Geometria Computacional 2014.1

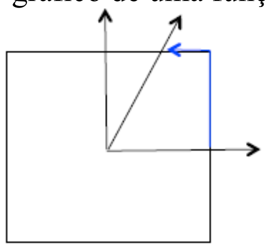
Prof. Anselmo Montenegro

Lista de Exercícios 1

Primitivas Geométricas, Polígonos e Noções de Análise de Complexidade, Problemas Fundamentais

Exercícios de Primitivas Geométricas

1) Mostre que e possível definir o pseudo–ângulo trocando o círculo unitário por uma curva contínua, que seja o gráfico de uma função em coordenadas polares.



2) Mostre que o pseudo-ângulo definido no exercício anterior pode ser calculado usando *3* comparações, uma soma e uma subdivisão.

3) Defina *anguloorientado*(x,y) com base na operação *pseudoangulo*(x,y).

4) Escreva um algoritmo *entre*($\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}$), que dados os vetores $\boldsymbol{a},\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w} \in \mathrm{R}^2$, retorne ERRO se $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ são colineares, SIM se w está no ângulo convexo entre $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ e NÃO, caso contrário.

5) Mostre que o volume de um tetraedro $p_1p_2p_3p_4$ do espaço tridimensional é dado por $V = \frac{1}{6}(op_1 \times op_2 + op_2 \times op_3 + op_3 \times op_4 + op_4 \times op_1)$ onde o é um ponto arbitrário do espaço.

Exercícios de Polígonos

1) Seja P um polígono determinado por um conjunto $S = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ de pontos distintos no plano. Implemente uma algoritmo *convex*(S) que retorna SIM se o polígono é convexo e NÃO se é côncavo.

2) Com base no *Teorema 3.2* (sobre a existência de triangulação), implemente um algoritmo para triangulação de polígonos no plano.

3) Prove o *Corolário 3.1* (Triângulo Orelha) usando indução.

4) Implemente um algoritmo de triangulação baseada em corte de orelhas (*ear clipping*).

5) Apresente um polígono que admita somente uma triangulação.

Exercícios de Análise de Complexidade

1) Mostre que $n^2 + 1000n = O(n^2)$, encontrando explicitamente N e c como na definição. Mostre que podemos tomar c = 2 e N = 1000, c = 101 e N = 10, c = 1001 e N = 1.

2) Mostre que:

a) g é O(f) se e somente f é Ω(g).

b) g é Θ(f) se e somente f é Θ(g).

c) g é Θ(f) se e somente se existem $N \in \mathbf{N}$ e $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$ tal que $c_1 f(n) \leq g(n) \leq c_2 f(n)$ para todo $n \geq N$.

3) Considere um algoritmo que ordena um conjunto de números reais $C=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ por força bruta que gere todas as permutações da forma $x_{\pi(0)}$, $x_{\pi(1)},...,$ $x_{\pi(n)}$ e que para qual delas satisfaz $x_{\pi(0)} \leq x_{\pi(1)} \leq ... \leq x_{\pi(n)}$. Mostre que tal algoritmo é O(n.n!).

4) Demonstre o teorema da redução.

5) Se A resolve P, então $T_A = \Omega(T_P)$. Baseado nessa afirmação, é verdade que $T_P = O(T_A)$? Por quê?

Exercícios sobre Problemas Fundamentais

1) Escreva um algoritmo baseado em coordenadas baricêntricas para localizar um ponto em relação a um triângulo.

2) Escreva um algoritmo que determina se dois triângulos no plano são disjuntos.

3) Descreva um algoritmo *closestPair*(*S*), baseado no paradigma dividir para conquistar, que tem como entrada um conjunto de pontos no plano $S=\{p_1,p_2,...,p_n\}$ e retorna o par de pontos mais próximo. Analise a complexidade do algoritmo criado.

4) Usando o esquema de varredura do plano, desenvolva um algoritmo para triangulação baseado em uma abordagem incremental.

5) Compare a qualidade das três triangulações implementadas usando as métricas de avaliação de malhas abaixo:

Métricas de Avaliação da Qualidade da Malha

a. *Aspect Ratio:* Mede a razão entre a maior e a menor aresta de cada triângulo da malha. Se os valores obtidos forem próximos de *1*, a malha tende a ter triângulos predominantemente equiláteros.

b. *Skewness:* É uma medida de assimetria da distribuição dos triângulos da malha. Dado A_T a área de um triângulo T da malha e A_{CT} a área de um triângulo equilátero inscrito no círculo que circunscreve T, *Skewness* é a razão entre ($A_{CT} - A_T$) por A_{CT}. Valores próximos de zero correspondem a uma malha mais simétrica.

c. *Smoothness*: Mede o módulo da diferença entre a área do triângulo e seus vizinhos imediatos. Quanto mais próximo de zero, mais suave é a malha.

Referências:

- **Satyan L. Devadoss, Joseph O'Rourke, *Discrete and Computational Geometry*, Princeton University Press, 2011.**
- **P. C. P. Carvalho e L. H. de Figueiredo, *Introdução à Geometria Computational*, 18° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1991.**
- ***Notas de aula* do Prof. Luiz Henrique Figueiredo – IMPA.**
- **F. P. Preparata e M. I. Shamos, *Computational Geometry: an Introduction*, Springer-Verlag, 1985.**
- **-Verlag, 1997.**