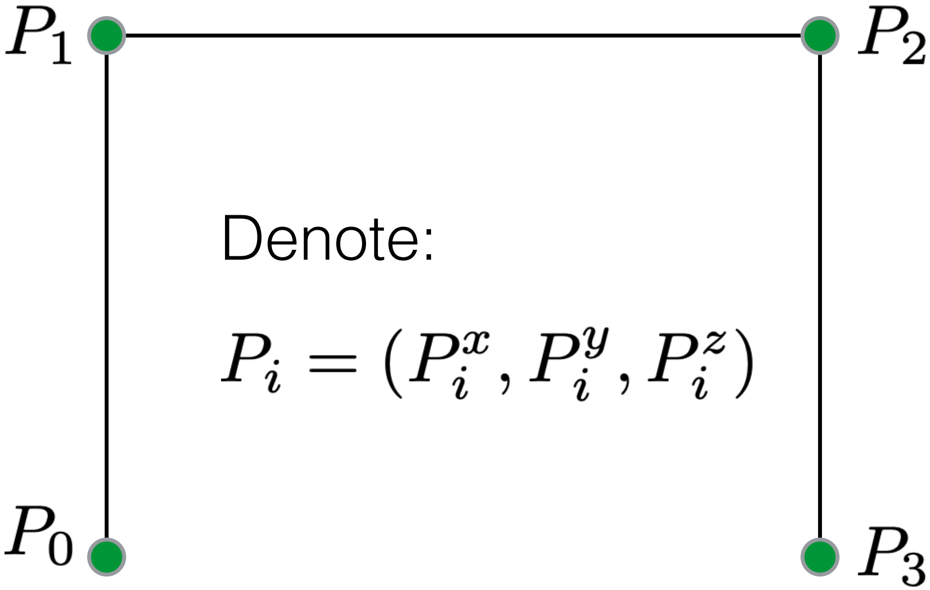
Base de Bernstein:

Para uma curva de grau n são necessários n+1 pontos de controle.

Curvas e Superfícies

Curvas de Bézier

Considere a figura:



Denote:

$$P_i = (P_i^x, P_i^y, P_i^z)$$

Base de Bernstein:

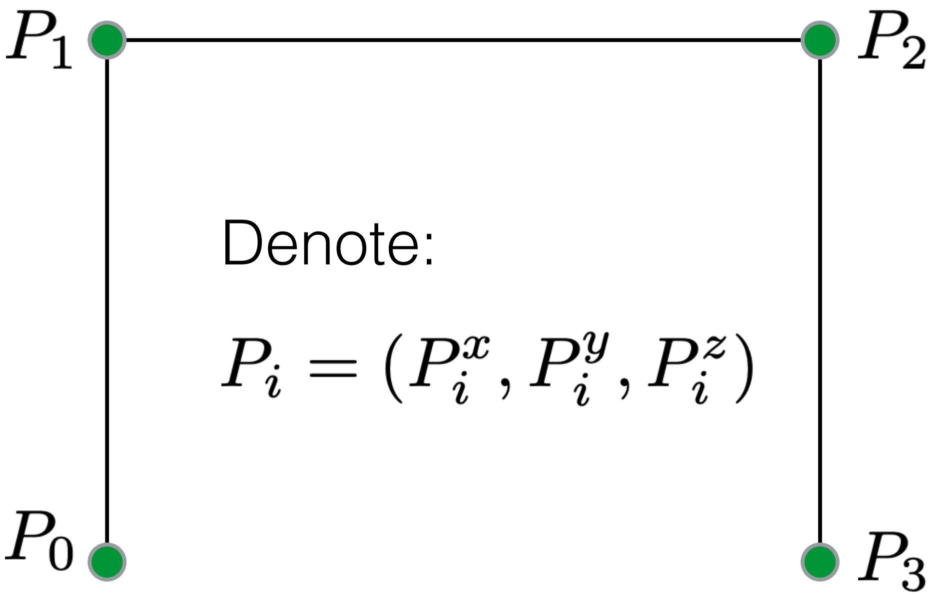
Para uma curva de grau n são necessários n+1 pontos de controle.

A movimentação dos pontos de controle altera a forma da curva.

Curvas e Superfícies

Curvas de Bézier

Considere a figura:



Denote:

$$P_i = (P_i^x, P_i^y, P_i^z)$$

Composição:

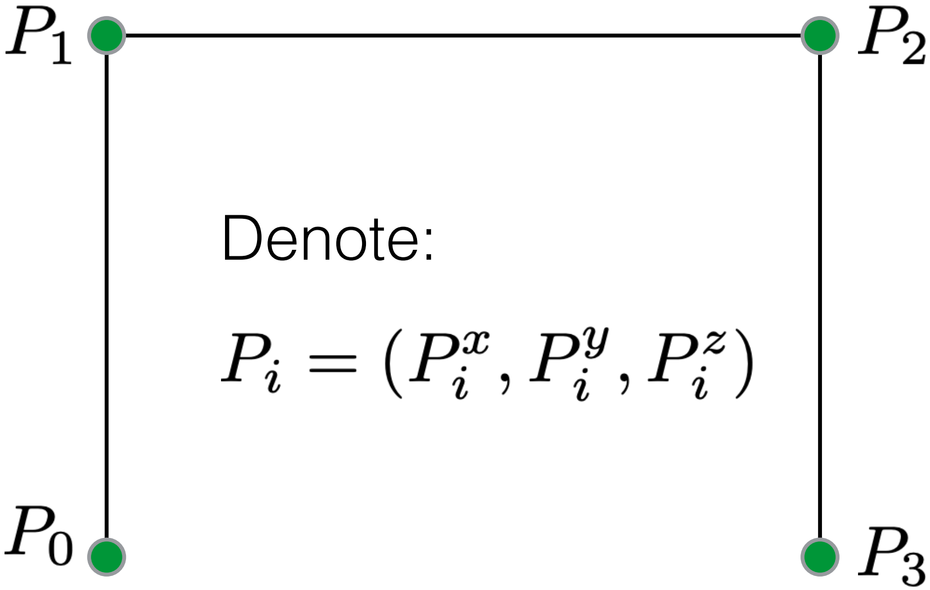
Segmentos de curva podem ser conectados para gerar formas mais complexas.

O resultado é uma curva polinomial por partes. A conexão requer restrições nos pontos de junção.

Curvas e Superfícies

Curvas de Bézier

Considere a figura:



Denote:

$$P_i = (P_i^x, P_i^y, P_i^z)$$

Composição:

Derivando a equação da curva em relação a t, mostramos que:

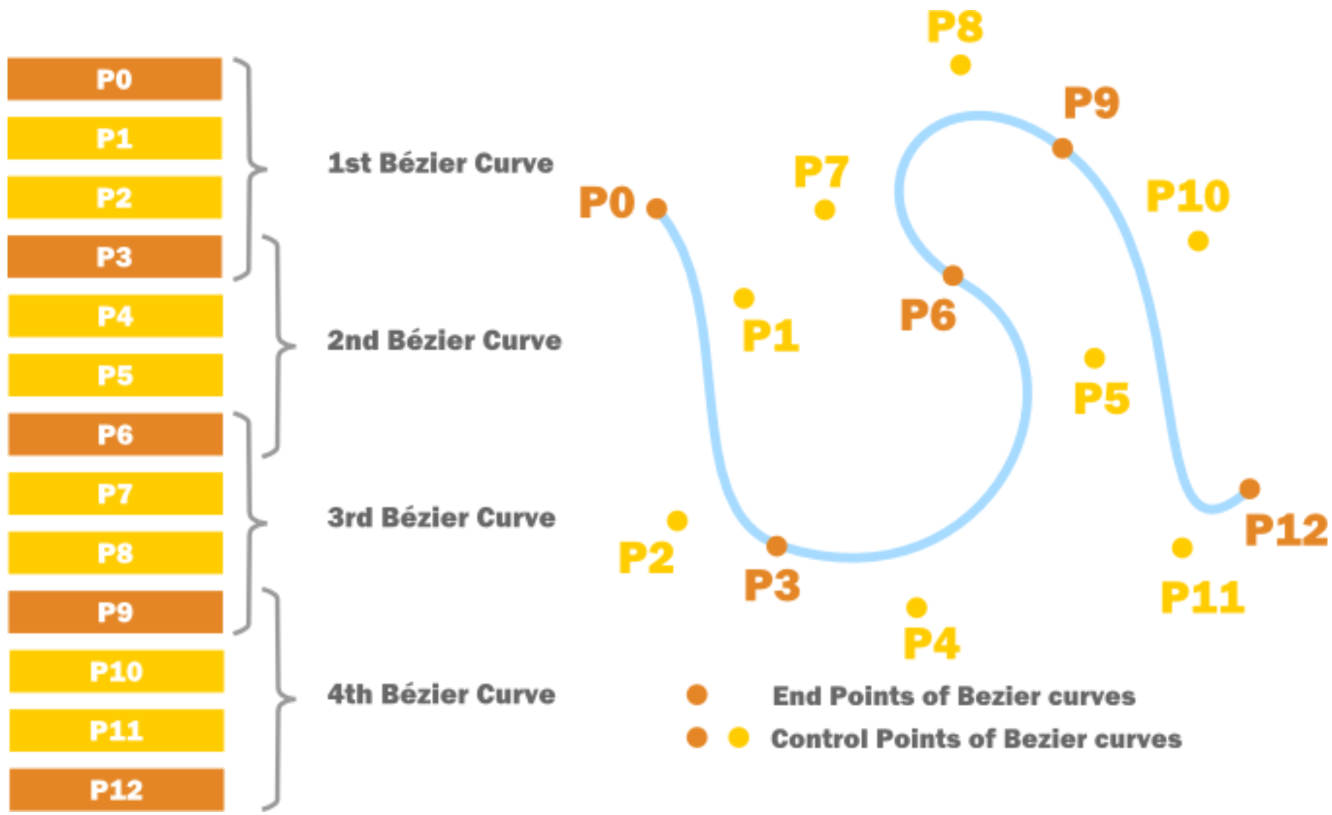
$$\frac{df}{dt}(0) = 3(P_1 - P_0)$$

$$\frac{df}{dt}(1) = 3(P_3 - P_4)$$

Curvas e Superfícies

Curvas de Bézier

Composição:



Curvas e Superfícies

Curvas de Bézier

Curvas de Bézier possuem duas grandes desvantagens:

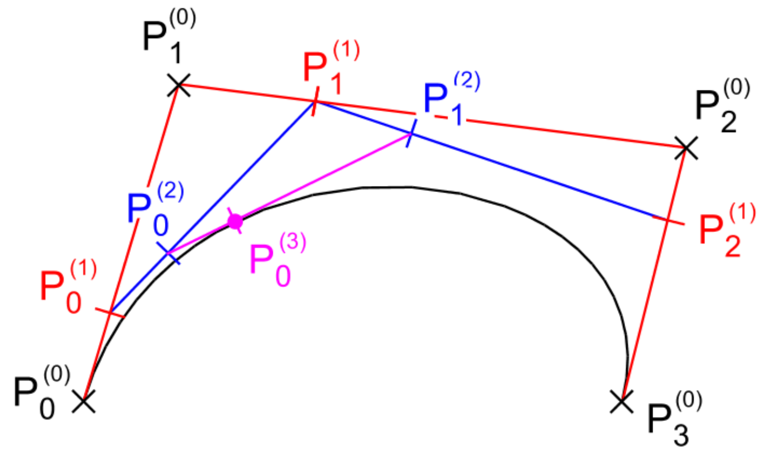
O controle exercido pelos pontos de controle não é local. A movimentação de um ponto altera toda curva, apesar de sua influência ser maior na vizinhança de tal ponto.

Não é possível definir uma curva de Bézier cúbica para aproximar ou representar um conjunto de n pontos sem utilizar múltiplos segmentos de curva.

Curvas e Superfícies

Curvas de Bézier

Algoritmo de Casteljau



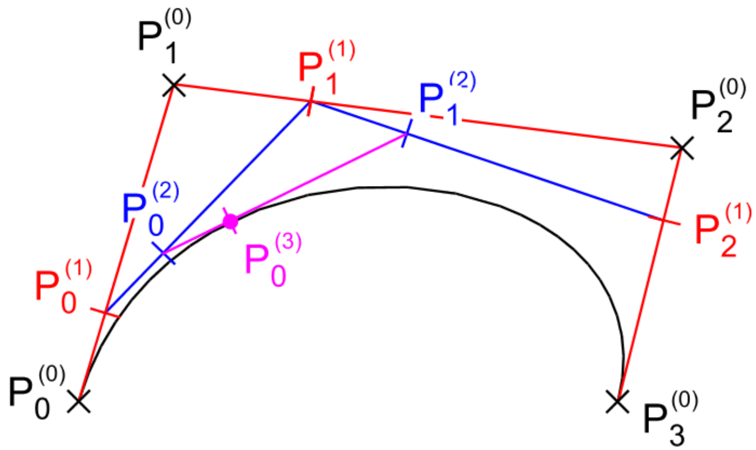
Curvas e Superfícies

Curvas de Bézier

Algoritmo de Casteljau

```
List<point> points;

private void drawCasteljau() {
      Point tmp;
      for (double t = 0; t <= 1; t += 0.001) {
            tmp = getCasteljauPoint(points.lenght-1, 0, t);
            image.SetPixel(tmp.X, tmp.Y, color);
      }
}
```




```
private Point getCasteljauPoint(int r, int i, double t) {
      if(r == 0) return points[i];

      Point p1 = getCasteljauPoint(r - 1, i, t);
      Point p2 = getCasteljauPoint(r - 1, i + 1, t);

      return new Point((int) ((1 - t) * p1.X + t * p2.X), (int) ((1 - t) * p1.Y + t * p2.Y));
}
```

Curvas e Superfícies

Relembrando…

Estudaremos: Curvas e Superfícies.

Curvas e superfícies são objetos matemáticos fundamentais na modelagem de objetos gráficos.

Uma das representações mais utilizadas para curvas e superfícies é a baseada em funções paramétricas.

Curvas e Superfícies

Relembrando...

Estudaremos: Curvas e Superfícies.

Curvas e superfícies são objetos matemáticos fundamentais na modelagem de objetos gráficos.

Uma das representações mais utilizadas para curvas e superfícies é a baseada em funções paramétricas.

Outro tipo de representação de curvas e superfícies bastante importante é a baseada em funções implícitas...

Curvas e Superfícies

Curvas implícitas

Uma curva implícita no $\mathbb{R}^3$ é um conjunto de pontos:

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | f(x, y) = z \text{ para algum } z = cnt\}$$

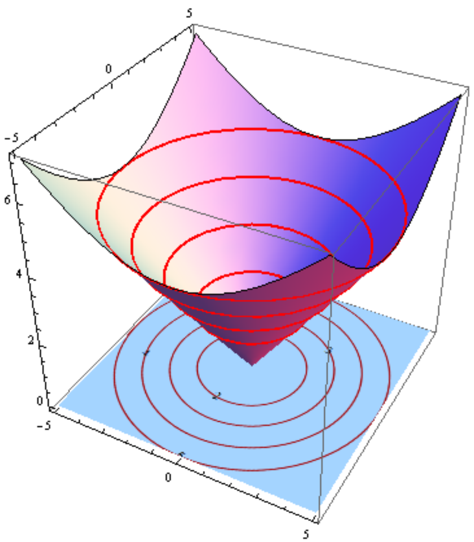
Curvas e Superfícies

Curvas implícitas

Uma curva implícita no $\mathbb{R}^3$ é um conjunto de pontos:

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | f(x, y) = z \text{ para algum } z = cnt\}$$



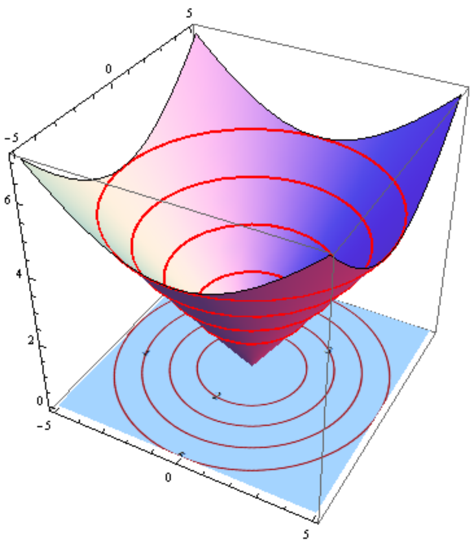
Curvas e Superfícies

Curvas implícitas

Uma curva implícita no $\mathbb{R}^3$ é um conjunto de pontos:

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | f(x, y) = z \text{ para algum } z = cnt\}$$



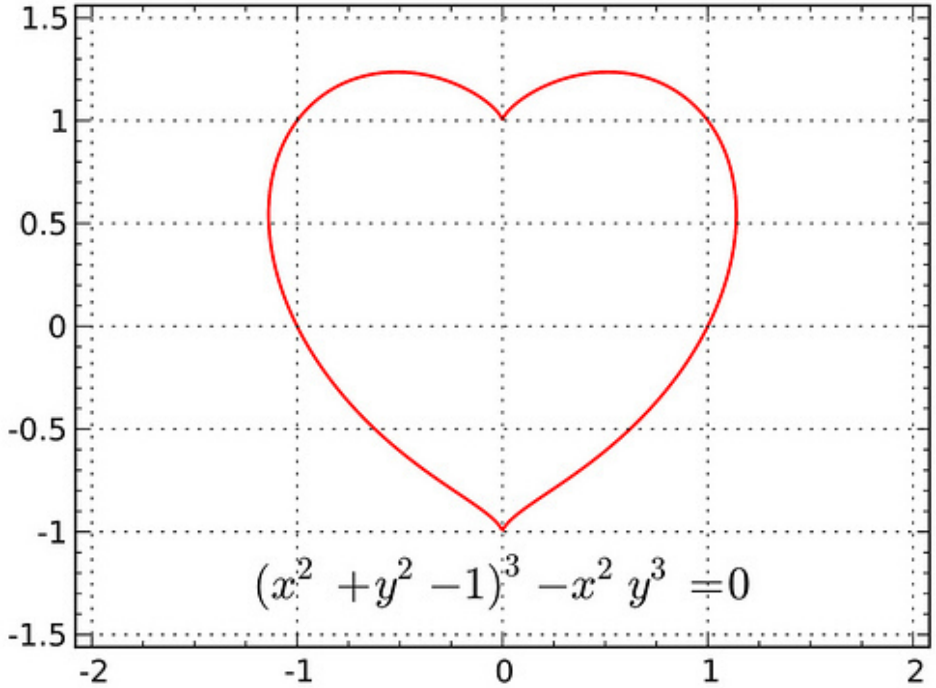
Curvas de Nível

Curvas e Superfícies

Curvas implícitas

Exemplos de curvas implícitas.

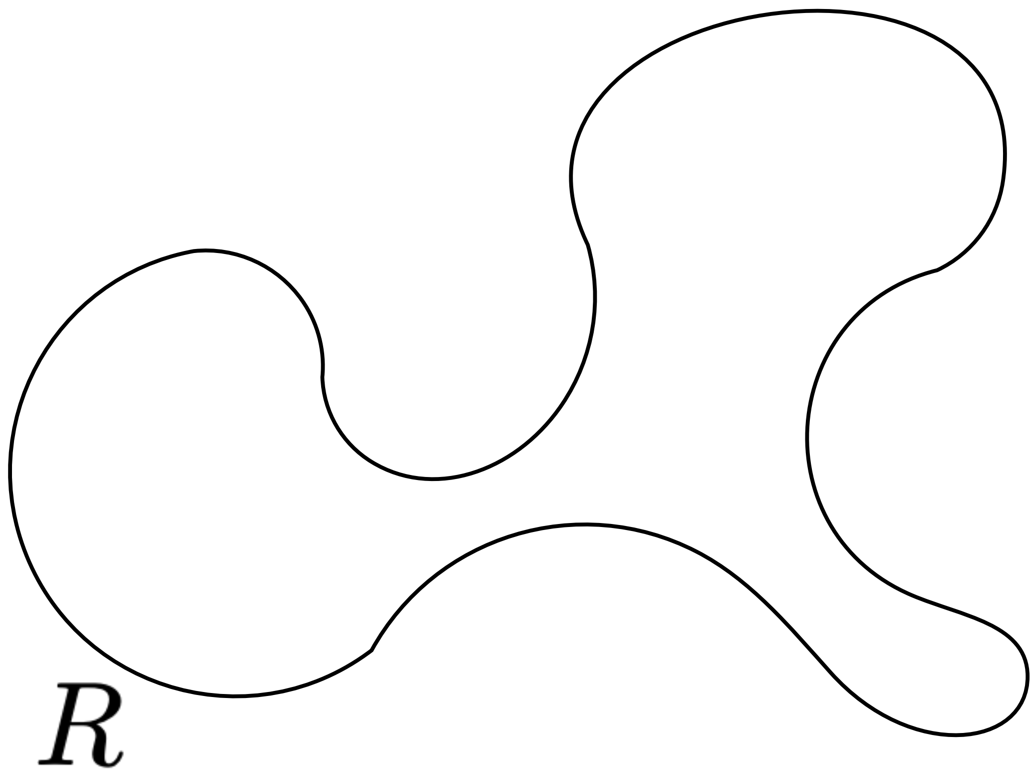
Heart:



Curvas e Superfícies

Curvas implícitas

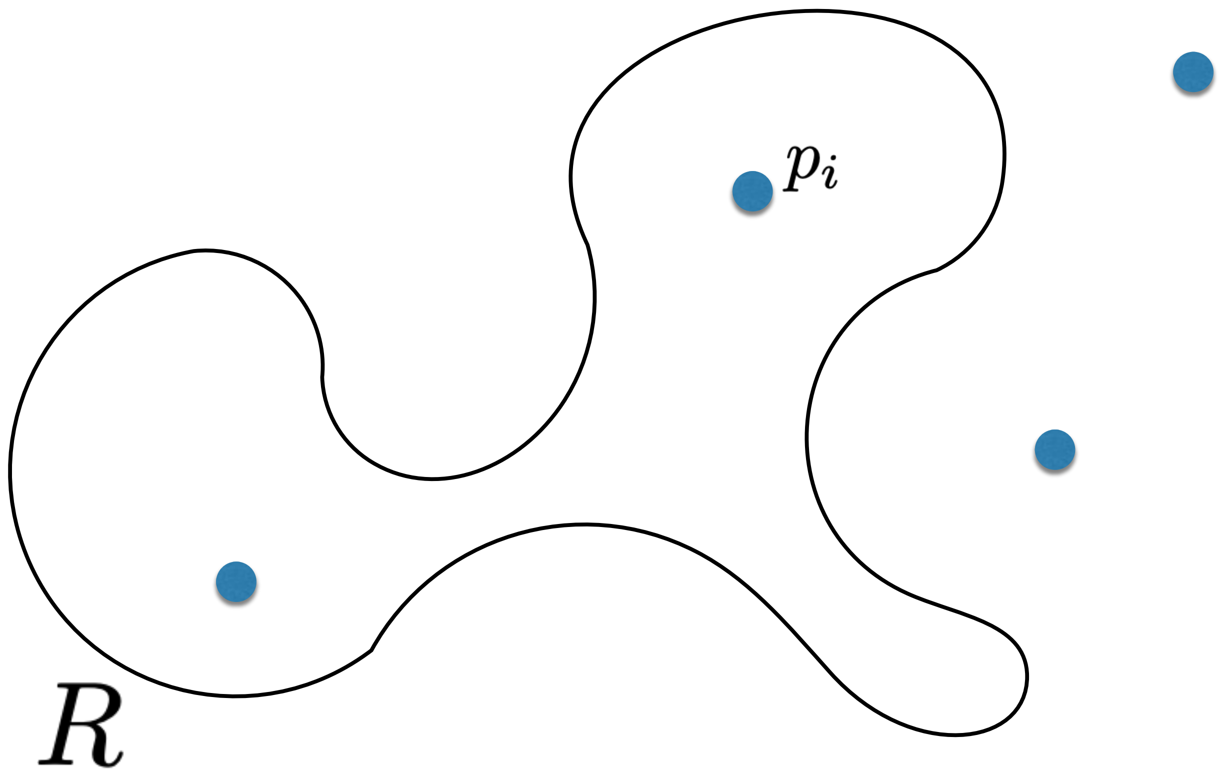
Classificação ponto conjunto.



Curvas e Superfícies

Curvas implícitas

Classificação ponto conjunto.

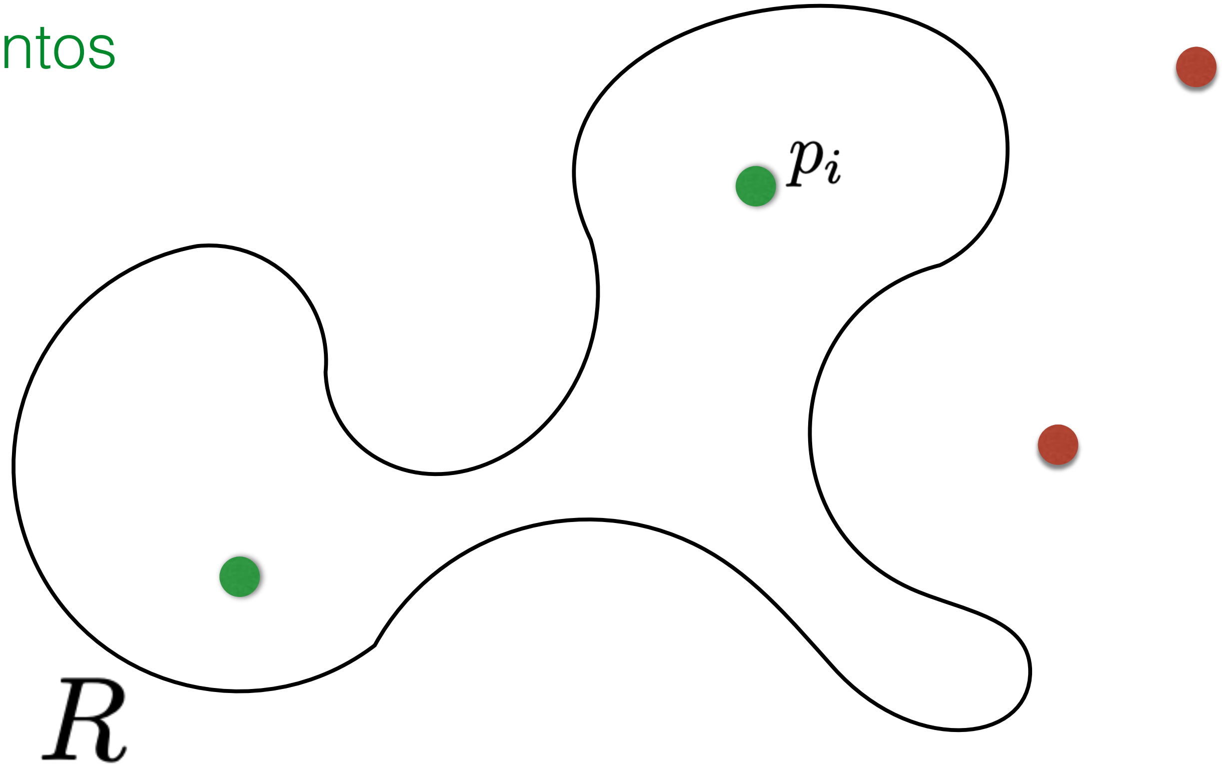


Curvas e Superfícies

Curvas implícitas

Classificação ponto conjunto.

Quais os pontos
$p_i \in R$?

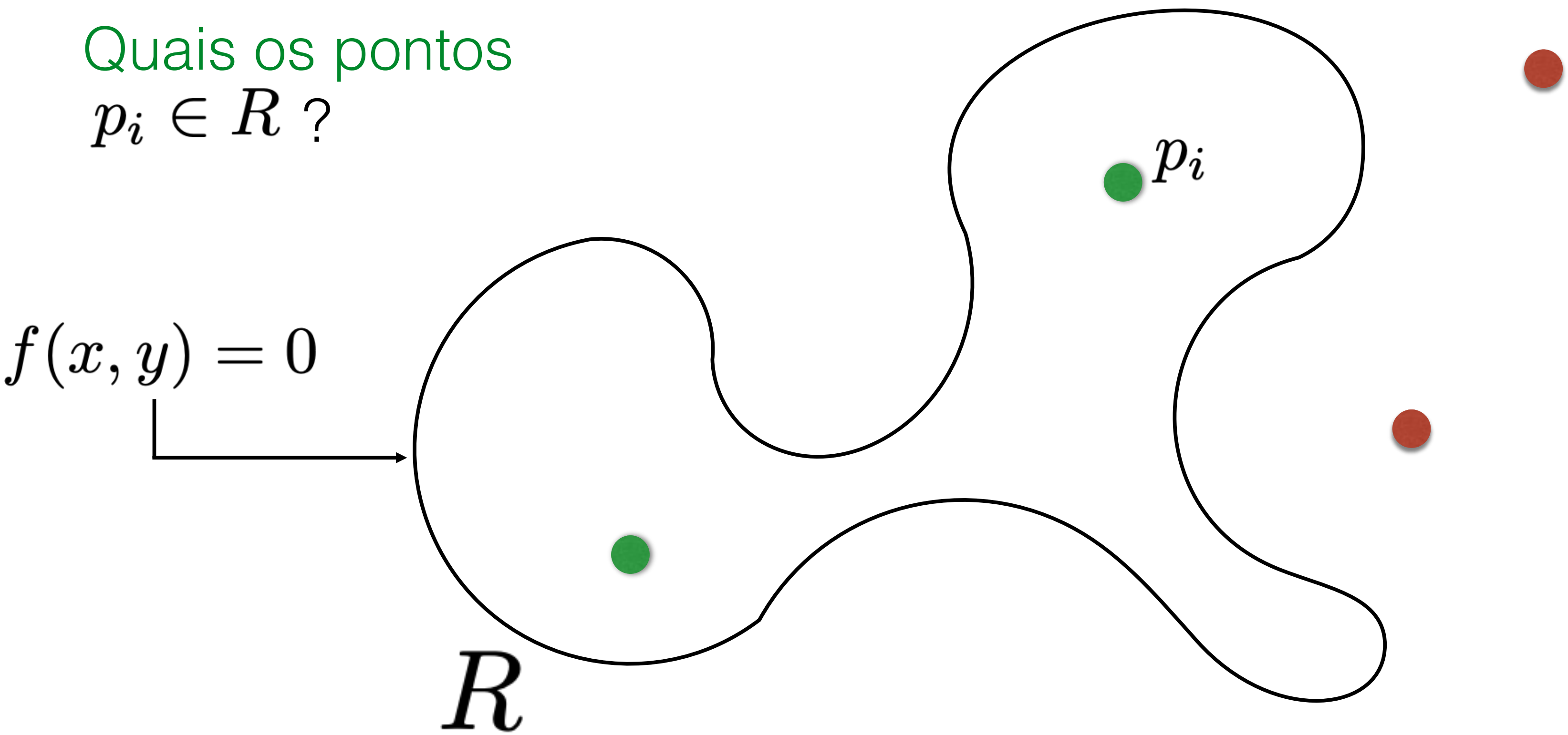


Curvas e Superfícies

Curvas implícitas

Classificação ponto conjunto.

Quais os pontos
$p_i \in R$?

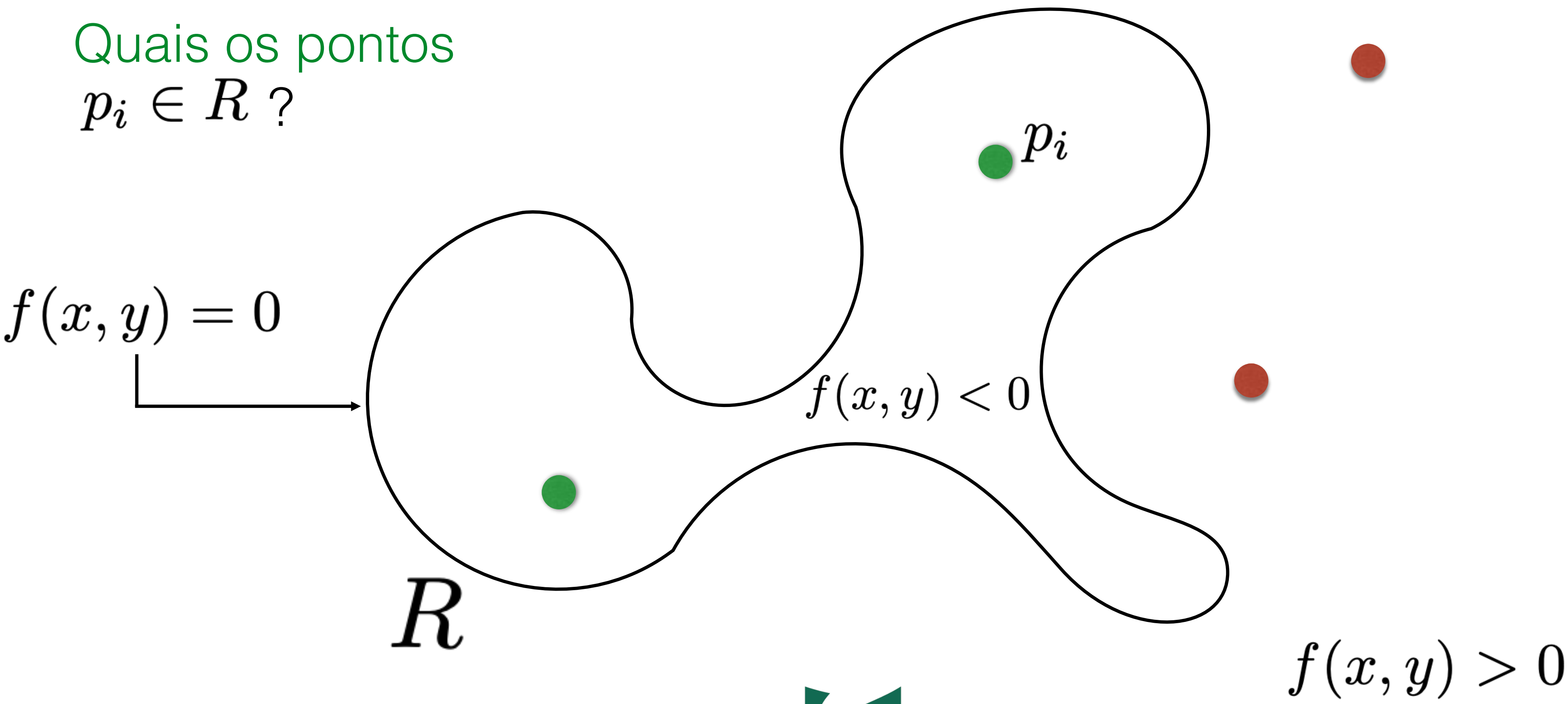


Curvas e Superfícies

Curvas implícitas

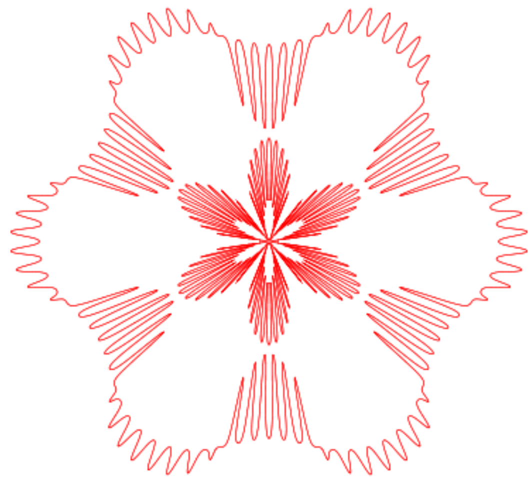
Classificação ponto conjunto.

Quais os pontos
$p_i \in R$?



Curvas e Superfícies

Curvas implícitas

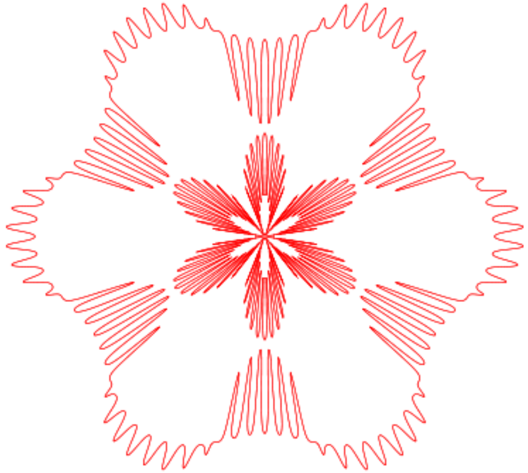


Visualização.

Como desenhar uma curva implícita?

Curvas e Superfícies

Curvas implícitas



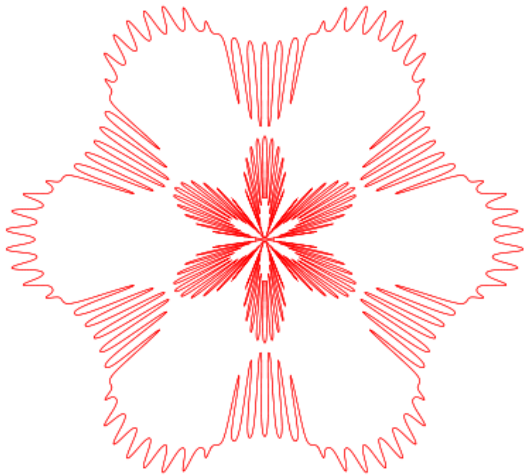
Visualização.

Como desenhar uma curva implícita?

A discretização de uma curva implícita exige a utilização de algoritmos sofisticados.

Curvas e Superfícies

Curvas implícitas



Visualização.

Como desenhar uma curva implícita?

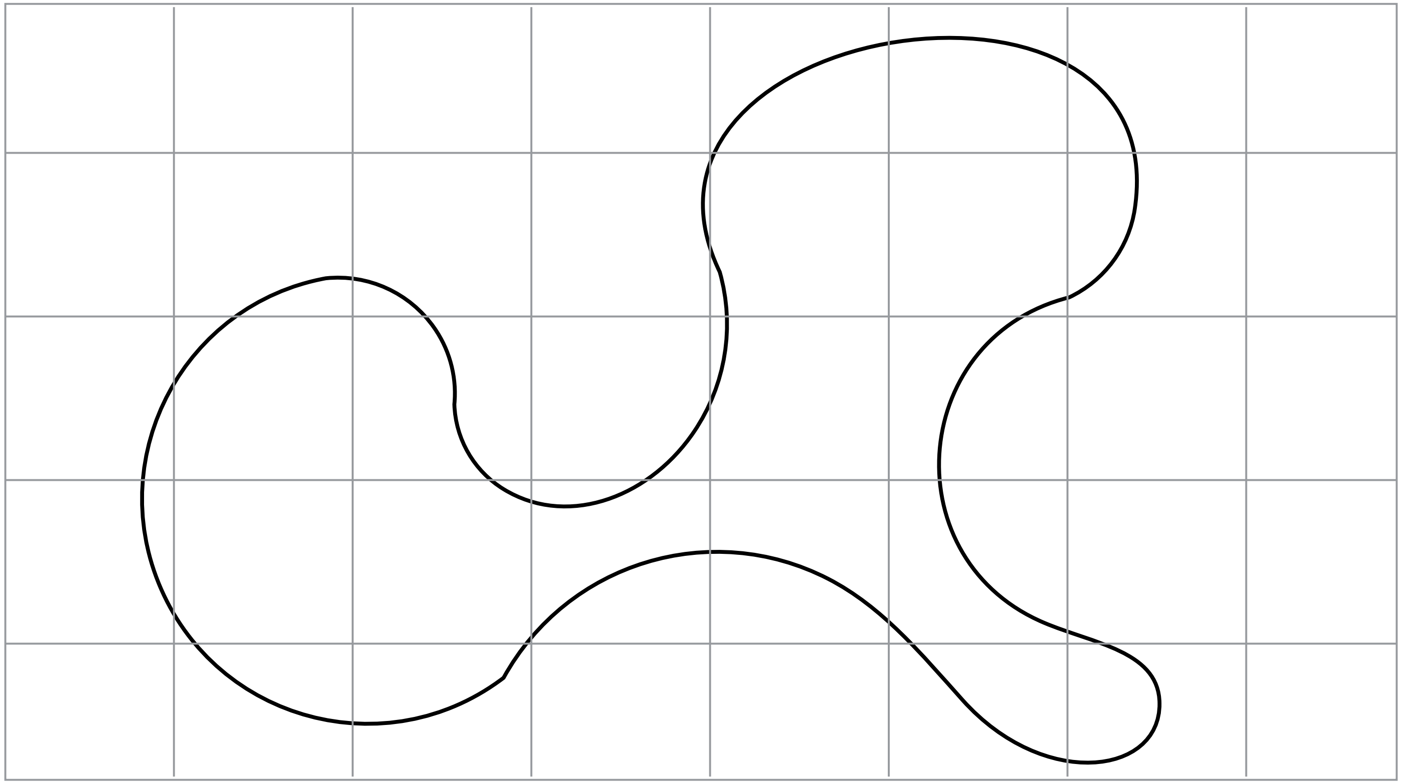
A discretização de uma curva implícita
exige a utilização de algoritmos sofisticados.

Marching Squares

Curvas e Superfícies

Curvas implícitas

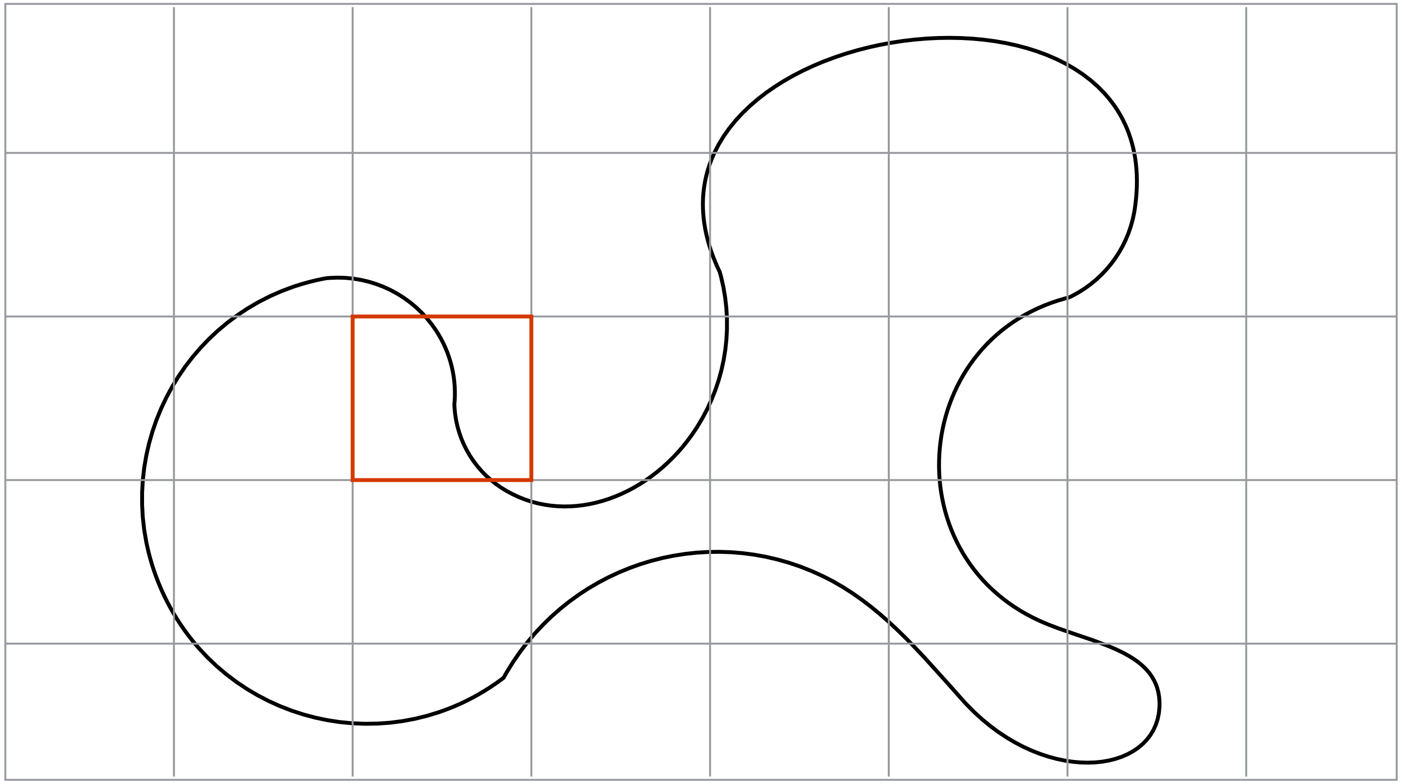
Marching squares.



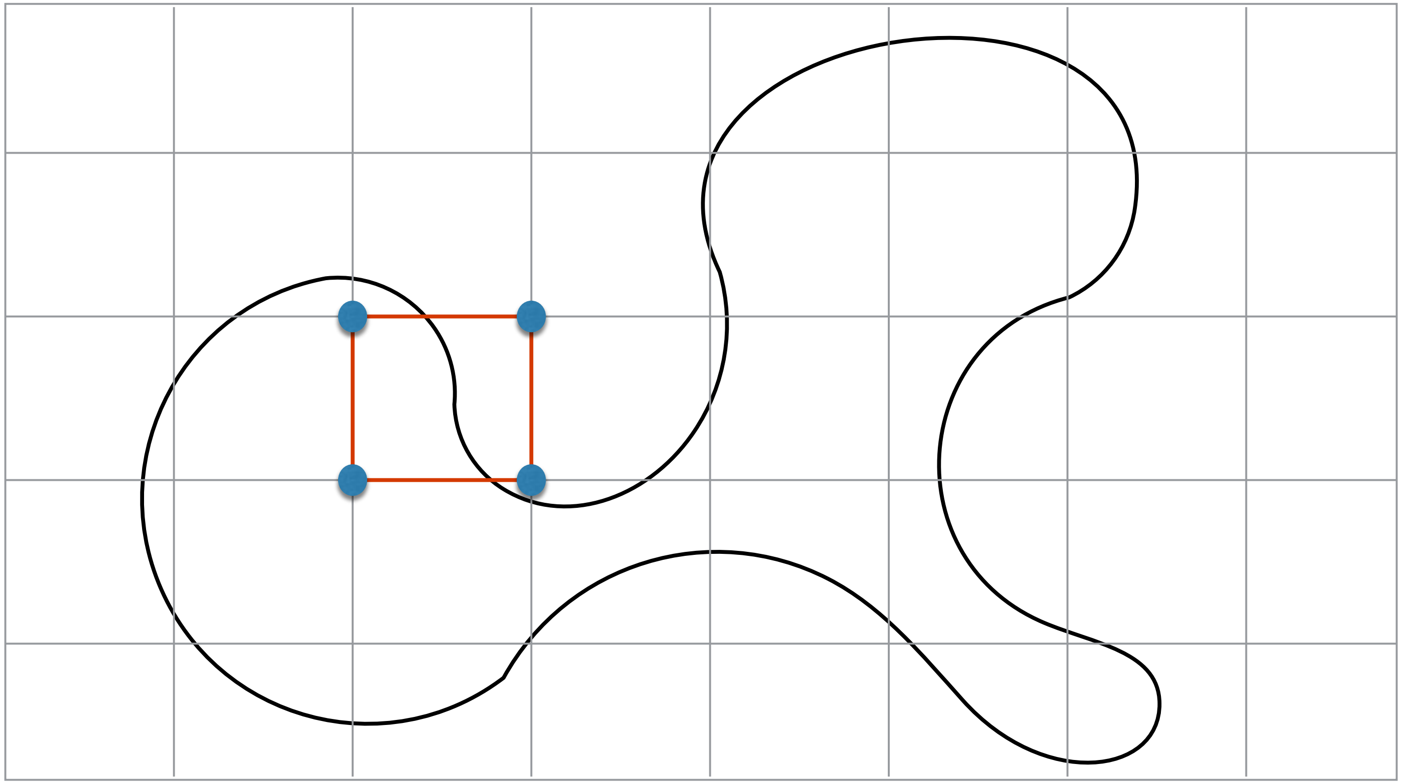
Curvas e Superfícies

Curvas implícitas

Marching squares.

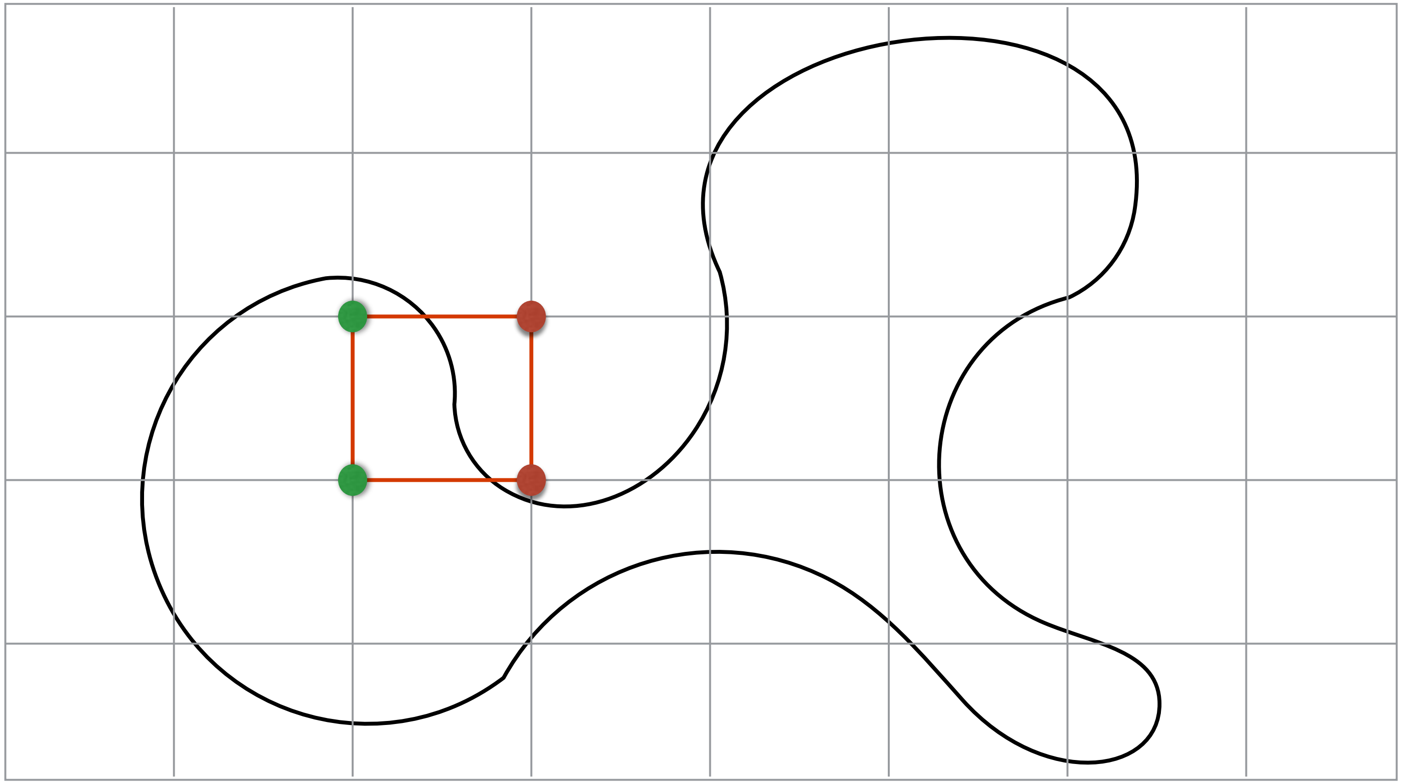


Marching squares.



Curvas e Superfícies
Curvas implícitas

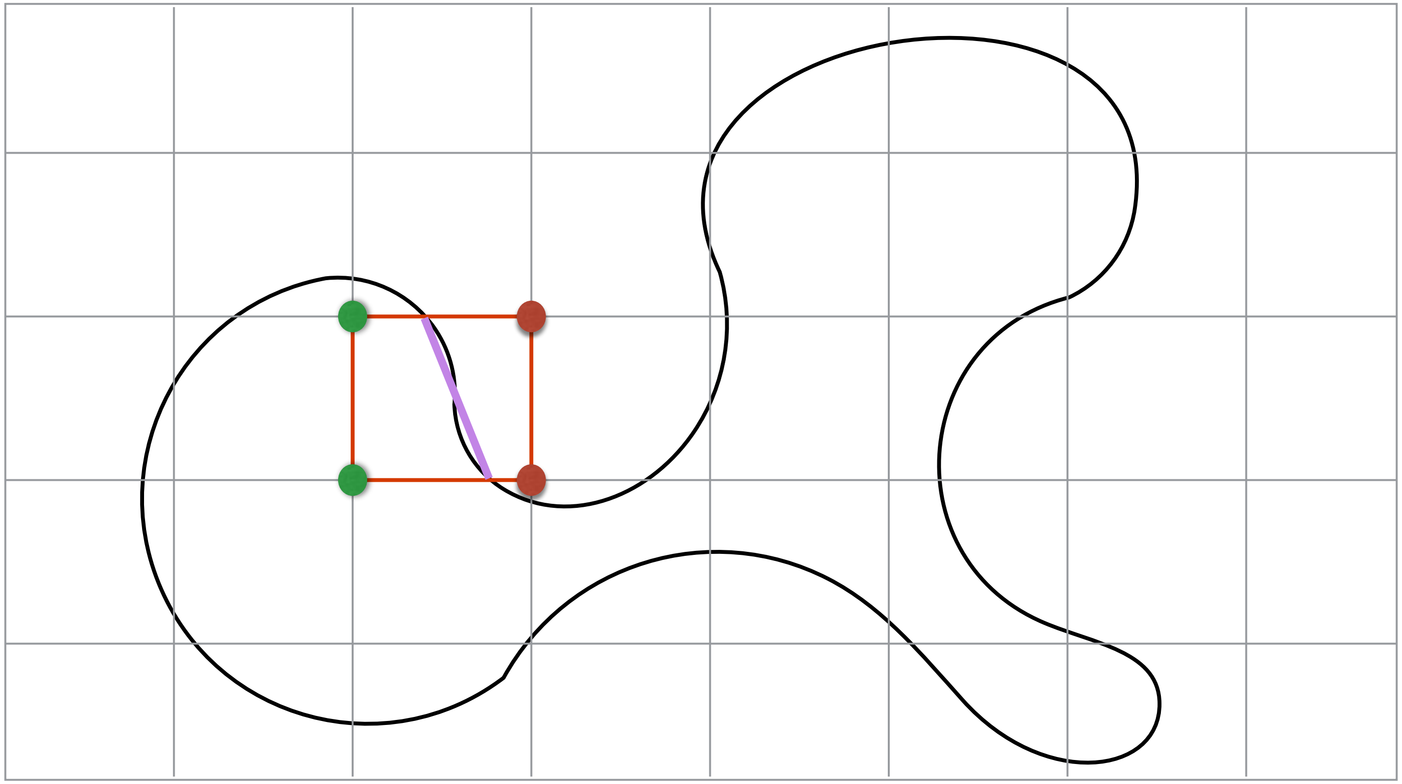
Marching squares.



Curvas e Superfícies

Curvas implícitas

Marching squares.

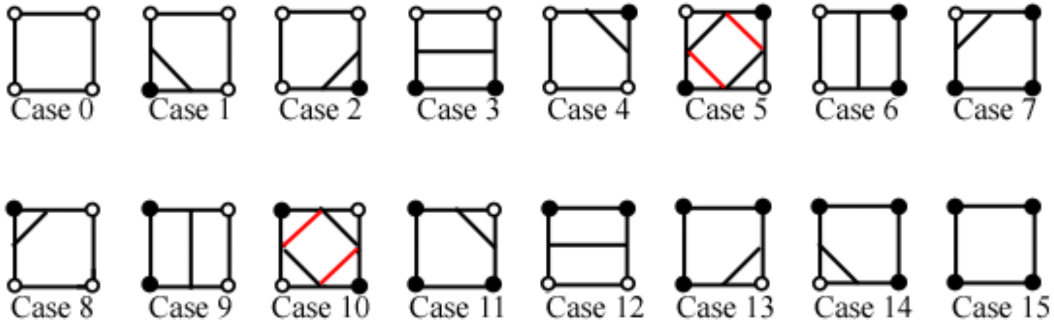


Curvas e Superfícies

Curvas implícitas

Marching squares.

Todos os casos possíveis podem ser codificados em uma lookup table.

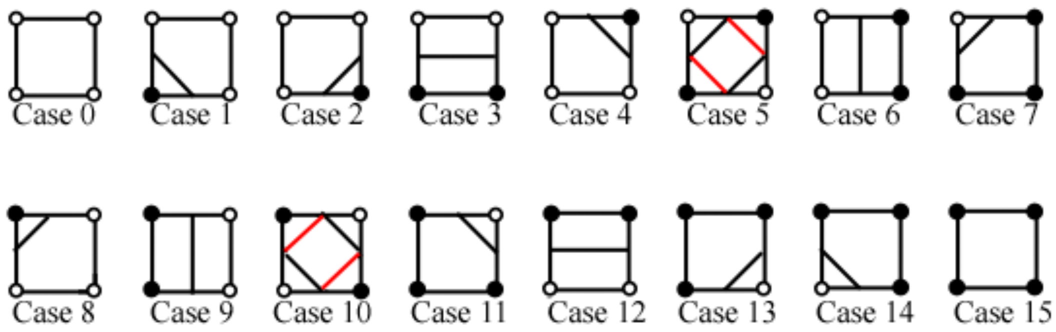


Curvas e Superfícies

Curvas implícitas

Marching squares.

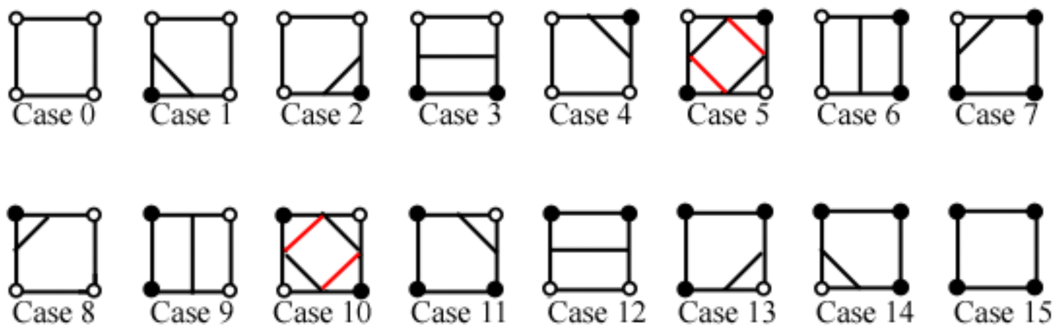
Os casos 5 e 10 são ambíguos…



Curvas e Superfícies
Curvas implícitas

Marching squares.

Os casos 5 e 10 são ambíguos…
Podem causar erros se não forem tratados!

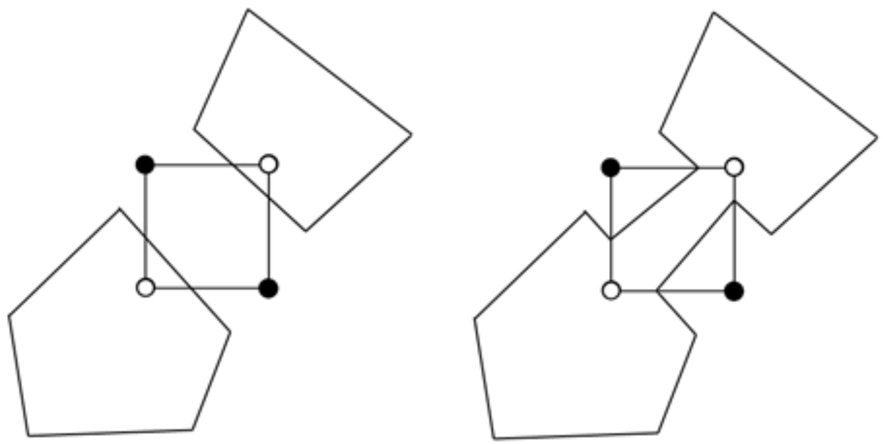


Curvas e Superfícies

Curvas implícitas

Marching squares.

Os casos 5 e 10 são ambíguos…
Podem causar erros se não forem tratados!

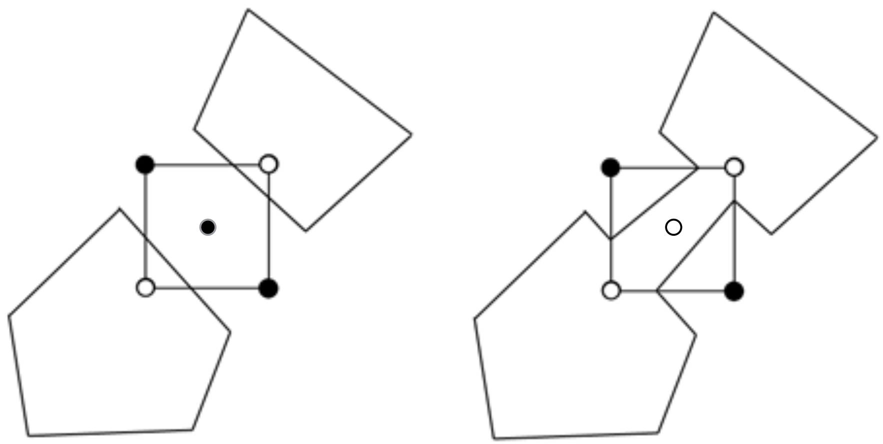


Curvas e Superfícies

Curvas implícitas

Marching squares.

Os casos 5 e 10 são ambíguos…
Podem causar erros se não forem tratados!

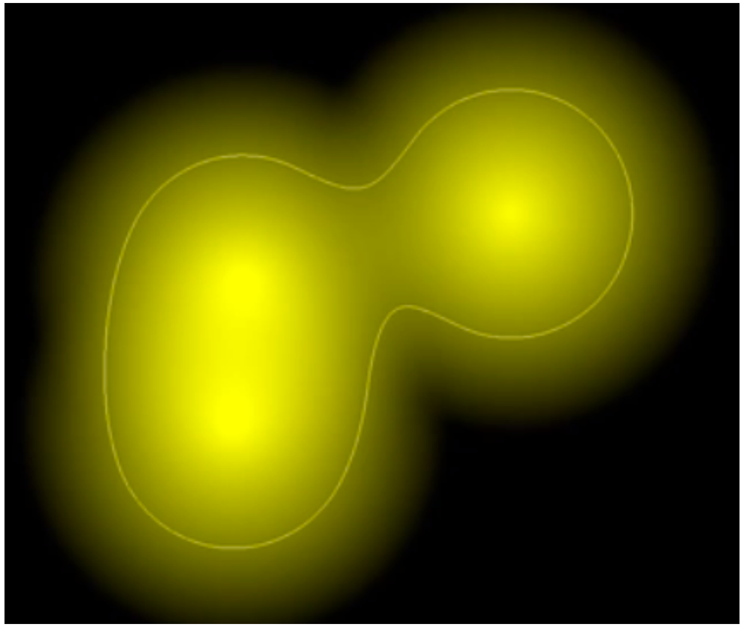


Curvas e Superfícies

Curvas implícitas

Marching squares.

Demo: https://www.youtube.com/watch?v=lr66Vl553v0



Curvas e Superfícies

Curvas implícitas

Superfícies.

As definições de superfície paramétricas e implícitas são análogas às de curvas.

Curvas e Superfícies

Curvas implícitas

Superfícies.

As definições de superfície paramétricas e implícitas são análogas às de curvas.

$$I^2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(t,u) = (x(t,u), y(t,u)z(t,u))$$

$\rightarrow$ Parametrização

Curvas e Superfícies

Curvas implícitas

Superfícies.

As definições de superfície paramétricas e implícitas são análogas às de curvas.

$$I^2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$f(t,u) = (x(t,u), y(t,u)z(t,u))$$

Parametrização

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

Implícita

$$S = \{(x,y,z) \in \Omega | f(x,y,z) = w, \text{ onde } w = cnt\}$$

Curvas e Superfícies

Curvas implícitas

Superfícies.

As questões relacionadas às vantages e desvantagens de cada representação são análogas às vistas para curvas.

Curvas e Superfícies

Curvas implícitas

Superfícies.

As questões relacionadas às vantages e desvantagens de cada representação são análogas às vistas para curvas.

Em especial,
Para visualizar uma superfície (paramétrica ou implícita) é preciso gerar um aproximação poliédrica da sua forma.

Curvas e Superfícies

Curvas implícitas

Superfícies.

As questões relacionadas às vantages e desvantagens de cada representação são análogas às vistas para curvas.

Em especial,
Para visualizar uma superfície (paramétrica ou implícita) é preciso gerar um aproximação poliédrica da sua forma.

A descrição poliédrica de uma superfície é baseada no conceito de triangulação, que veremos na próxima aula.

Computação Gráfica

TCC-00291

Assunto: Curvas e Superfícies

Instituto de
computação