# Computação Gráfica

TCC-00291

Assunto: Transformações Geométricas

Instituto de Computação

# Transformações

## Introdução

Em aplicações gráficas precisamos mover e deformar os objetos que compõem a cena.

# Transformações

## Introdução

Em aplicações gráficas precisamos mover e deformar os objetos que compõem a cena.

# Transformações

## Introdução

Tais operações são descritas matematicamente através de transformações geométricas.

# Transformações

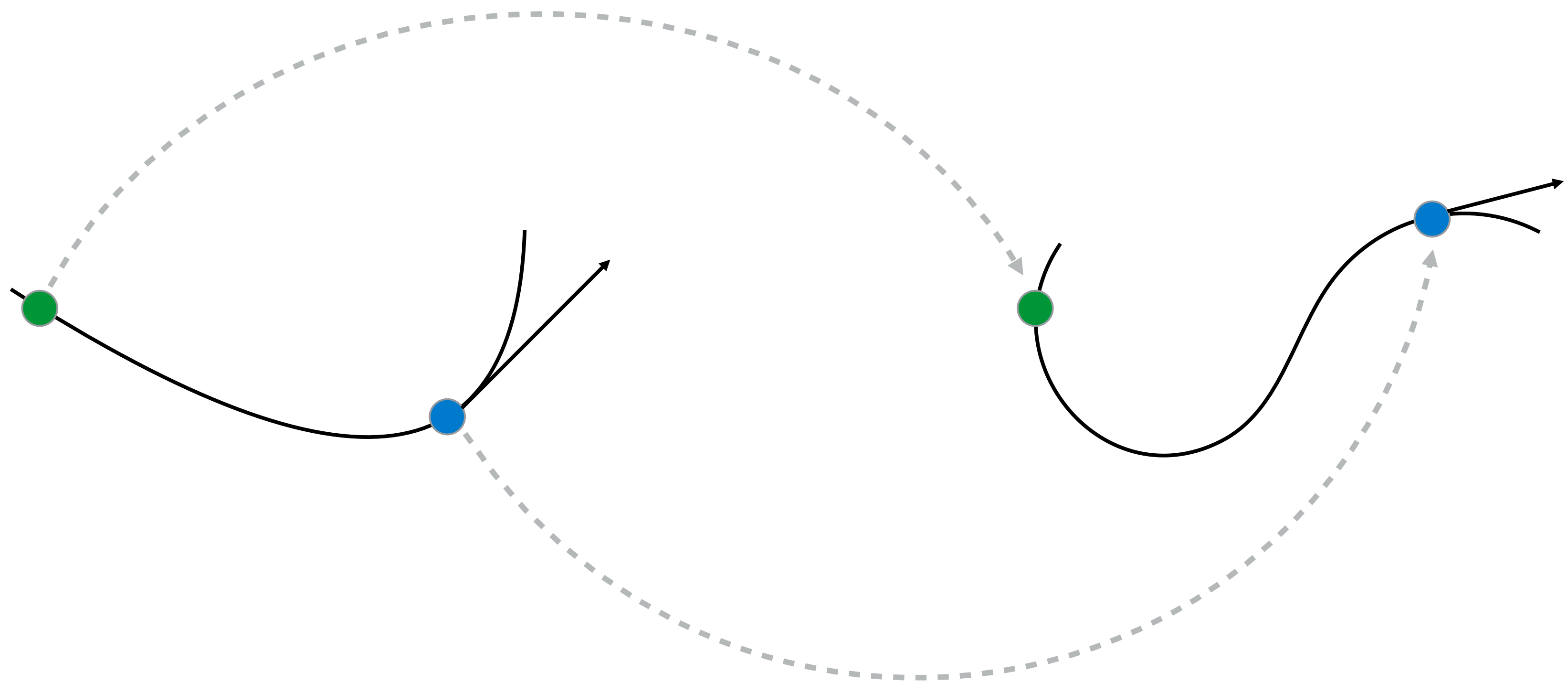
## Definição

Uma transformação é uma função que mapeia um ponto em outro ponto do espaço.

# Transformações

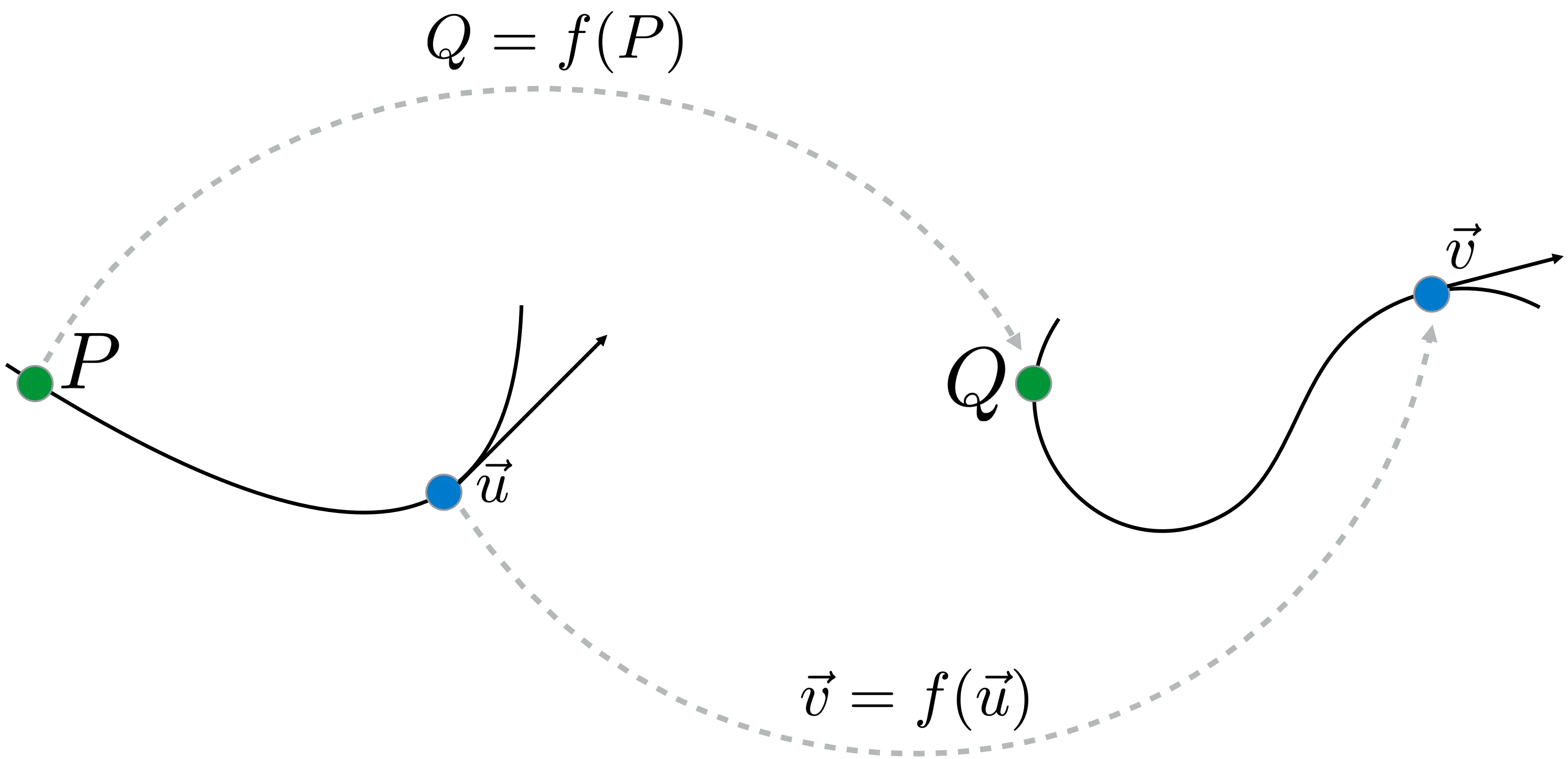
## Definição

Uma transformação é uma função que mapeia um ponto em outro ponto do espaço.



# Transformações
## Definição

Uma transformação é uma função que mapeia um ponto em outro ponto do espaço.



# Transformações

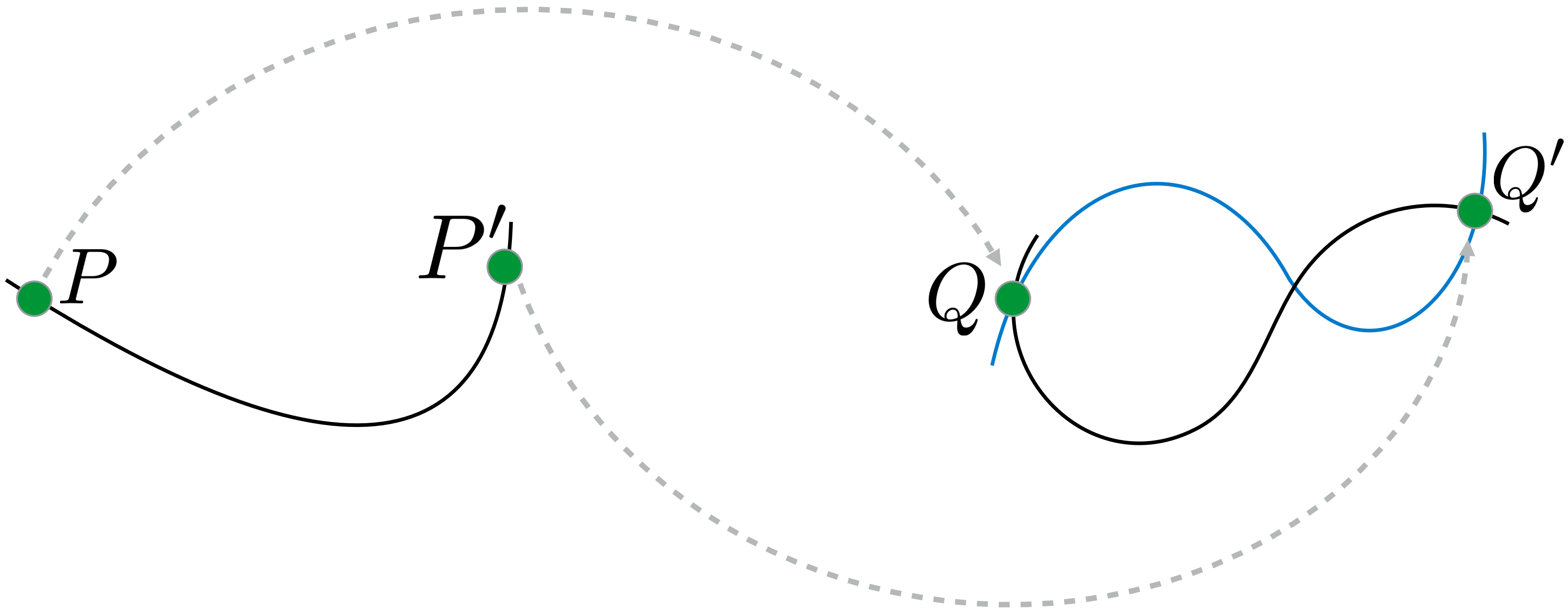
## Definição

Esta definição é muito geral…

# Transformações

## Definição

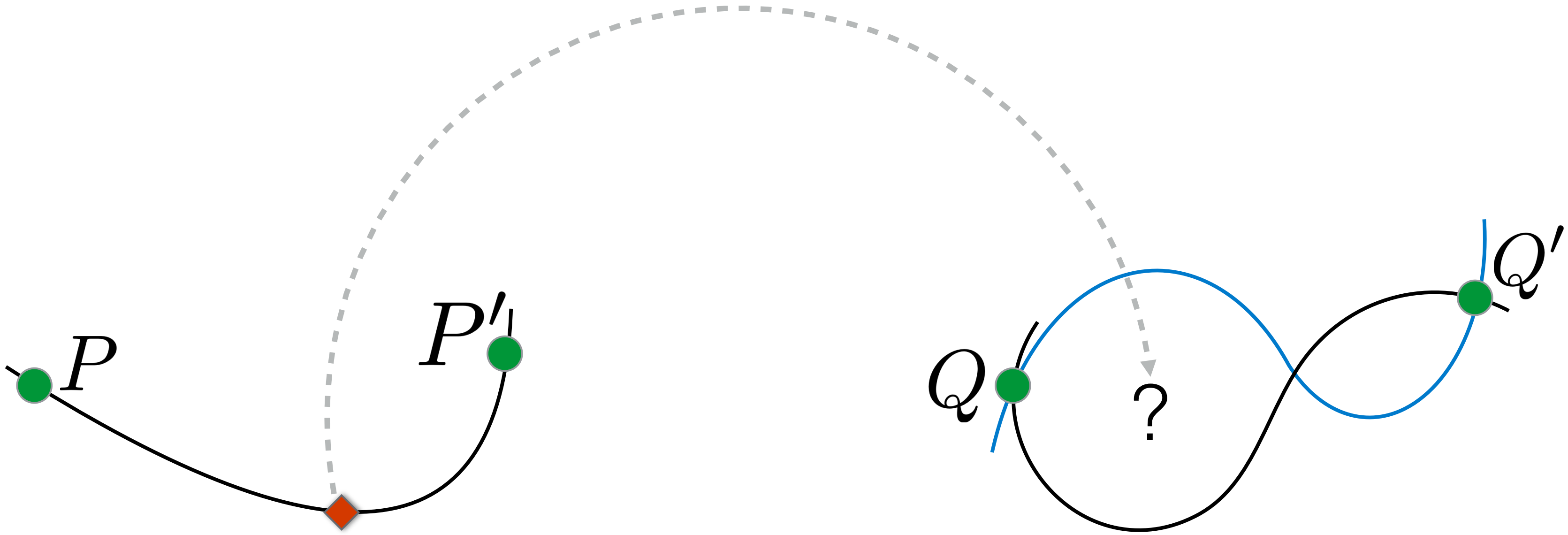
Esta definição é muito geral…



# Transformações

## Definição

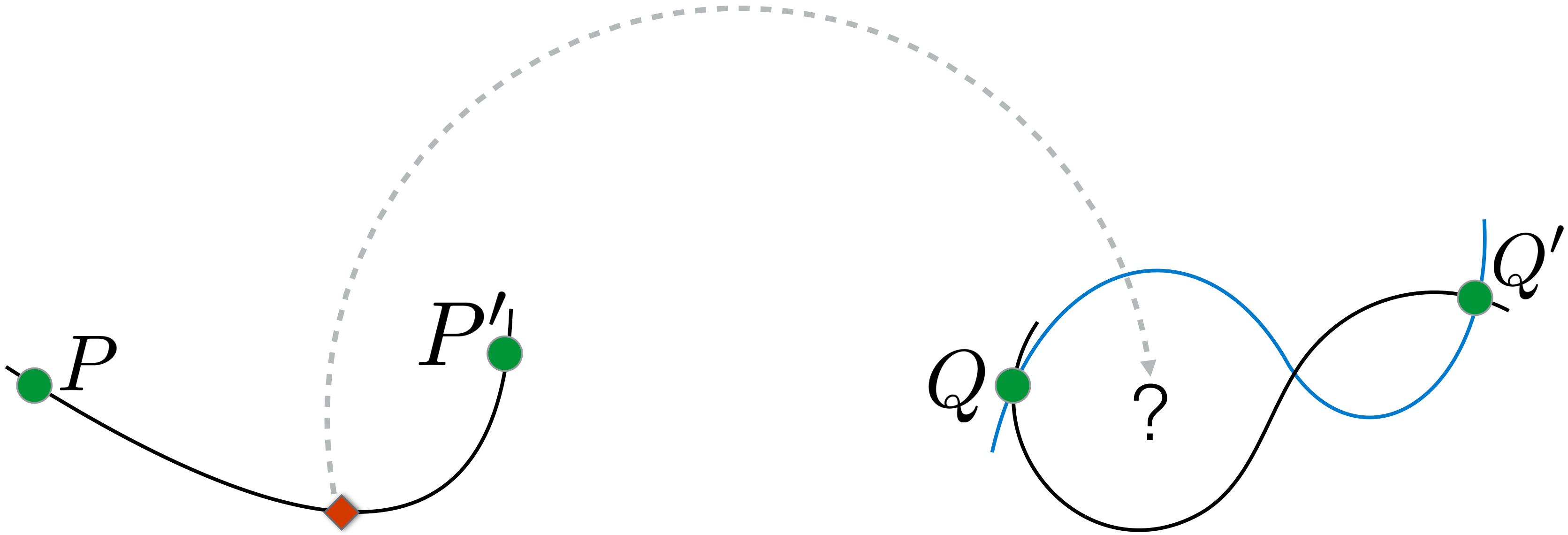
Esta definição é muito geral…



# Transformações

## Definição

Precisamos restringir os tipos de transformações que usaremos



# Transformações

## Linearidade

Uma transformação é linear se:

$$f(\alpha P + \beta Q) = \alpha f(P) + \beta f(Q)$$

# Transformações

## Linearidade

Uma transformação é linear se:

$$f(\alpha P + \beta Q) = \alpha f(P) + \beta f(Q)$$

Vantagem

se conhecemos a transformação de um conjunto de pontos, conhecemos também a transformação de qualquer combinação linear destes pontos!

# Transformações

## Representação

Podemos escrever uma transformação linear usando matrizes…

$$\vec{v} = C\vec{u}$$

# Transformações

## Representação

Podemos escrever uma transformação linear usando matrizes…

$$\vec{v} = C\vec{u}$$

Em aplicações gráficas, representamos vetores e posições utilizando coordenadas homogêneas.

# Transformações

## Representação

Podemos escrever uma transformação linear usando matrizes…

$$\vec{v} = C\vec{u}$$

Em aplicações gráficas, representamos vetores e posições utilizando coordenadas homogêneas.

Neste sistema de coordenadas: $\vec{u} = [u_1 \; u_2 \; u_3 \; 0]$

# Transformações

## Representação

Podemos escrever uma transformação linear usando matrizes...

$$\vec{v} = C\vec{u}$$

Em aplicações gráficas, representamos vetores e posições utilizando coordenadas homogêneas.

Neste sistema de coordenadas: $p = [p_1 \; p_2 \; p_3 \; 1]$

# Transformações

## Representação

Podemos escrever uma transformação linear usando matrizes...

$$\vec{v} = C\vec{u}$$

Por fim:

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Transformações

## Translação, escala e rotação

A matriz de transformação tem 12 graus de liberdade.

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Transformações

## Translação, escala e rotação

A matriz de transformação tem 12 graus de liberdade.

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

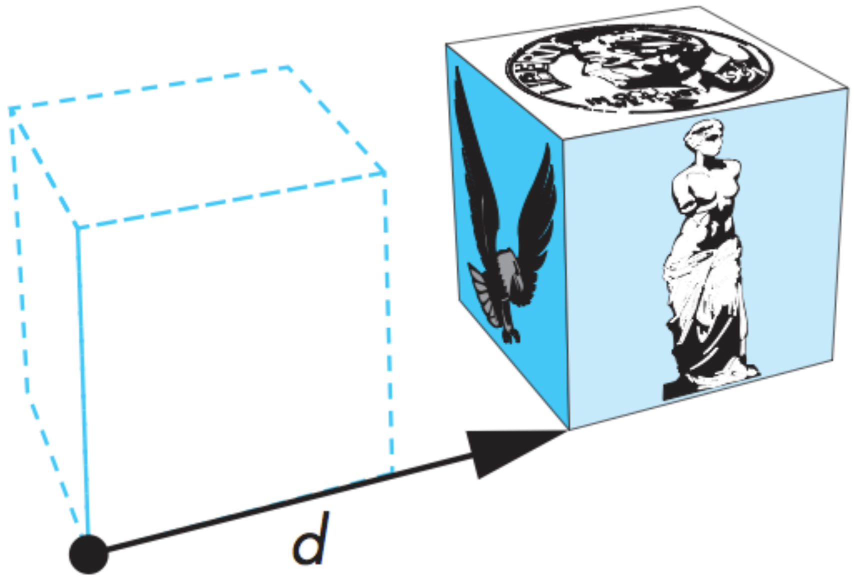
Escolhendo adequadamente os valores dos graus de liberdade podemos construir matrizes que representam translações, escalas, rotações, entre outros.

# Transformações

## Translação, escala e rotação

Translação

Operação que desloca pontos com distância e direção fixas.

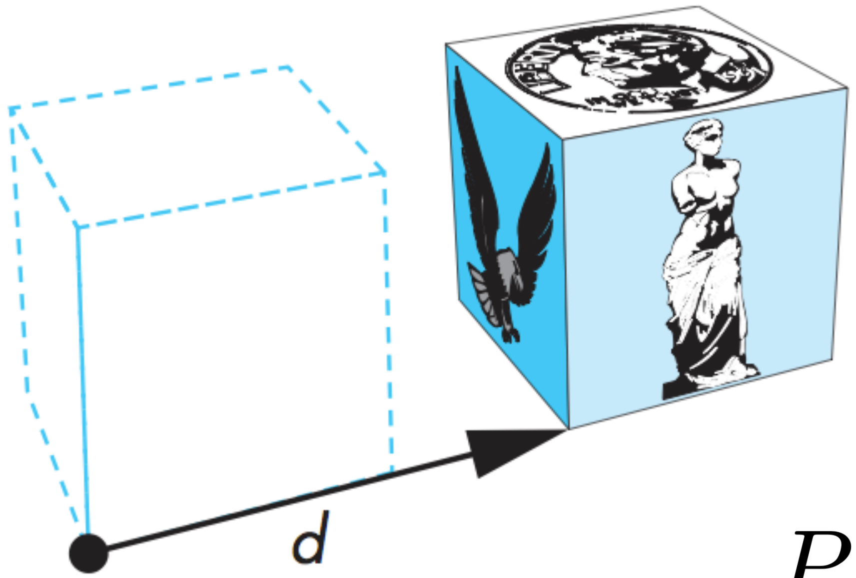


# Transformações

## Translação, escala e rotação

Translação

Operação que desloca pontos com distância e direção fixas.



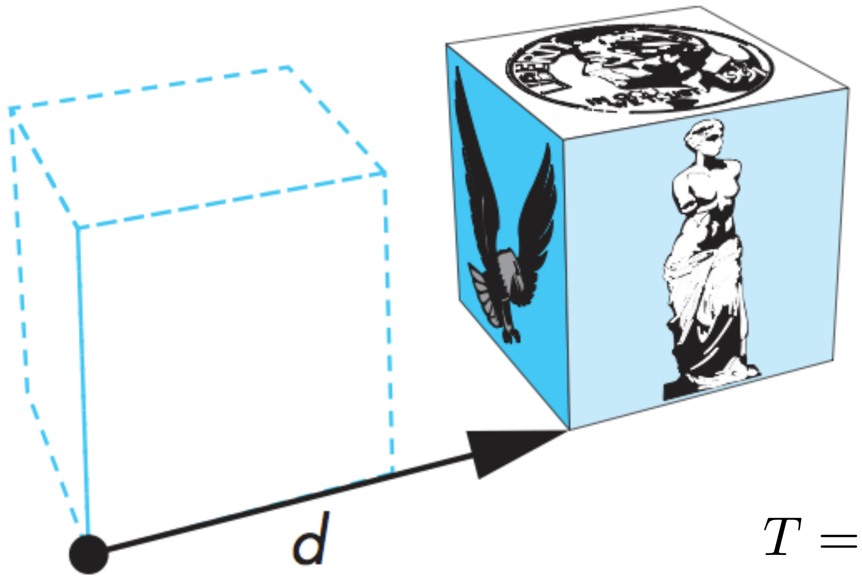

$$P' = P + d$$

# Transformações

## Translação, escala e rotação

### Translação

Operação que desloca pontos com distância e direção fixas.



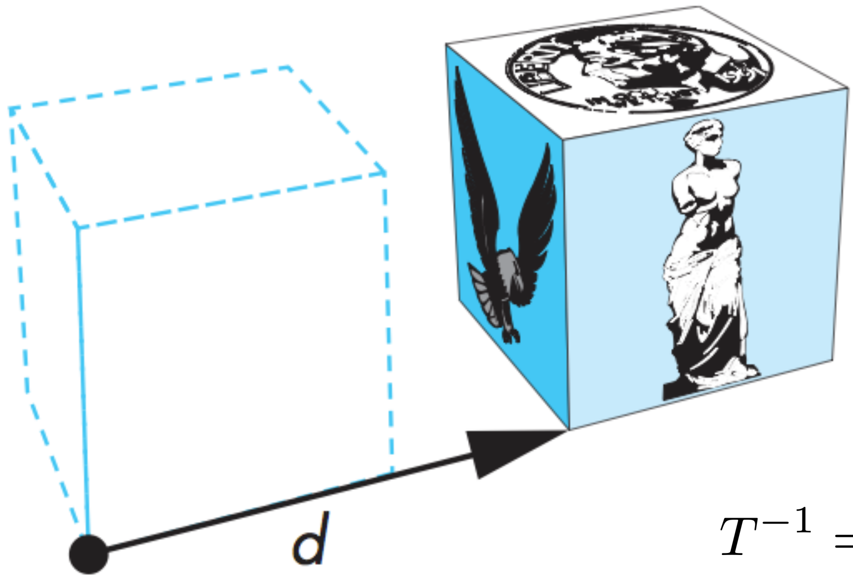

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha_{14} \\ 0 & 1 & 0 & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & 1 & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Transformações

## Translação, escala e rotação

### Translação

Operação que desloca pontos com distância e direção fixas.

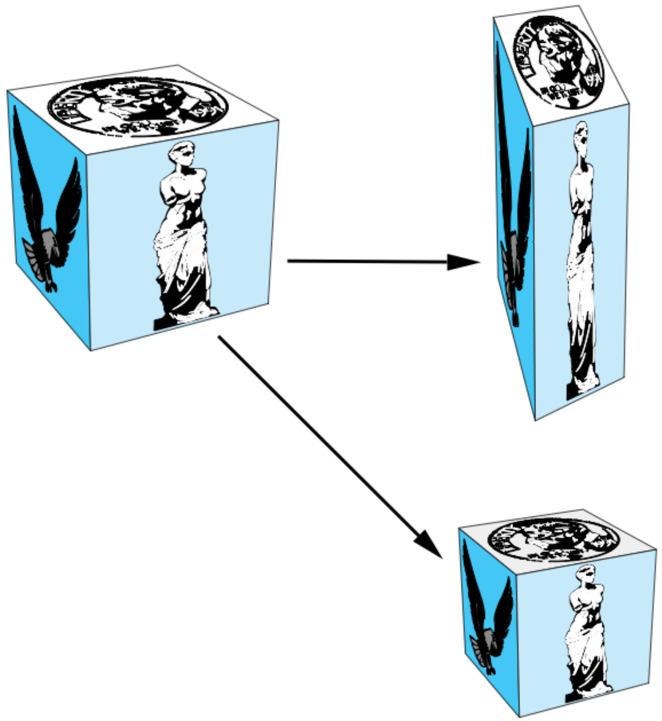



$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\alpha_{14} \\ 0 & 1 & 0 & -\alpha_{24} \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Transformações
## Translação, escala e rotação

### Escala

Operação que desloca os pontos do objeto, alterando seu tamanho.
Pode deformar o objeto.

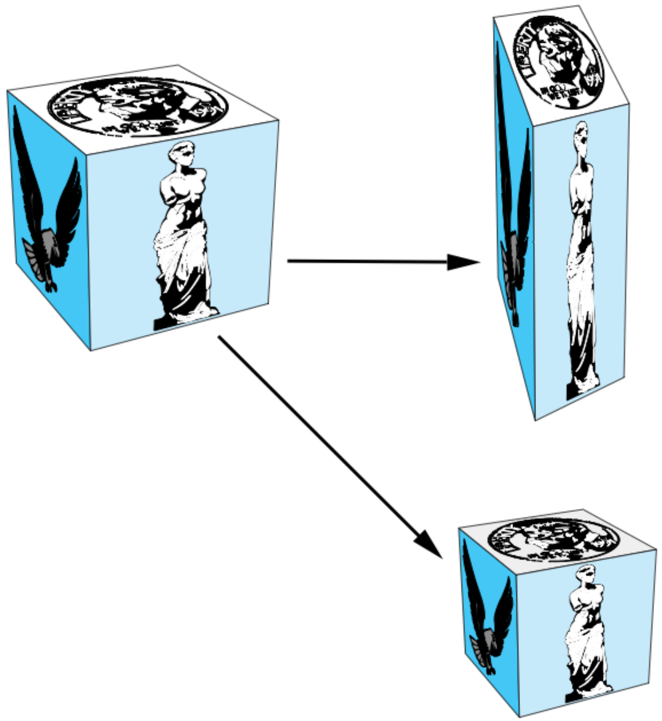


# Transformações

## Translação, escala e rotação

### Escala

Operação que desloca os pontos do objeto, alterando seu tamanho.
Pode deformar o objeto.



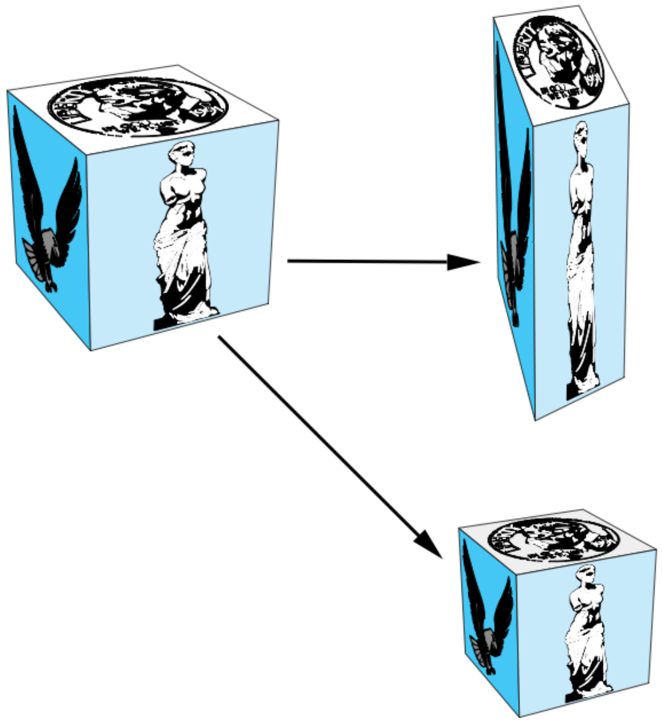
$$p_i' = \alpha_{ii} p_i$$

# Transformações

## Translação, escala e rotação

### Escala

Operação que desloca os pontos do objeto, alterando seu tamanho.
Pode deformar o objeto.



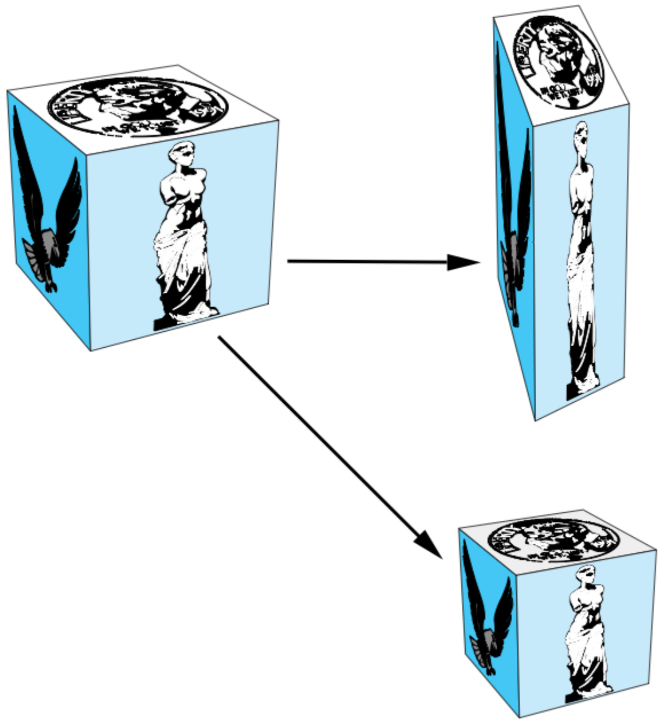
$$S = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Transformações

## Translação, escala e rotação

### Escala

Operação que desloca os pontos do objeto, alterando seu tamanho.
Pode deformar o objeto.

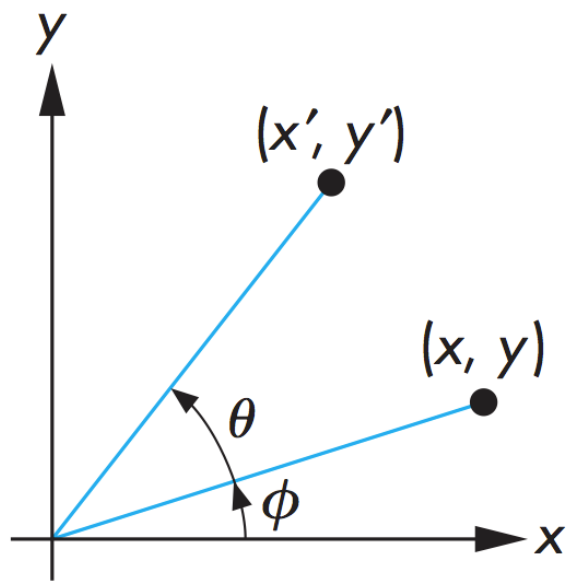


$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha_{22}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha_{33}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Transformações
## Translação, escala e rotação

### Rotação

Operação que desloca os pontos do objeto ao redor de um eixo.
Estudaremos rotações em torno dos eixos cartesianos.



# Transformações

## Translação, escala e rotação

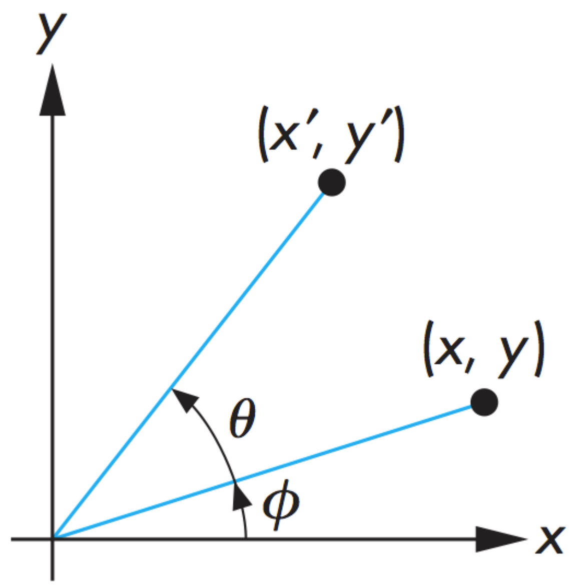
### Rotação

Operação que desloca os pontos do objeto ao redor de um eixo.
Rotação em torno do eixo z.

$$x = \rho \cos(\phi)$$

$$y = \rho \sin(\phi)$$

$$z = z$$



# Transformações

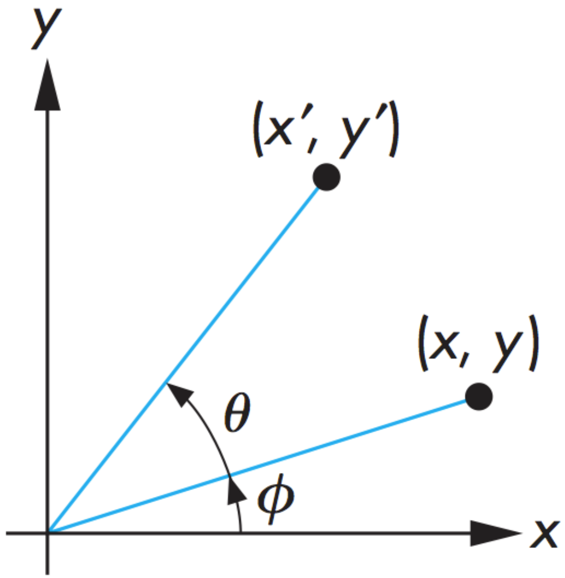
## Translação, escala e rotação

### Rotação

Operação que desloca os pontos do objeto ao redor de um eixo.
Rotação em torno do eixo z.

$$x = \rho\cos(\phi)$$
$$y = \rho\sin(\phi)$$
$$z = z$$

$$x' = \rho\cos(\theta + \phi)$$
$$y' = \rho\sin(\theta + \phi)$$
$$z' = z$$



# Transformações
## Translação, escala e rotação

### Rotação

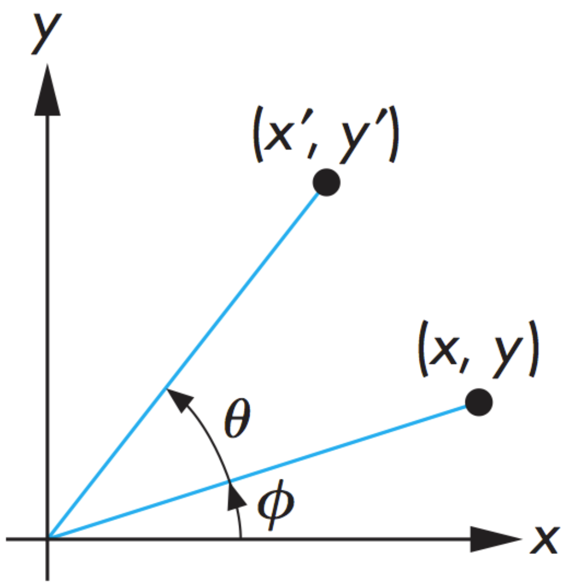
Operação que desloca os pontos do objeto ao redor de um eixo.
Rotação em torno do eixo z.

$$x' = \rho \cos(\theta + \phi)$$
$$y' = \rho \sin(\theta + \phi)$$
$$z' = z$$

Reescrevendo:

$$x' = \rho \cos \phi \cos \theta - \rho \sin \phi \sin \theta = x \cos \theta - y \sin \theta,$$

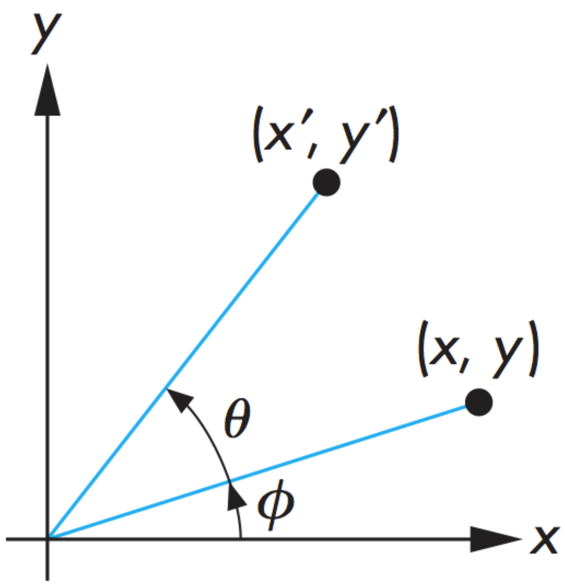
$$y' = \rho \cos \phi \sin \theta + \rho \sin \phi \cos \theta = x \sin \theta + y \cos \theta.$$



## Rotação

Operação que desloca os pontos do objeto ao redor de um eixo.
Rotação em torno do eixo z.

$$\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



# Transformações

## Translação, escala e rotação

### Rotação

Operação que desloca os pontos do objeto ao redor de um eixo.
Rotação em torno do eixo x.

$$\mathbf{R}_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Transformações

## Translação, escala e rotação

### Rotação

Operação que desloca os pontos do objeto ao redor de um eixo.
Rotação em torno do eixo y.

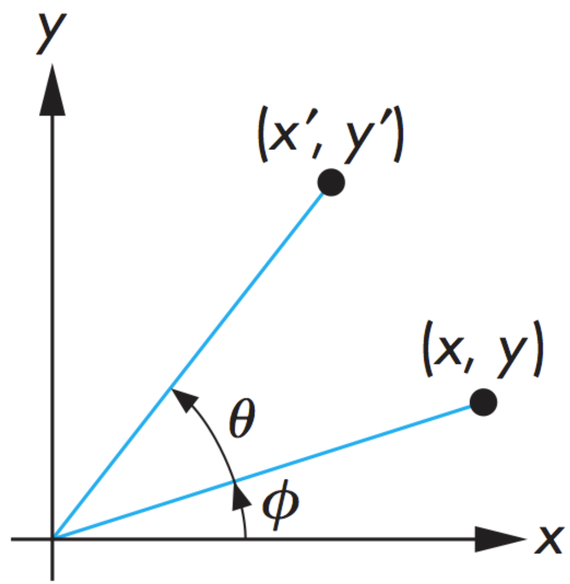
$$\mathbf{R}_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Transformações
## Translação, escala e rotação

### Rotação

Operação que desloca os pontos do objeto ao redor de um eixo.
Operações inversas.

$$\mathbf{R}_*^{-1}(\theta) = \mathbf{R}_*(-\theta)$$



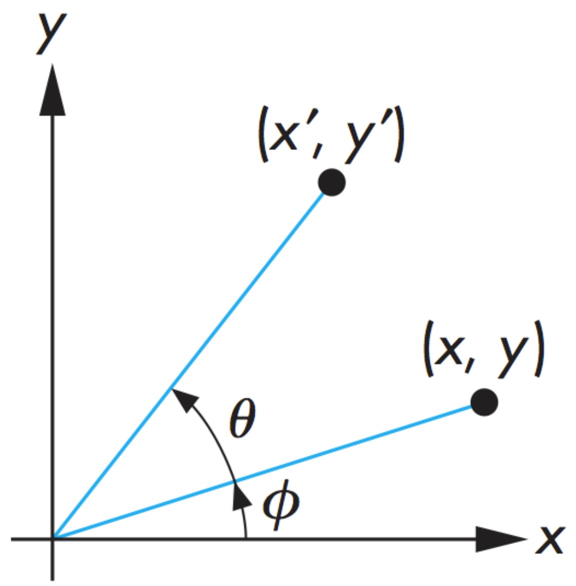
# Transformações

## Translação, escala e rotação

### Rotação

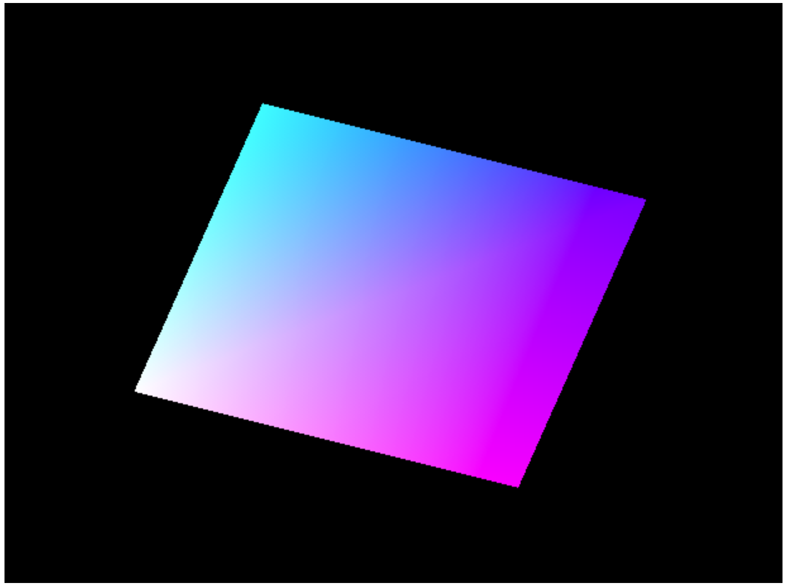
Operação que desloca os pontos do objeto ao redor de um eixo.
Operações inversas.

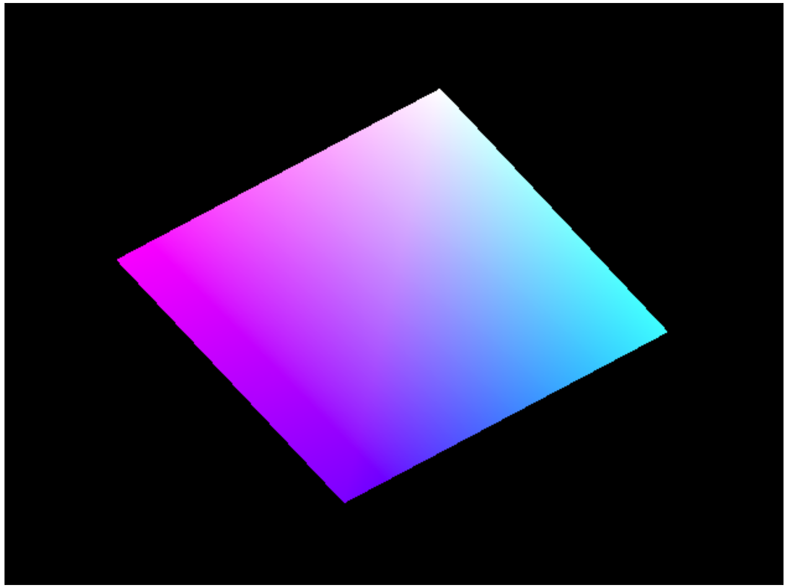
$$\mathbf{R}_*^{-1}(\theta) = \mathbf{R}_*^T(\theta)$$



# Transformações

## Exemplo





Código: rotação em torno da origem.

# Transformações

## Concatenação

Transformações podem ser concatenadas.

# Transformações

## Concatenação

Transformações podem ser concatenadas.

Matematicamente, concatenamos transformações através de

produtos de matrizes.

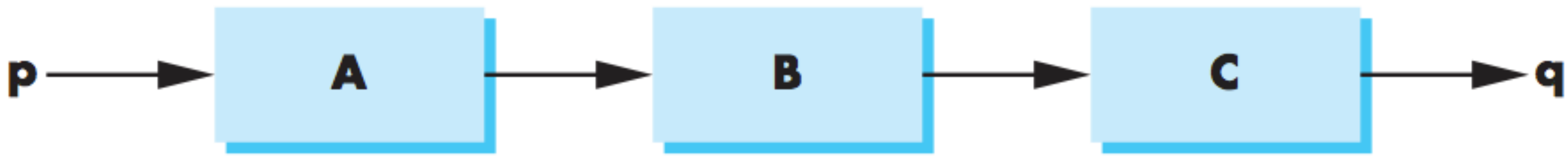
# Transformações

## Concatenação

Transformações podem ser concatenadas.

Matematicamente, concatenamos transformações através de

produtos de matrizes.



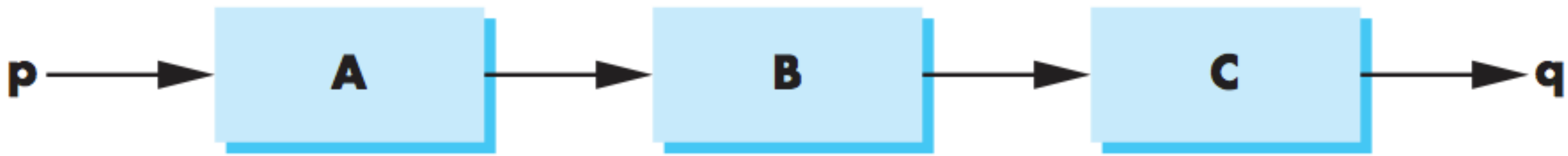

Ordem de aplicação das operações

# Transformações

## Concatenação

Transformações podem ser concatenadas.

Matematicamente, concatenamos transformações através de produtos d



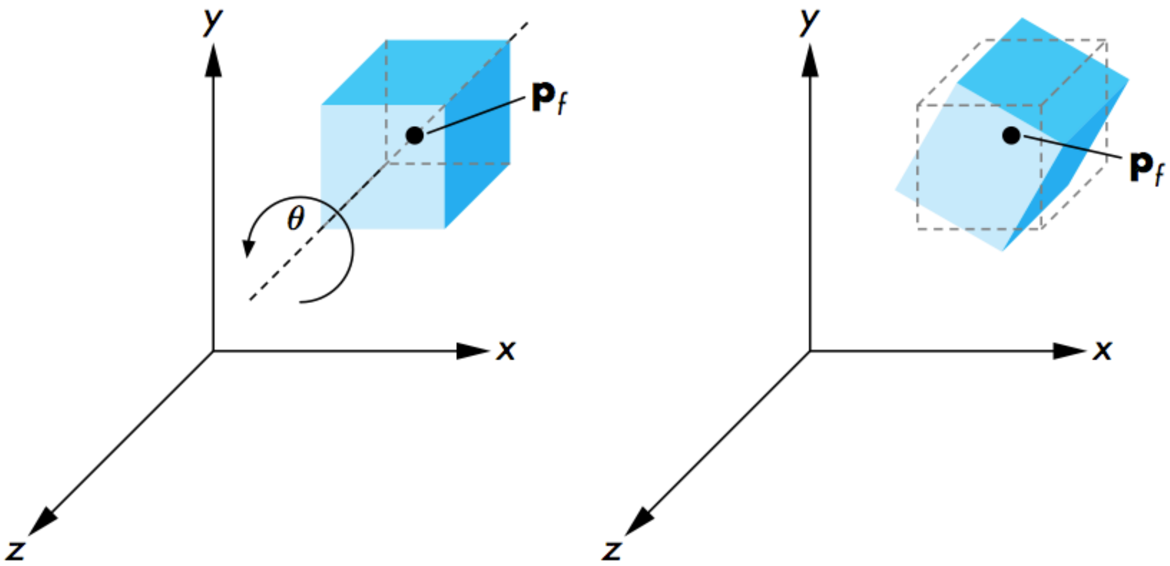

Cuidado! Matematicamente…

$$\mathbf{q} = \mathbf{CBAp}$$

# Transformações

## Concatenação

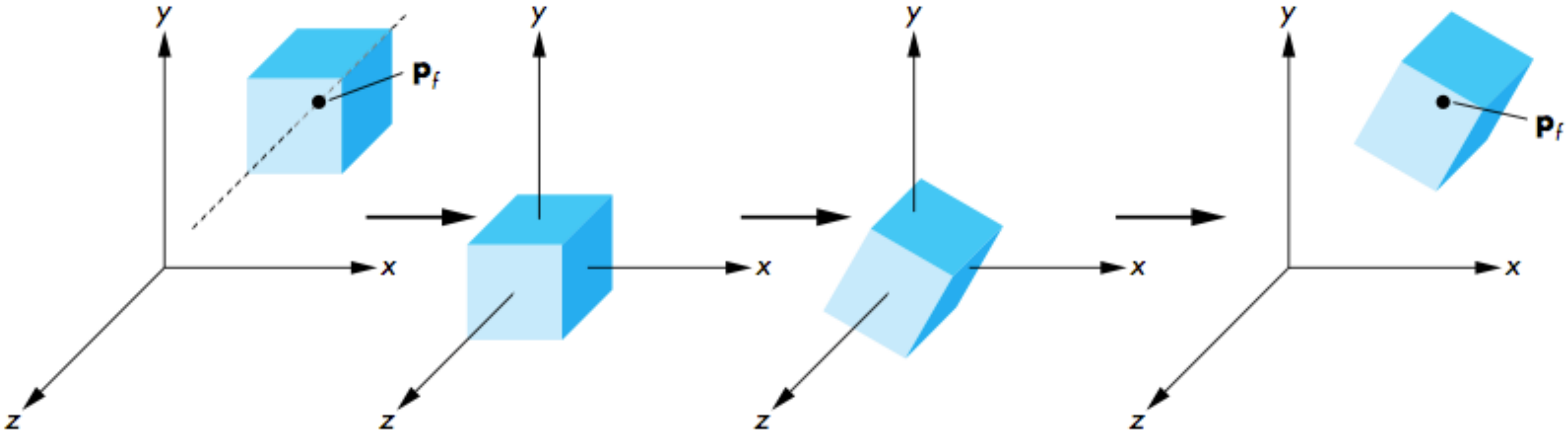
A ordem das transformações é importante!




Como rodar um objeto fora da origem?

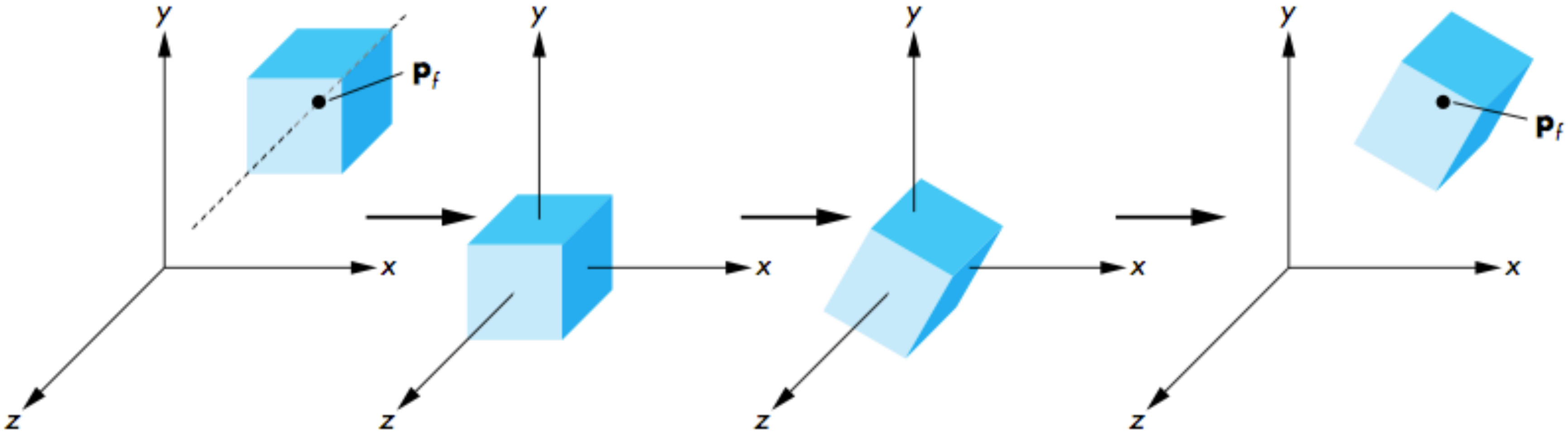
# Transformações

## Concatenação



# Transformações

## Concatenação

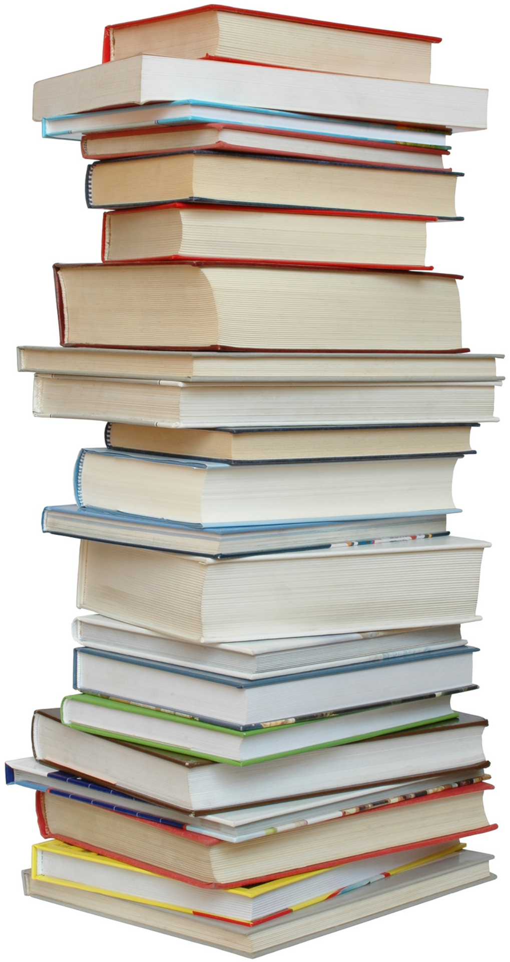



$$\mathbf{M} = \mathbf{T}(\mathbf{p}_f)\mathbf{R}_z(\theta)\mathbf{T}(-\mathbf{p}_f)$$

# Transformações

## Pilha de matrizes

Para manipular corretamente as transformações, podemos imaginar que as matrizes de transformação formam uma pilha.

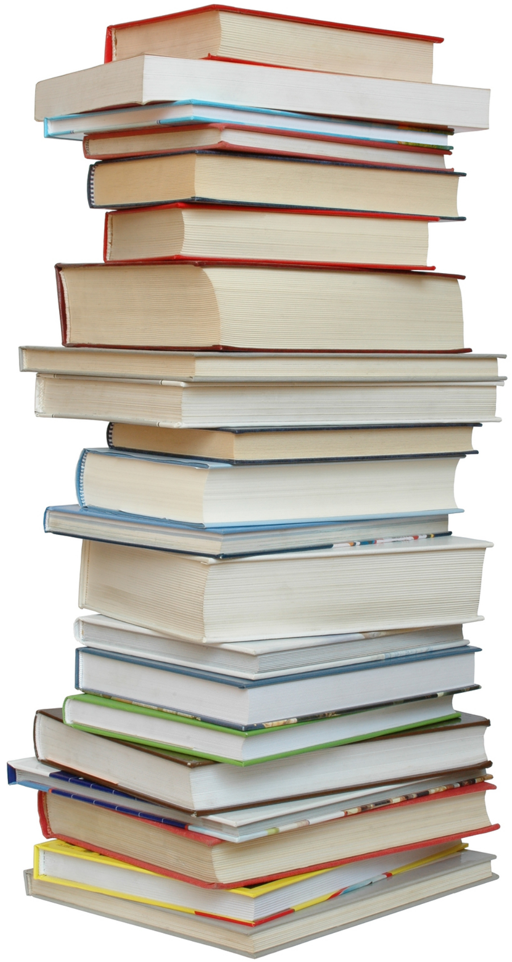


# Transformações

## Pilha de matrizes

Para manipular corretamente as transformações, podemos imaginar que as matrizes de transformação formam uma pilha.

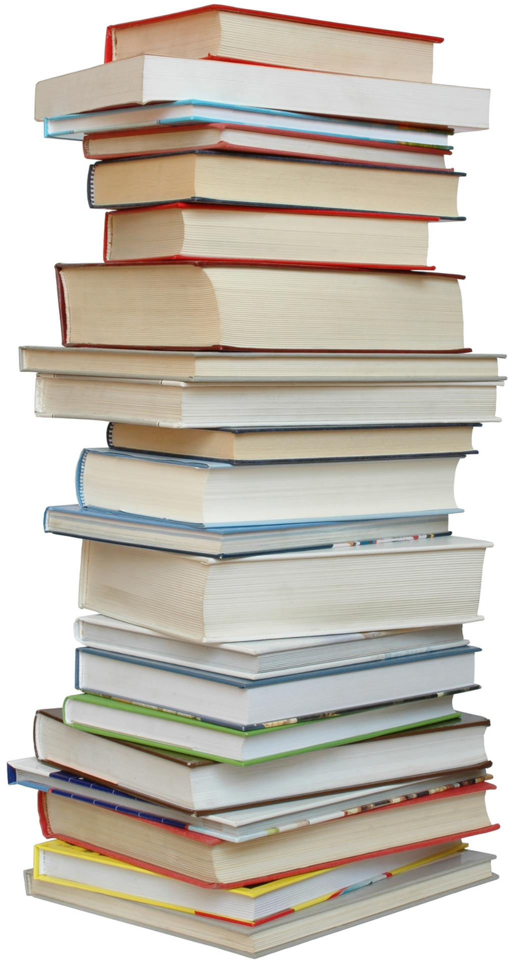
Na prática, o OpenGL trabalha com o conceito de Matriz Corrente.



# Transformações

## Pilha de matrizes

Para manipular corretamente as transformações, podemos imaginar que as matrizes de transformação formam uma pilha.



Na prática, o OpenGL trabalha com o conceito de Matriz Corrente.

Manipulamos a matriz corrente através das operações de carregamento, pós e pré multiplicação.

# Computação Gráfica

TCC-00291

Assunto: Transformações Geométricas

Instituto de Computação