

Geometria Computacional

Professor:

Anselmo Montenegro
www.ic.uff.br/~anselmo

Conteúdo:

- Introdução

Roteiro

- Origens
- Definição
- Problemas geométricos
- Configurações degeneradas
- Classificação de problemas geométricos
- Exemplos de problemas geométricos
- Aplicações

Geometria Computacional: origens

- Geometria Computacional (GC) é uma área relativamente recente
- O termo Geometria Computacional foi cunhado em um artigo de Shamos (M. I. Shamos. Problems in Computational Geometry, manuscrito não publicado, 1975)

Geometria Computacional: origens

- Por outro lado, a GC tem raízes longínquas nos estudos dos egípcios e gregos sobre geometria
- A geometria nasceu como um ramo fidedignamente da matemática aplicada
- Algumas das motivações originais para alguns problemas geométricos era construir prédios e calcular áreas das terras para taxaço

Geometria Computacional: origens

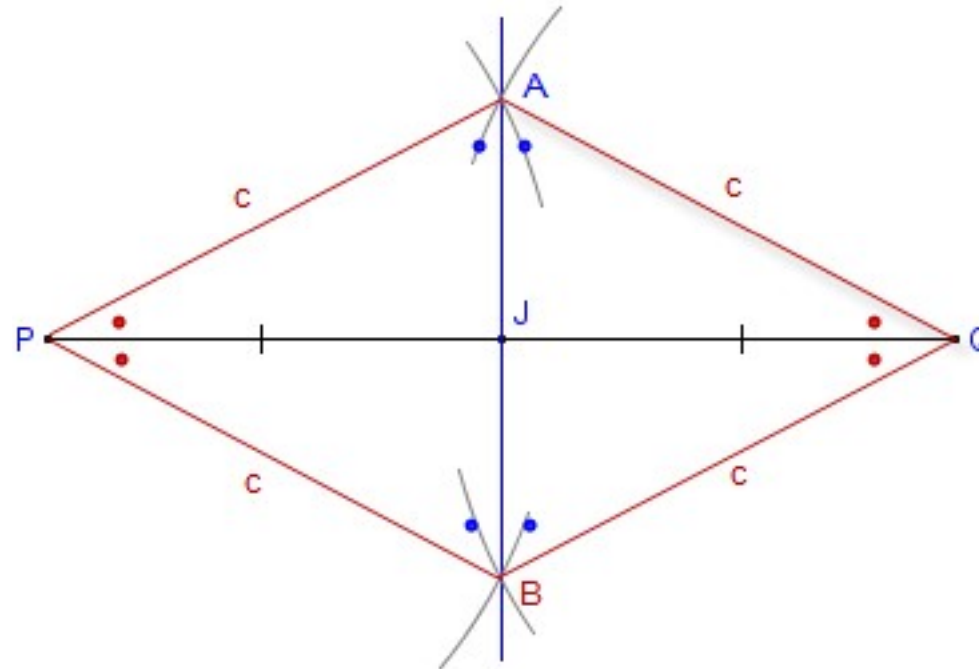
- Mas a geometria transcendeu os problemas originais e deu origem a uma das maiores áreas da matemática
- Euclides é conhecido por ter introduzido na geometria o método de prova axiomático
- Entretanto, uma outra grande contribuição foi a invenção da Construção Euclidiana (CE), um esquema que incorpora de forma entremeada algoritmo e prova

Geometria Computacional: origens

- A CE estabelecia instrumentos (régua e compasso) e operações que poderiam com eles ser executadas
- A CE satisfazia todos os pré-requisitos de um algoritmo: é não ambígua, correta e termina

Geometria Computacional: origens

- Exemplo de Construção Euclidiana (bisseção perpendicular de um segmento)



<http://www.mathopenref.com/constbisectline.html>

Geometria Computacional: origens

- A geometria continuou a florescer, mas o aspecto algorítmico foi esquecido por quase 2000 anos
- Isto ocorreu em parte pela popularização da prova por absurdo (*reduction ad absurdum*)
- A prova por absurdo permitia aos matemáticos provar a existência de um objeto, mas não como construí-lo.

Geometria Computacional:origem

- A contribuição de Euclides foi tão profunda que somente após Descarte houve uma nova formulação da geometria: a Geometria Analítica (GA)
- A introdução de coordenadas pela GA permitiu a conexão entre duas áreas da matemática: a Álgebra e a Geometria
- A GA possibilitou um enorme aumento na expressividade computacional já que objetos geométricos podiam ser construídos através da solução de equações

Geometria Computacional: noção de complexidade na geometria clássica

- As construções euclidianas podem ser complicadas mesmo para os problemas mais simples
- Os geometras pós-euclidianos se preocupavam em reduzir o número de operações elementares em tais construções

Geometria Computacional: noção de complexidade na geometria clássica

- Lemoine propôs as seguintes primitivas:
 - Colocar uma perna do compasso em um ponto
 - Colocar uma perna do compasso em uma linha
 - Produzir um círculo
 - Passar a aresta de uma régua por um ponto
 - Produzir uma linha
- O número total de tais operações em uma construção era denominado “complicação da construção”

Geometria Computacional:origem

- Outro aspecto considerado era o espaço necessário para gerar uma construção, espaço esse que dependia do tamanho que a construção e os passos intermediários ocupavam no papel
- Tais medidas de dificuldade para construção não correlacionavam o tamanho da entrada com o número de operações necessárias para gerar a construção
- Tal noção é fundamental para a noção de complexidade computacional atual

Geometria Computacional: origem

- Existe uma forte conexão entre a GC e problemas que surgiram em outras áreas como:
 - Problema do caixeiro viajante euclidiano
 - Árvore geradora mínima
 - Remoção de linhas escondidas
 - Problemas de programação linear, etc.

Geometria Computacional: definição

Segundo Shamos (tese de doutorado): “This thesis is a study of the computational aspects of geometry within the framework of analysis of algorithms”

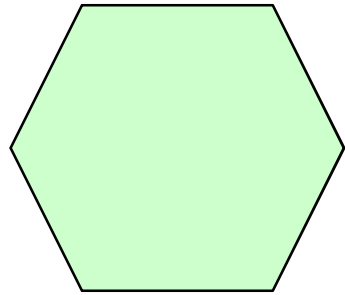
Geometria Computacional: definição

Segundo Carvalho e Figueiredo: “Geometria Computacional é uma subárea da ciência da computação que estuda algoritmos para resolver problemas geométricos.”

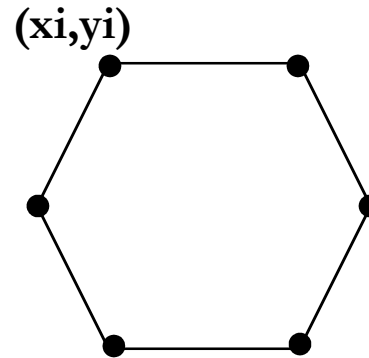
Geometria Computacional: problemas geométricos

- Características dos problemas geométricos:
 - Entrada de dados: pontos, retas, polígonos.
 - Objetos geométricos definidos por coordenadas ou equações.
 - Originalmente são contínuos, mas possuem representações discretas.

Geometria Computacional: problemas geométricos



Polígono com número infinito de pontos



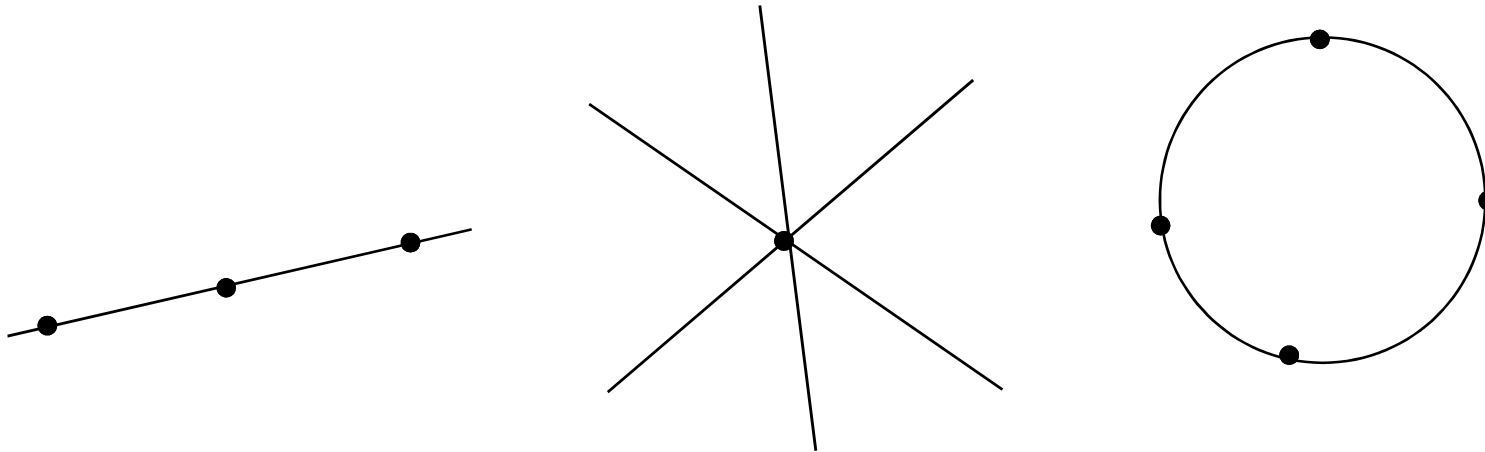
Representação pelas coordenadas dos vértices que definem a sua fronteira

Geometria Computacional: problemas geométricos

- Características (continuação)
 - A solução envolve aspectos:
 - Geométricos (forma e localização) - contínuos
 - Topológicos (adjacência entre os elementos da geometria) – discretos
 - A geometria define a topologia...

Geometria Computacional: configurações degeneradas

- Ocorre quando objetos geométricos não estão em posições gerais
- Exemplos:

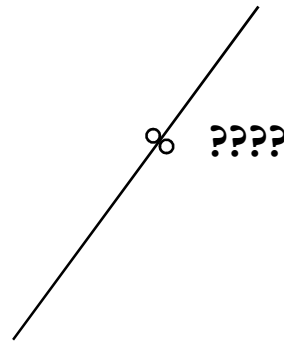


Geometria Computacional: configurações degeneradas

- Ocorrem com probabilidade zero
- Entretanto, todo algoritmo robusto deve tratar configurações degeneradas

Geometria Computacional: configurações degeneradas

- **Erros de arredondamento** quando se usa aritmética de ponto flutuante podem tornar relevantes situações quase degeneradas
- Exemplo: um ponto à esquerda de um segmento de reta pode ser tratado como um ponto à direita se estiver muito próximo da reta.

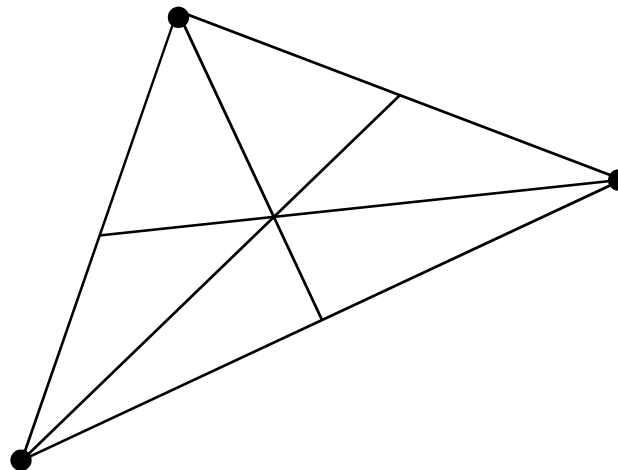


Geometria Computacional: configurações degeneradas

- Importante ressaltar que a aritmética em ponto flutuante não é a causa de configurações degeneradas
- Elas podem surgir mesmo com inteiros pequenos

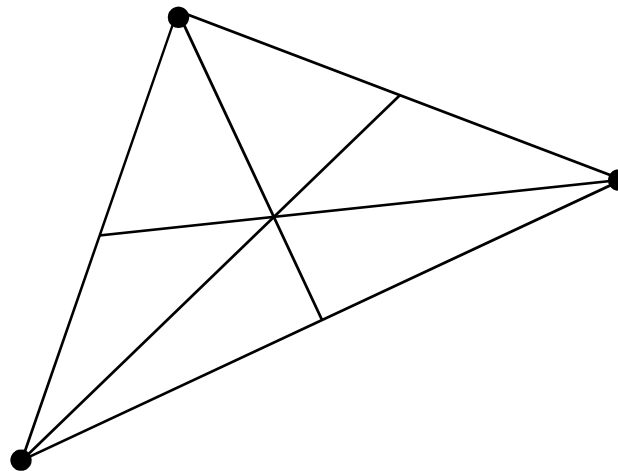
Geometria Computacional: invariante geométrico

- Configurações degeneradas podem surgir de situações onde parte-se de uma configuração geral
- Exemplo: determinar as medianas de um triângulo



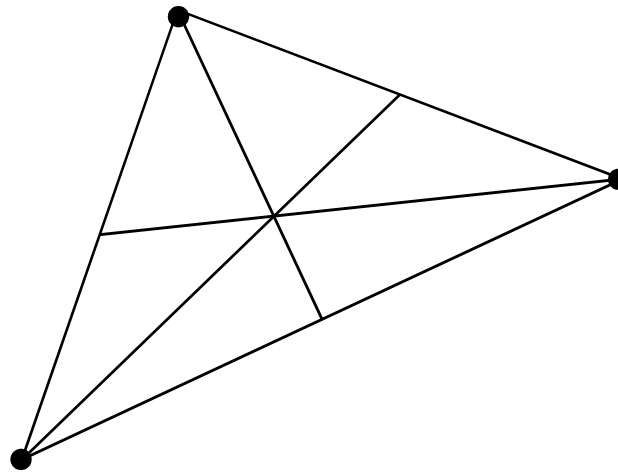
Geometria Computacional: invariante geométrico

- As medianas sempre intersectam-se em um ponto: o baricentro (**invariante geométrico**)



Geometria Computacional: invariante geométrico

- As medianas sempre intersectam-se em um ponto: o baricentro (invariante geométrico)



- Como você construiria tal figura com régua e compasso? E no computador?

Geometria Computacional: classificação dos problemas geométricos

- Classificação dos problemas
 - Seletivos - busca-se **selecionar um subconjunto da entrada**, descobrindo possivelmente relações topológicas
 - Construtivos - procura-se **construir novos objetos geométricos**, além das relações topológicas entre eles
 - Decisão – tem-se como objetivo decidir se certo objeto satisfaz ou não certa propriedade
 - Consulta – procura-se processar os objetos para efetuar consultas repetidas de modo eficiente

Geometria Computacional: exemplos de problemas geométricos

- Exemplos
 - Seletivos - fecho convexo, triangulação, árvore geradora mínima, simplificação
 - Construtivos - interseção de polígonos, círculo mínimo, diagrama de Voronoi, geração de malhas, suavização (curvas e superfícies)
 - Decisão – decidir se um polígono é convexo, verificar se um ponto pertence a um polígono.
 - Consulta – determinar dentre um conjunto de pontos aquele que se encontra mais próximo de um ponto específico

Geometria Computacional: exemplos de problemas geométricos

Fecho convexo

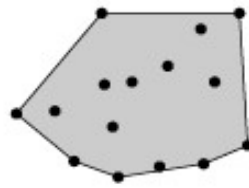
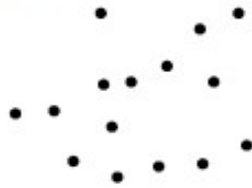
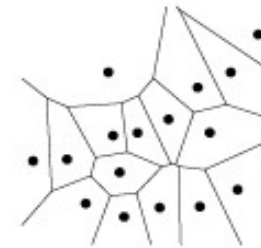
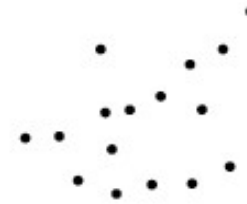
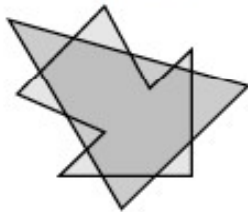


Diagrama de Voronoi



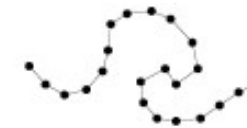
Interseção de polígonos



Triangulação



Reconstrução de curvas



Teste de convexidade



Não é convexo

Figura obtidas de

Instituto de Computação - UFF

Geometria Computacional: abordagem típica para solução de problemas

- Exemplo de problema: fecho convexo

Dado um conjunto finito de pontos no plano, calcular o seu fecho convexo.

Geometria Computacional: abordagem típica para solução de problemas

- Metodologia:
 - Definição matemática do problema
 - Definição precisa do que é resolver o problema algorítmicamente
 - Identificação de teoremas que ajudem na solução algorítmica do problema
 - Representação computacional da solução
 - Estudo de soluções algorítmicas para o problema
 - Identificação de primitivas geométricas adequadas
 - Identificação e tratamento de casos especiais
 - Análise de desempenho das soluções algorítmicas encontradas

Geometria Computacional:aplicações

- Computação Gráfica – interseções 2D e 3D

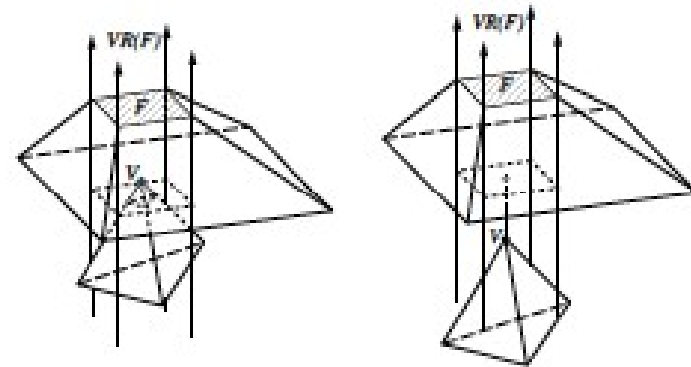
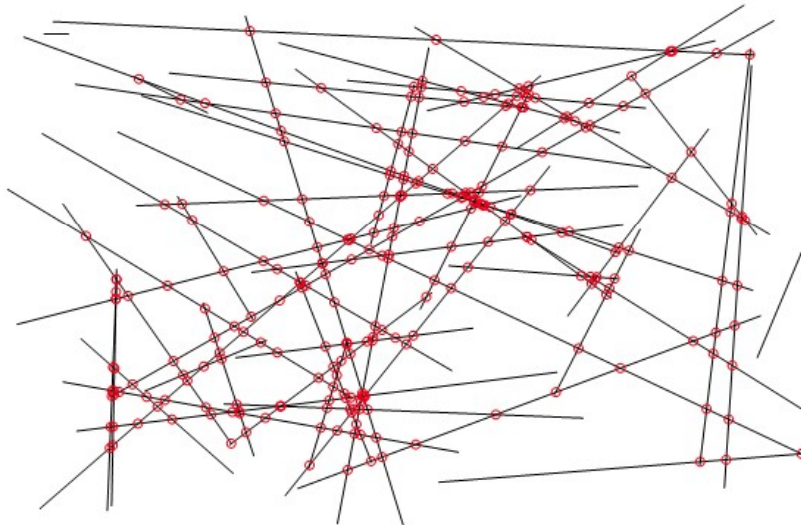


Figure 7: Local minimum states with and without penetration.

<http://www.codeproject.com/Articles/22568/Computational-Geometry-C-and-Wykobi> <http://www.merl.com/publications/docs/TR97-05.pdf>

Geometria Computacional:aplicações

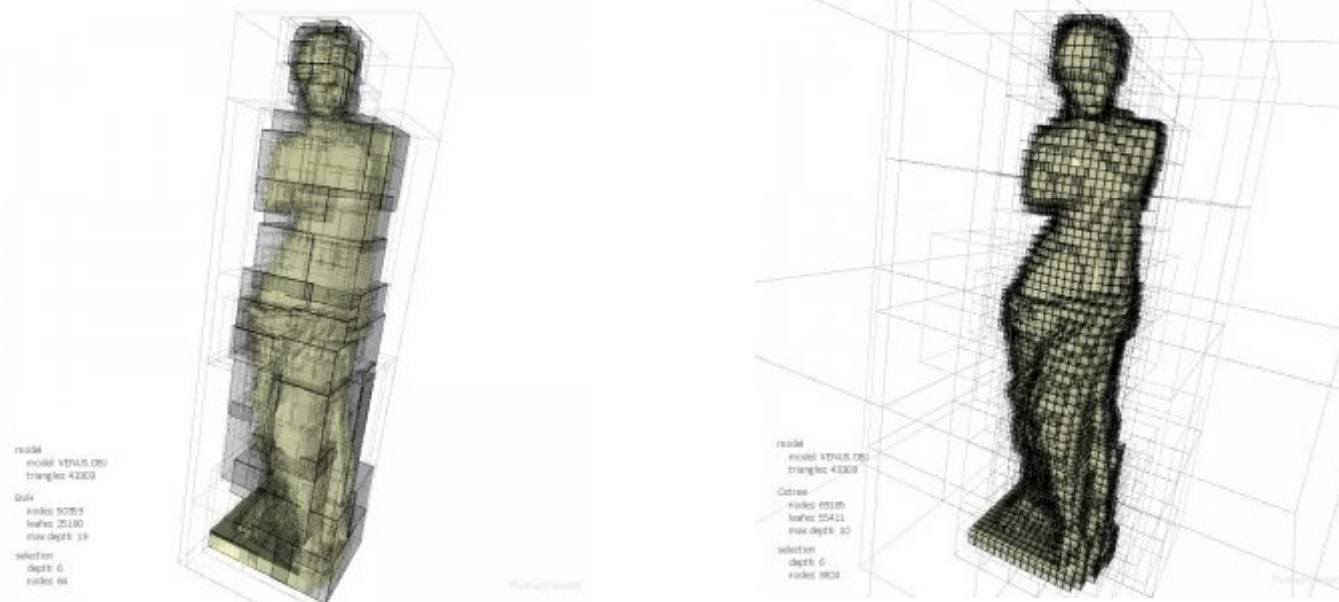
- Computação Gráfica – traçado de raios



Fonte da imagem: <http://www.geforce.com/hardware/desktop-gpus/geforce-gtx-480/features>

Geometria Computacional:aplicações

- Computação Gráfica – traçado de raios

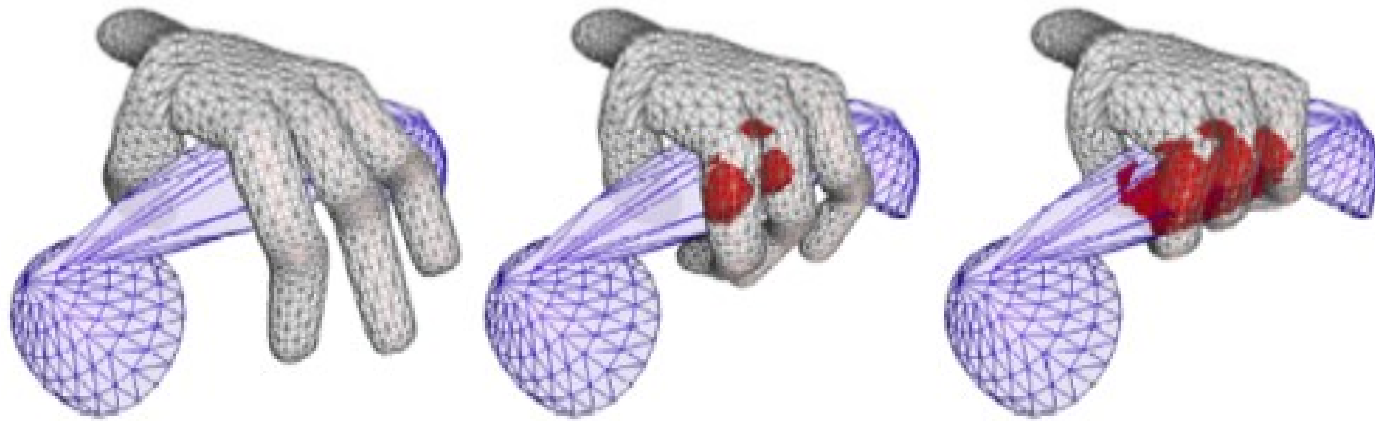


Fonte das imagens:

<http://thomasdiewald.com/blog/>

Geometria Computacional:aplicações

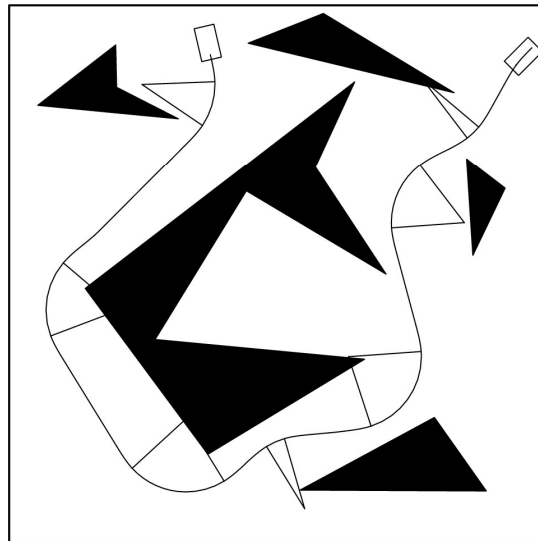
- Computação Gráfica – detecção de colisões



http://graphics.ethz.ch/research/past_projects/

Geometria Computacional:aplicações

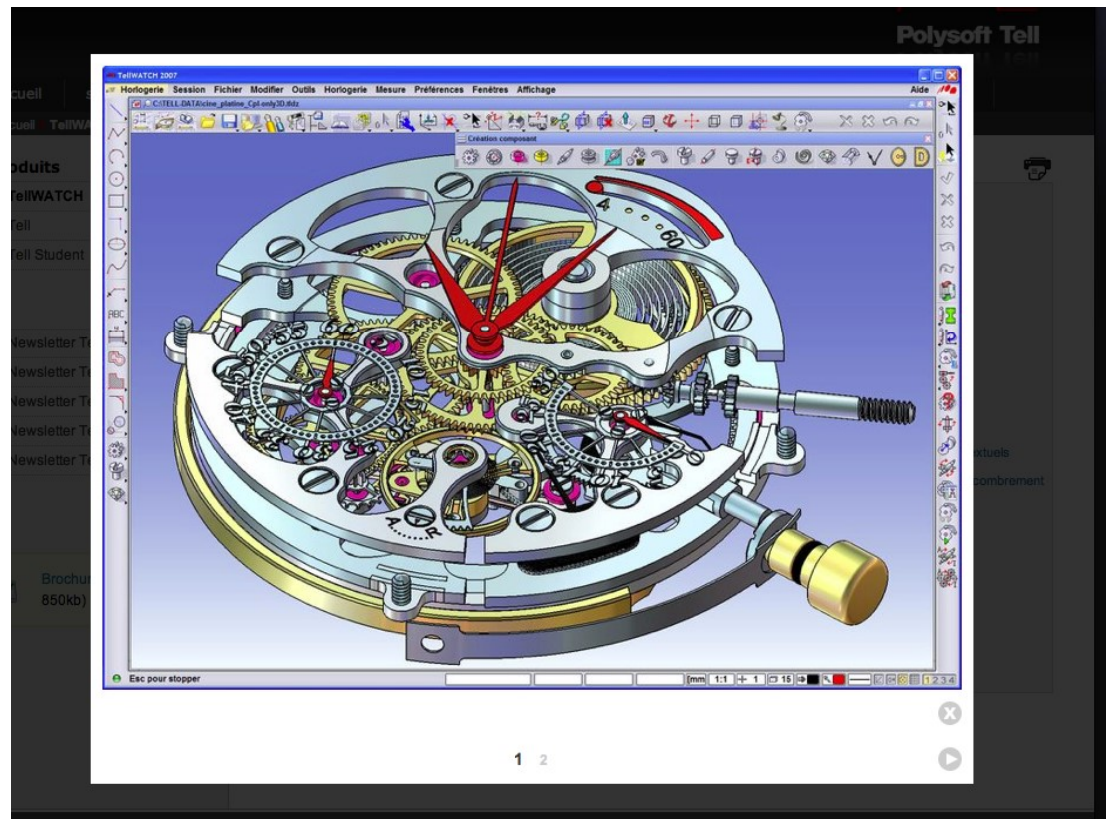
- Robótica – planejamento de trajetórias



Th. Fraichard and A. Scheuer. From Reeds and Shepp's to Continuous-Curvature Paths. *IEEE Trans. on Robotics*, 20(6), December 2004. [\[pdf\]](#).

Geometria Computacional:aplicações

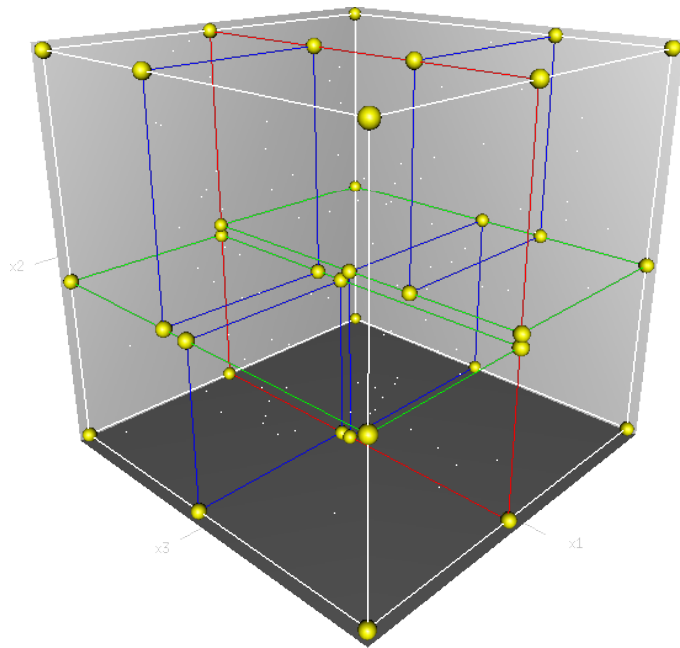
- CAD/CAM



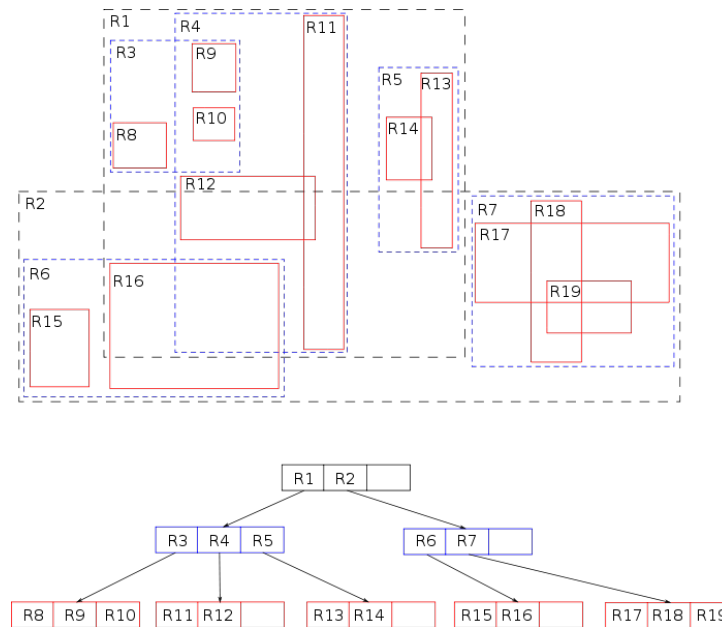
<http://khwcc.blogspot.com.br/2011/06/tellwatch-3d-cadcam-watchmaking.html>

Geometria Computacional:aplicações

- Banco de Dados – consultas multidimensionais



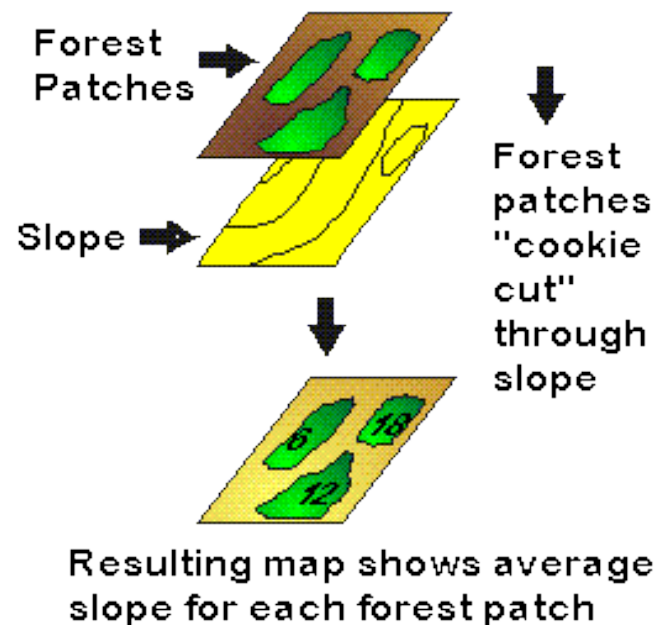
<http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b6/3dtree.png>



<http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6f/R-tree.svg>

Geometria Computacional:referências

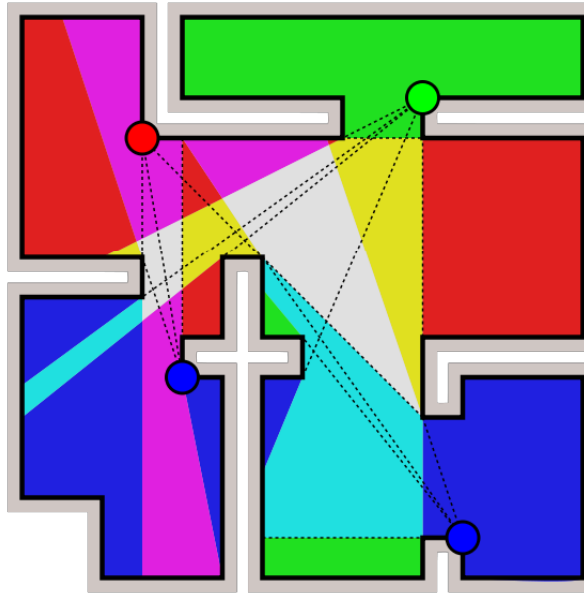
- Sistemas de Informação Geográfica



<http://maps.unomaha.edu/Peterson/gis/notes/GISAna1.html>

Geometria Computacional:referências

- Segurança e vigilância (Art Gallery Problem)



Fonte da imagem:

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/ee/Art_gallery_problem.svg

http://cs.smith.edu/~orourke/books/ArtGalleryTheorems/Art_Gallery_Full_Book.pdf

Full_Book.pdf

Geometria Computacional:referências

- F. P. Preparata e M. I. Shamos, *Computational Geometry: an Introduction*, Springer-Verlag, 1985.
- [Notas de aula](#) do Prof. Luiz Henrique Figueiredo – IMPA.
- P. C. P. Carvalho e L. H. de Figueiredo, [Introdução à Geometria Computacional](#), 18^o Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1991.