Geometria Computacional

Professor:

Anselmo Montenegro
www.ic.uff.br/~anselmo

Conteúdo (aula 10):

- Triangulações de Delaunay

Roteiro

- Introdução
- Triangulações de Delaunay
- Definição
- Teste do círculo
- Algoritmo $O(n^2)$ para triangulação de Delaunay
- Algoritmo $O(n \log n)$ para triangulação de Delaunay

- **Triangulação de Delaunay: introdução**

- Considere um conjunto de pontos S onde cada ponto p de S é representado por uma tripla (x,y,z), onde x, y codificam a posição geográfica e z a altura de uma região da superfície da terra

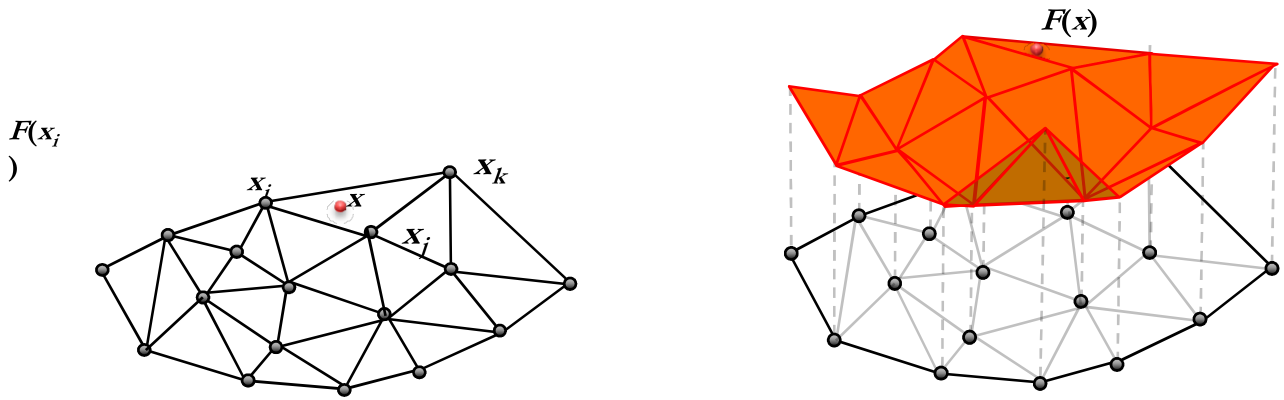
Foto de vista área de Arequipa, Peru (do autor)

- Problema: reconstruir parte da superfície da Terra a partir das amostras discretas em S

• Triangulação de Delaunay: introdução

- Uma solução para tal problema é triangular a projeção de S obtida descartando as coordenada z correspondente a altura

- Em seguida, erguemos a triangulação acrescentando a coordenada z original em cada vértice original da triangulação

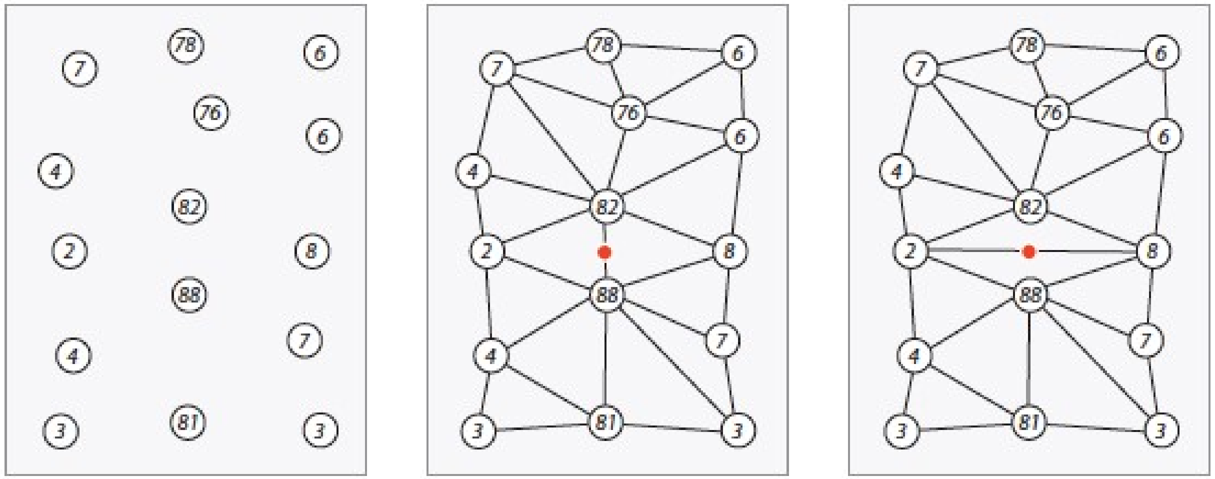


- **Triangulação de Delaunay: introdução**

- Existem entretanto inúmeras possibilidades de triangulação
- É natural questionar se existe uma triangulação que melhor representa as características de uma superfície, no caso um terreno

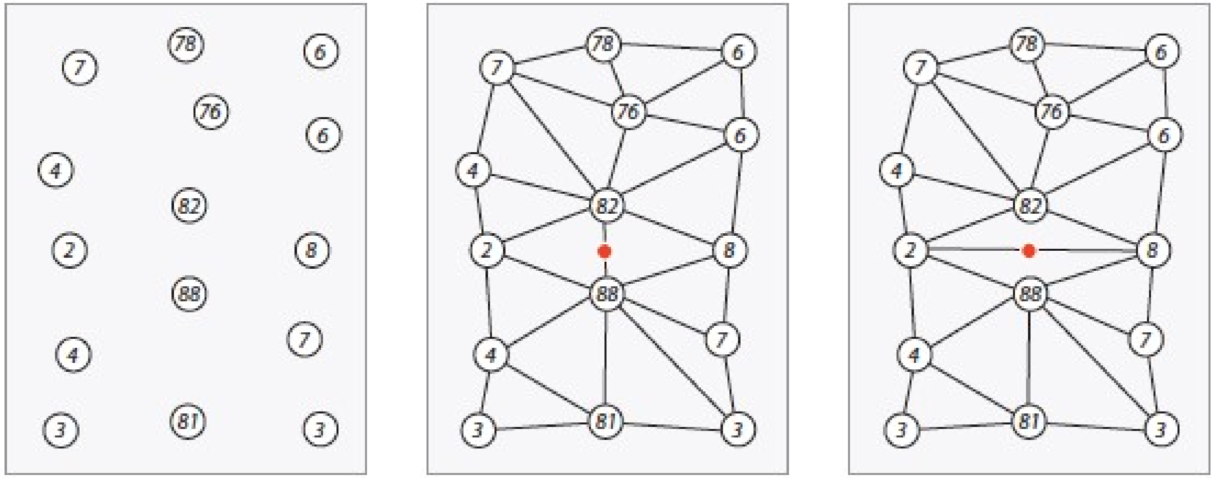
• Triangulação de Delaunay: introdução

- Um terreno real é em geral formado por estruturas como vales e serranias
- Dependendo da forma como triangulamos tais estruturas pode ser reveladas ou eliminadas da reconstrução



• Triangulações: triangulação de Delaunay

- Como pode ser visto na figura abaixo (obtida de Devadoss & O'Rourke) o flip das arestas 82-88 faz com que um vale seja criado quebrando a espinha dorsal do terreno



• Triangulação de Delaunay: introdução

- A geração de triângulos finos em muitas situações gera artefatos indesejáveis na reconstrução

- Triângulos com tais características podem ter impacto na:

    - Visualização das faces (triângulos finos não levam a bons efeitos de iluminação)
    - Solução de eq. diferenciais parciais por elementos finitos
    - Reconstrução de terrenos

- Nestas áreas de aplicação dá-se preferência a triangulações que não contenham triângulos que não sejam muito finos, isto é que maximizem o menor ângulo de cada triângulo

• Triangulação de Delaunay: introdução

- Como construir triangulações cujos triângulos tenham seu menor ângulo maximizado?

- Antes vamos estabelecer algumas condições: consideraremos 4 pontos cocirculares como um caso degenerado que não será tratado na exposição que se segue

- Logo, o caso geral será aquele em que o conjunto S de pontos não contém quatro pontos cocirculares

• Triangulação de Delaunay: definição

- Considere uma triangulação T de um conjunto de vértices S, |S|=n, em posição geral

- Definição 7.1 (Sequencia angular de uma triangulação) – Uma sequencia angular de uma triangulação T é uma lista dos 3n ângulos de todos os triângulos de T em ordem crescente $S\alpha_{T}=(\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_{3n})$

- Definição 7.2 (Triangulação mais cheia) Uma triangulação T1 é mais cheia (fatter) que uma triangulação T2 se $S\alpha_{T1} > S\alpha_{T2}$ onde o operador relacional > corresponde a ser maior no sentido de ordenação lexicográfica

$$\left(20^\circ,30^\circ,45^\circ,65^\circ,70^\circ,130^\circ\right) > \left(20^\circ,30^\circ,45^\circ,60^\circ,70^\circ,130^\circ\right)$$

• Triangulação de Delaunay: definição

- Como encontrar a triangulação mais cheia (fatter)?
- Definição 7.3 – Seja *e* uma aresta de uma triangulação T1, e seja Q o quadrilatero em T1 formado por dois triângulos tendo *e* como aresta comum. Se Q é convexo, então seja T2 a triangulação obtida após efetuar *edge flip* sobre e em T1. Dizemos que *e* é uma aresta legal se T1 ≥ T2 caso contrário afirmamos que é ilegal.
- A operação de edge flip altera 6 ângulos na triangulação
- Além disso pode-se afirmar que todas as arestas da fronteira de conv(S) são legais

• Triangulação de Delaunay: definição

- Definição 7.4 (Triangulação de Delaunay) – Seja S um conjunto de pontos no plano em posição geral. Uma triangulação de S que possui apenas arestas legais é denominada uma Triangulação de Delaunay Del(S) de S.

- O nome da triangulação tem origem no nome do matemático russo Boris Delaunay

- Não é evidente que todo conjunto S de pontos no plano admita uma triangulação de Delaunay

- Entretanto é possível afirmar que é possível remover arestas ilegais sem introduzir novas arestas ilegais

• Triangulação de Delaunay: definição

•Não é evidente que todo conjunto S de pontos no plano admita uma triangulação de Delaunay

•Entretanto é possível afirmar que é possível remover arestas ilegais sem introduzir novas arestas ilegais

•Uma vez que as aresta ilegais são sofrem edge flips, a sequencia de ângulos aumenta estritamente e a mesma triangulação jamais reaparece no grafo de flips.

•Como o número de nós no grafo de flips é finito o algoritmo termina em um ótimo local

• Triangulação de Delaunay: definição

•A questão fundamental é:

O ótimo local é o ótimo global?

- **Triangulação de Delaunay: algoritmo por edge flipping**

Algorithm **TriangulaçãoDeDelaunayPorEdgeFlipping(*S*)**
Input. Um conjunto de pontos S no plano tais que 4 não sejam cocirculares.
Output. Triangulação de Delaunay de S
1.Gerar uma triangulação inicial T
2.Se T possuir uma aresta ilegal *e*, aplica edge flip em *e*
3.Repita o passo 2, caminhando pelo flip graph de S, até que nenhuma aresta ilegal permaneça

• Triangulação de Delaunay: teste do círculo

•Como evitar o teste que compara a sequencia angular de duas comparações?

•Existe algum teste mais eficiente?

•A resposta é sim, e é baseada no Teste do Círculo

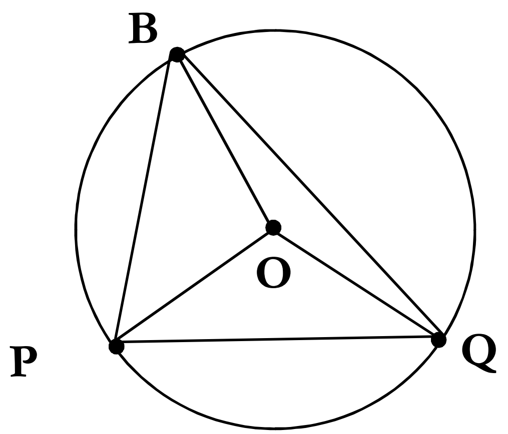
• Triangulação de Delaunay: teste do círculo

•Teorema 7.2 (Teorema de Tales) – Para 3 pontos P, Q e B sobre um círculo e A interior e C exterior, o ângulo PAQ é menor que PBQ que por sua vez é menor que PCQ

•Prova. Seja O o centro do círculo. Pode-se afirmar que OP, OB e OQ tem o mesmo comprimento já que são raios do círculo. Logo, os triângulos POB e QOB são isósceles. Deste modo, é possível mostrar que independente da posição de B, o ângulo POQ é duas vezes o ângulo PBQ.

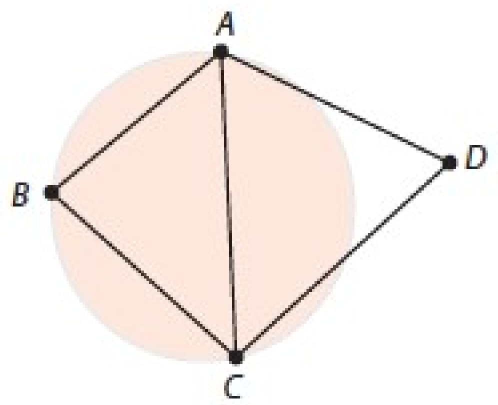
• Triangulação de Delaunay: teste do círculo

- Prova. Seja O o centro do círculo. Pode-se afirmar que OP, OB e OQ tem o mesmo comprimento já que são raios do círculo. Logo, os triângulos POB e QOB são isósceles. Deste modo, é possível mostrar que independente da posição de B, o ângulo POQ é duas vezes o ângulo PBQ.



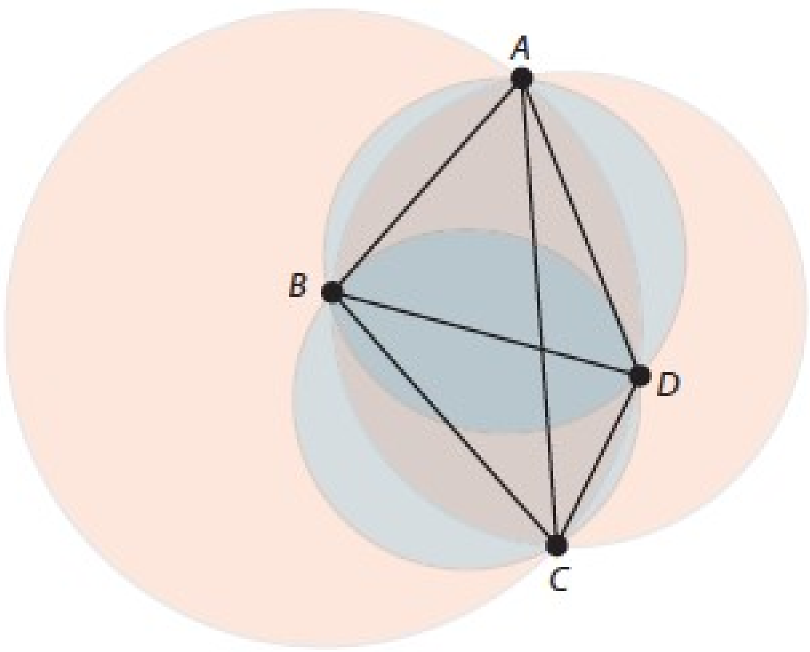
- **Triangulação de Delaunay: teste do círculo**

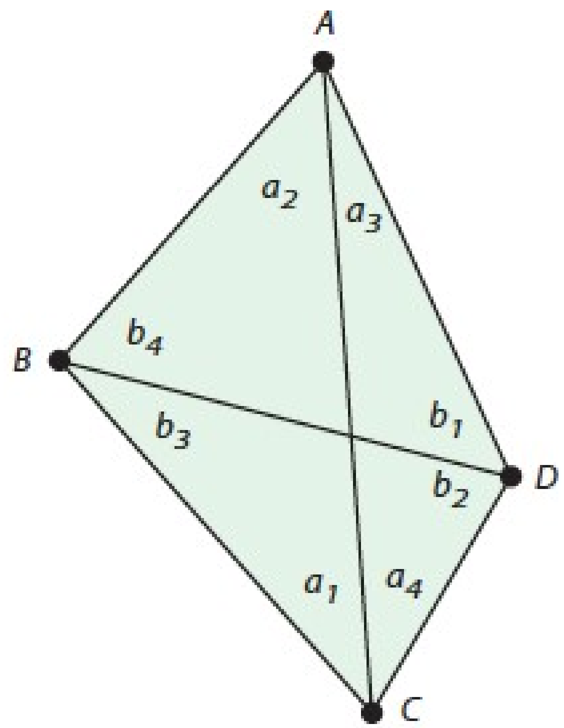
- Proposição. Seja *e* uma aresta de uma triangulação, onde *e* = AC pertence a dois triângulos ABC e ACD. Então *e* é uma aresta legal se D está fora do circuncírculo de ABC e é ilegal se D está dentro



- **<u>Triangulação de Delaunay: teste do círculo</u>**

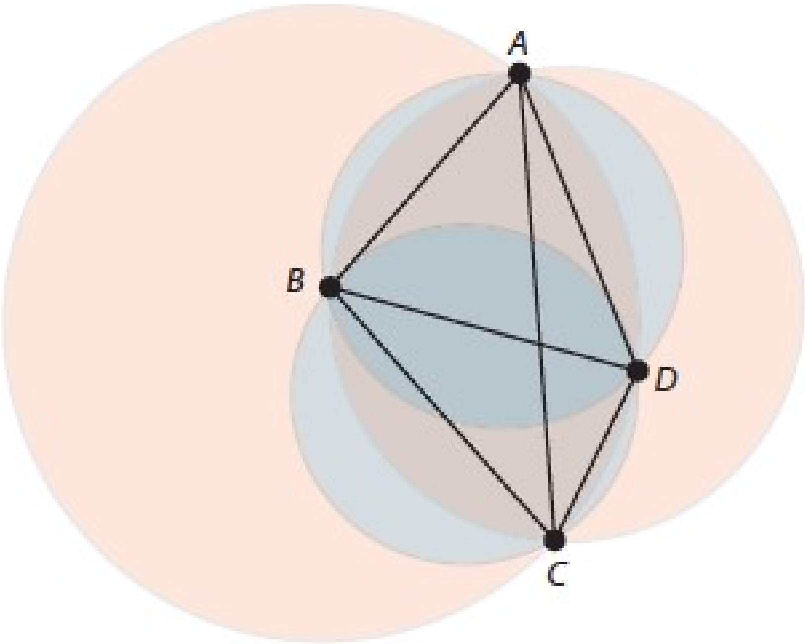
Prova. Considere a figura abaixo , na qual D está dentro do círculo ABC. Afirma-se que AC é uma aresta ilegal.

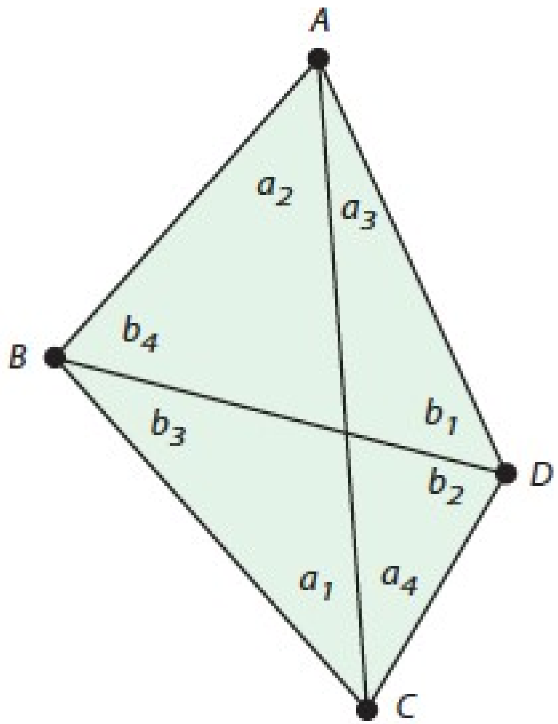




- **Triangulação de Delaunay: teste do círculo**

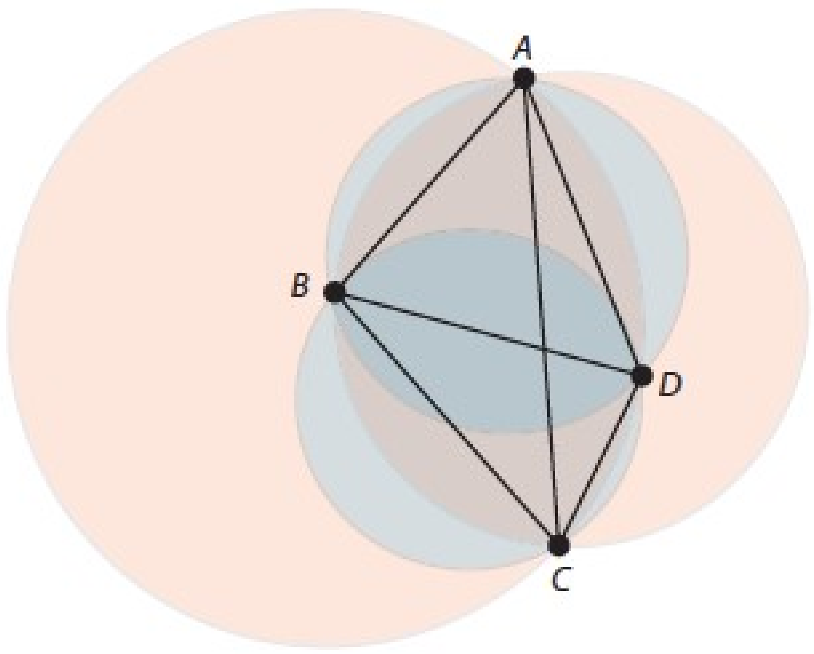
Rotule os oito ângulos do quadrilátero cortado por ambas as diagonais. Como C está for a do circuncírculo de ABD, pelo Teorema de Thales, o ângulo b1 é maior que a1

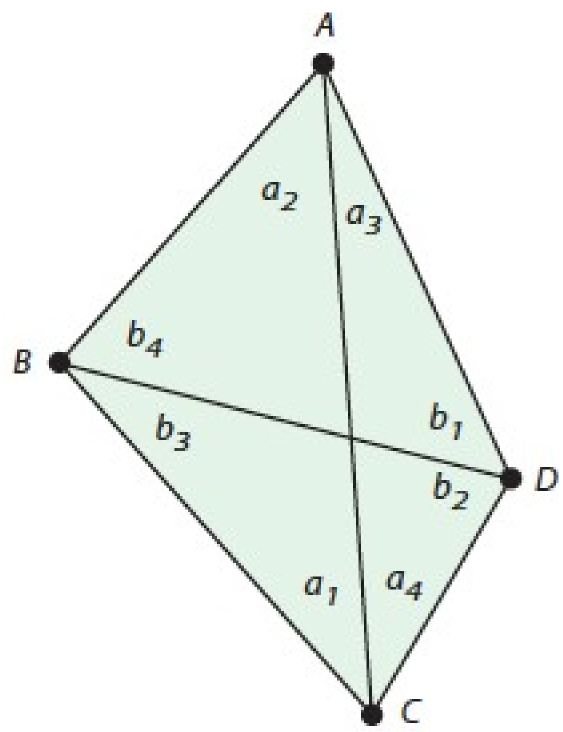




• Triangulação de Delaunay: teste do círculo

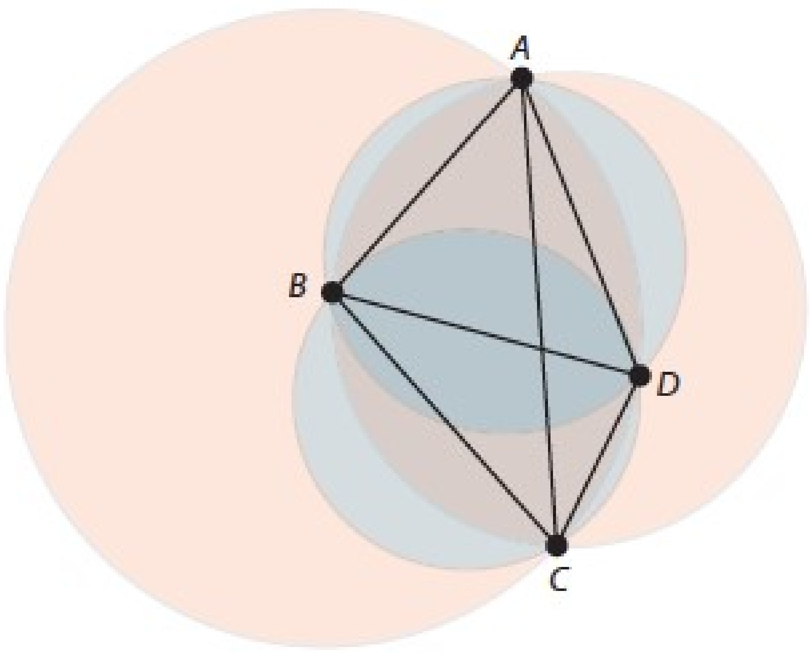
Analogamente, visto que A está for a do circuncírculo de BCD, por Tales, o ângulo b2 é maior que o ângulo a2

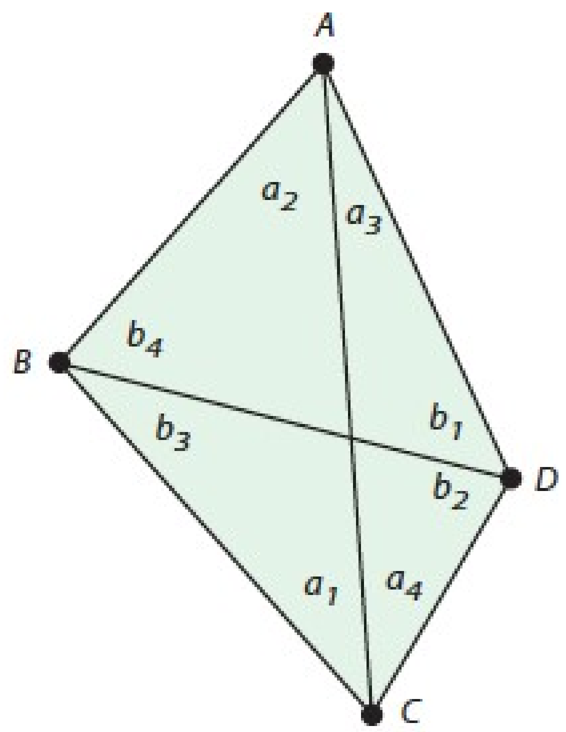




- **<u>Triangulação de Delaunay: teste do círculo</u>**

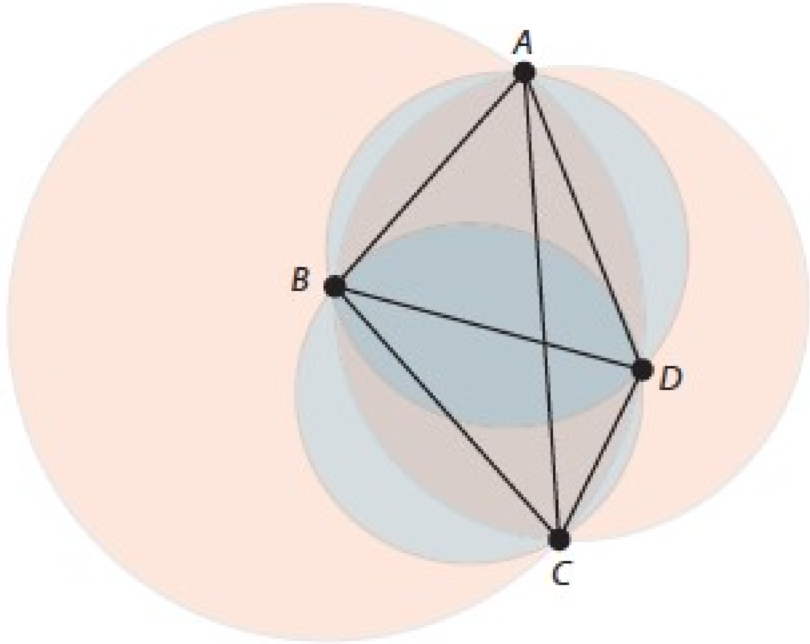
Prosseguindo, mostra-se que bi > ai para todo i

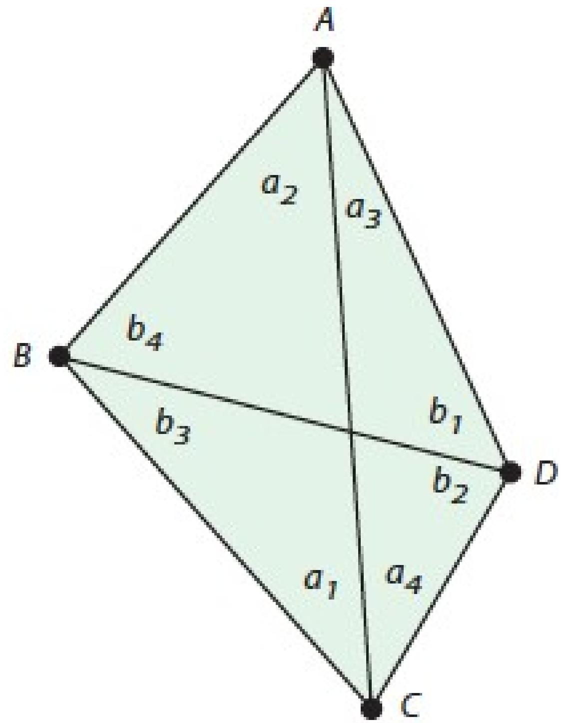




Triangulação de Delaunay: teste do círculo

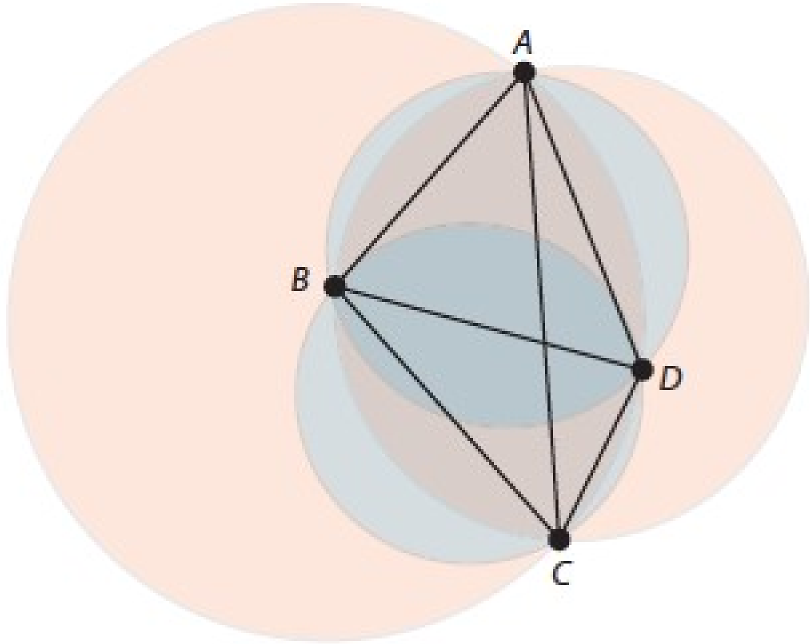
- Além disso, como D é interior a ABC, a seq. de ângulos para a aresta AC deve ter a1, . . . , a4 como seus menores ângulos. Logo, para cada um dos seis ângulos formados pela aresta BD, existe um ângulo menor formado pela aresta AC, provando que AC é ilegal. A mesma prova funciona para D for a de ABC

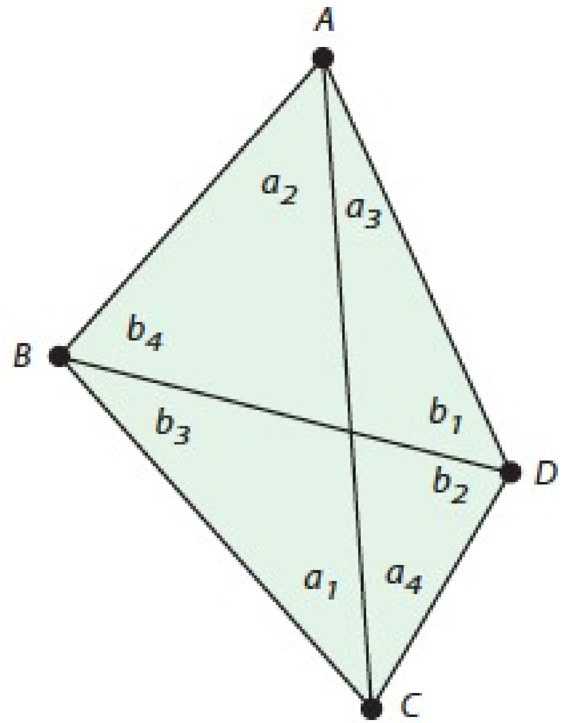




• Triangulação de Delaunay: teste do círculo

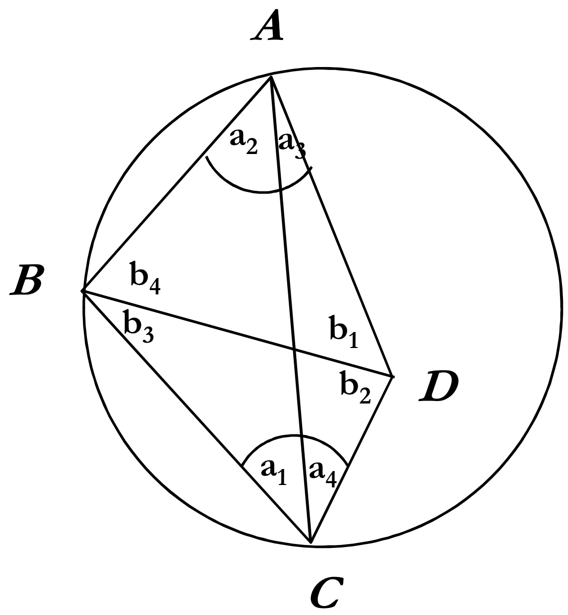
- Além disso, como D é interior a ABC, a seq. de ângulos para a aresta AC deve ter a1, . . . , a4 como seus menores ângulos. Logo, para cada um dos seis ângulos formados pela aresta BD, existe um ângulo menor formado pela aresta AC, provando que AC é ilegal. A mesma prova funciona para D for a de ABC





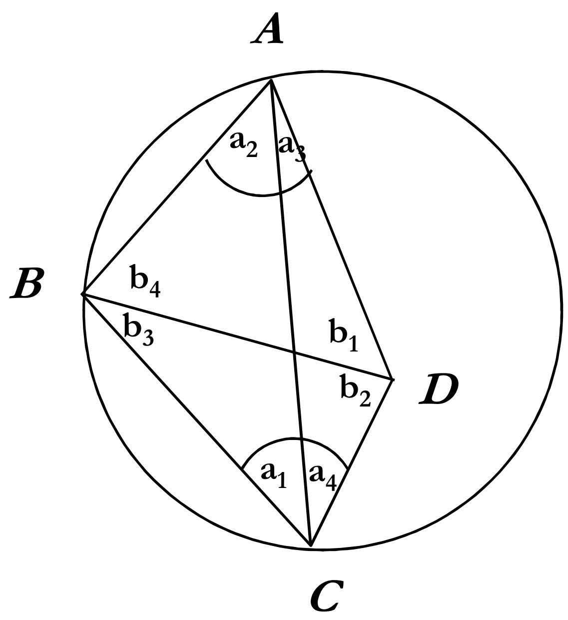
• Triangulação de Delaunay: teste do círculo

- Além disso é possível verificar que após substituir AC por BD via edge flip, os dois ângulos não considerados $\alpha = a_2 + a_3$ e $\beta = a_1 + a_4$ não podem ser menores que o mínimo entre (a_1,a_2,a_3 e a_4). Suponha a_{min} = min a_i, $0 \le i \le 4$. Se o arco definido por a_i está no arco definido por α então $\alpha > a_i$; por outro lado β é definido pela união dos arcos definidos por a_j e a_k e como a_i é mínimo, $a_i \le a_j$ e $a_i \le a_k$, e portanto $\beta > a_i$. Argumento semelhante pode ser aplicado se a_i está no arco definido por β



- **Triangulação de Delaunay: teste do círculo**

- Logo o resultado do *edge flip* gera uma sequência de que são lexicograficamente maiores que os seis ângulos anteriores a operação



- **Triangulação de Delaunay: teste do círculo**

Teorema - (Propriedade do Círculo Vazio). Seja S um conjunto de pontos em posição geral tal que quatro pontos quaisquer não sejam cocirculares. Uma triangulação T de S é de Delaunay se e somente se nenhum ponto de S é interior a um circuncírculo de um triângulo de T

- **Triangulação de Delaunay: teste do círculo**

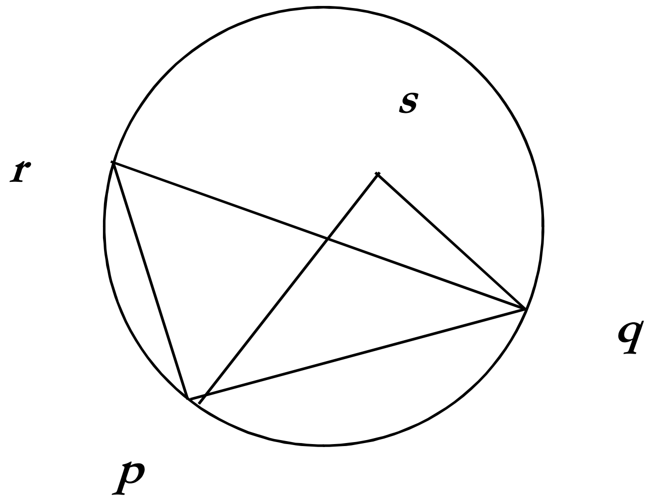
- É possível determinar se, dados quatro vértices A,B,C e D, o círculo que passa por ABC não contém D através da seguinte expressão:

$$\mathcal{D}(A,B,C,D)=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_x^{\,2}+A_y^{\,2} & 1 \\ B_x & B_y & B_x^{\,2}+B_y^{\,2} & 1 \\ C_x & C_y & C_x^{\,2}+C_y^{\,2} & 1 \\ D_x & D_y & D_x^{\,2}+D_y^{\,2} & 1 \end{vmatrix} > 0$$

• Triangulação de Delaunay: Algoritmo $O(n^2)$ para triangulação de Delaunay

- Utilizaremos o seguinte teorema para desenvolver um algoritmo quadrático:

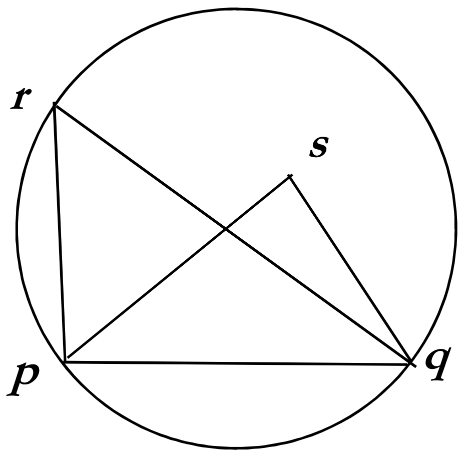
- Teorema. Se *pqr* é um triângulo que ocorre numa triangulação de Delaunay de conv(S), onde S é um conjunto de pontos no plano, então o ângulo *prq* é máximo dentre todos os ângulos da forma psq, onde s pertence a C e está no mesmo semiplano de *r* em relação a *pq*.



• Triangulação de Delaunay: Algoritmo $O(n^2)$ para triangulação de Delaunay

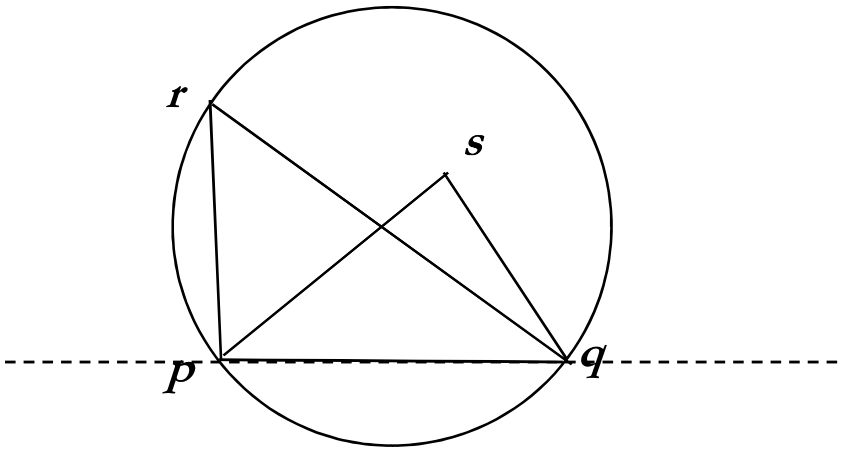
- Utilizaremos o seguinte teorema para desenvolver um algoritmo quadrático:

- Teorema. Se *pqr* é um triângulo que ocorre numa triangulação de Delaunay de conv(S), onde S é um conjunto de pontos no plano, então o ângulo *prq* é máximo dentre todos os ângulos da forma psq, onde s pertence a C e está no mesmo semiplano de *r* em relação a *pq*.



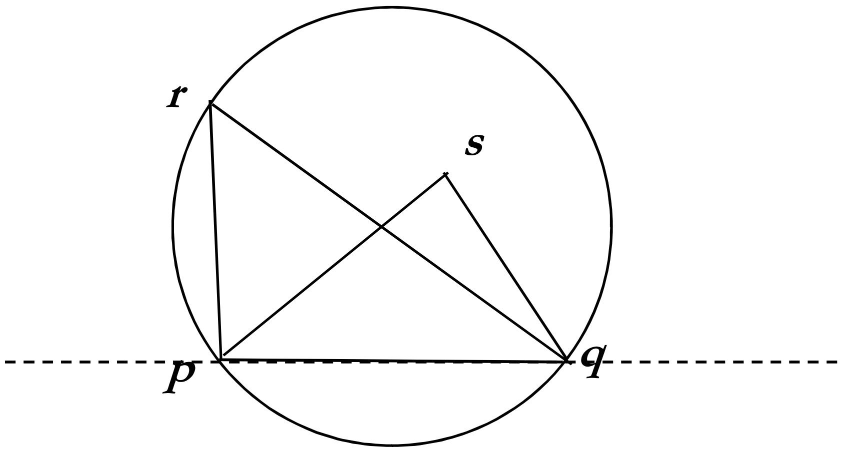
- **Triangulação de Delaunay: Algoritmo $O(n^2)$ para triangulação de Delaunay**

- Prova. Suponha que s está no mesmo semiplano de r em relação a pq e que o ∡psq >∡prq então s é interior ao círculo que passa por p,q e r o que contradiz o fato do triângulo pqr ser um triângulo de Delaunay



• Triangulação de Delaunay: Algoritmo $O(n^2)$ para triangulação de Delaunay

- Deste modo, sendo pq uma aresta de Delaunay, podemos obter os triângulos adjacentes a pq de Delaunay escolhendo, em cada semiplano, os pontos que maximizam o ângulo formado com o segmento pq



- **Triangulação de Delaunay: Algoritmo $O(n^2)$ para triangulação de Delaunay**

- O processo é semelhante ao utilizado pelo algoritmo EmbrulhoParaPresente (F,a) para determinar a face adjacente a uma aresta do fecho convexo 3D

- Chamaremos o passo que determina o triângulo que forma o maior ângulo com uma aresta a = pq de EmbrulhoParaPresente(a)

Triangulação de Delaunay: Algoritmo $O(n^2)$ para triangulação de Delaunay

- As faces introduzidas na triangulação têm suas arestas testadas para verificar se já foram incluídas anteriormente
- Em caso negativo, um dos semiplanos associados a aresta está livre e a aresta deve ser explorada posteriormente
- É possível que o semiplano não contenha pontos de S o que siginifica que a aresta está na fronteira de conv(S) e portanto uma das faces incidentes a ela é a face ilimitada

- **Triangulação de Delaunay: Algoritmo $O(n^2)$ para triangulação de Delaunay**

- Como obter a face inicial
- Determinar uma aresta *a* de conv(C) (usando o passo inicial do algoritmo de Jarvis)
- Aplicar o passo de EmbrulhoParaPresente(a)

• Triangulação de Delaunay: Algoritmo $O(n^2)$ para triangulação de Delaunay

Algoritmo TriangulaçãoDeDelaunayI(S)

Entrada: um conjunto de pontos $S \in R^3$

Saída: Del(conv(S))

1. Obtenha um triângulo inicial T usando a técnica descrita nos slides anteriores.
2. Coloque T em uma fila $\mathcal{F}$ e na estrutura half-edge, com todas as suas arestas rotuladas como livre, exceto as da fronteira de conv(S)
3. **Enquanto $\mathcal{F} \neq \emptyset$ faça**
4. Remova um triângulo T de $\mathcal{F}$
5. **Para** cada aresta *a* livre de T **faça**
6. Determine a face adjacente *T'* usando EmbrulhoParaPresente(*a*)
7. Coloque *T'* gerada na fila $\mathcal{F}$
8. Coloque *T'* na estrutura half-edge, conectando-a com as faces já geradas que lhe são adjacentes e determinando suas arestas livres
9. **Fim_Para**
10. **Fim_Enquanto**

• Triangulação de Delaunay: Algoritmo $O(n^2)$ para triangulação de Delaunay

- A análise é semelhante a EmbrulhoParaPresente3D
- O algoritmo para quando todas as faces da triangulação forem geradas
- Se as faces geradas (incluindo a externa) não cobrissem o plano, então alguma aresta de uma das faces estaria livre
- Isto não ocorre pois o algoritmo só termina quando não existem mais arestas livres
- Teorema. O algoritmo TriangulaçãoDeDelaunayI obtém *Del*(*S*), onde *S* é um conjunto de pontos no plano em $O(n^2)$

- **Triangulação de Delaunay: algoritmo O(n log n) para triangulação de Delaunay**

  - Para obter uma algoritmo O(n log n) para triangulação de Delaunay de um conjunto S de pontos do plano utilizamos uma estratégia dividir para conquistar:

    a. Divide-se S em dois subconjuntos de igual tamanho S_1 e S_2

    b. Triangula-se $conv(S_1)$ e $conv(S_2)$ gerando $Del(conv(S_1))$ *e* $Del(conv(S_2))$

    a. Combina-se $Del(S_1)$ e $Del(S_2)$ para obter $Del(S)$

- **Triangulação de Delaunay: algoritmo O(n log n) para triangulação de Delaunay**

  - Lema 4.2. Se uma aresta de Del($S_1 \cup S_2$) tem ambos os extremos em S_1 (resp. S_2) então ela é uma aresta de Del(S_1)(resp. Del(S_2))

  - Prova. Se a é uma aresta de Del($S_1 \cup S_2$) então existe um círculo contendo seus extremos que exclui todos os elementos de ($S_1 \cup S_2$). Mas se ambos os extemos estão em S_1 então isto implica que a é aresta de Del(S_1)

  - Consequência: ao se criar Del($S_1 \cup S_2$) a partir de Del(S_1) e Del(S_2) nunca são inseridas arestas tendo ambos os extremos em S_1 ou S_2

- **Triangulação de Delaunay: algoritmo O(n log n) para triangulação de Delaunay**

- Lema 4.2. Se uma aresta de Del($S_1 \cup S_2$) tem ambos os extremos em S_1 (resp. S_2) então ela é uma aresta de Del(S_1)(resp. Del(S_2))

- Prova. Se a é uma aresta de Del($S_1 \cup S_2$) então existe um círculo contendo seus extremos que exclui todos os elementos de ($S_1 \cup S_2$). Mas se ambos os extemos estão em S_1 então isto implica que a é aresta de Del(S_1)

- Consequência: ao se criar Del($S_1 \cup S_2$) a partir de Del(S_1) e Del(S_2) nunca são inseridas arestas tendo ambos os extremos em S_1 ou S_2

- **Triangulação de Delaunay: algoritmo O(n log n) para triangulação de Delaunay**

  - Consequência: ao se criar Del($S_1 \cup S_2$) a partir de Del(S_1) e Del(S_2) nunca são inseridas arestas tendo ambos os extremos em S_1 ou S_2
  - Deve-se determinar quais arestas precisam ser removidas de Del(S_1) e Del(S_2) e quais novas arestas devem ser criadas tendo extremos em cada conjunto

- **Triangulação de Delaunay: algoritmo O(n log n) para triangulação de Delaunay**

  - Para gerar S1 e S2 pode-se ordenar o conjunto de pontos S em função das suas abscissas(em caso de empate, das ordenadas) e particionar o conjunto em duas metades, esquerda (E) e direita (D)
  - Deste modo, o problema reduz-se a remover arestas do tipo EE e DD e inserir novas arestas ED que sejam de Delaunay
  - Iremos a seguir apresentar em linhas gerais os algoritmos de Lee e Schachter para combinar Del(S1) e Del(S2) em tempo linear o que leva a um algoritmo O(n log n)

• Triangulação de Delaunay: algoritmo O(n log n) para triangulação de Delaunay

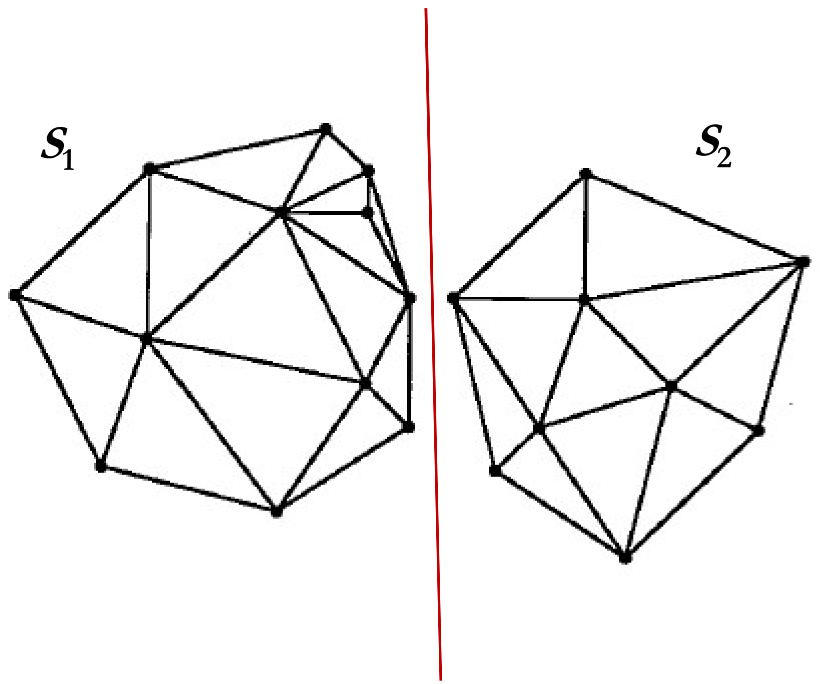
- Para gerar S1 e S2 pode-se ordenar o conjunto de pontos S em função das suas abscissas(em caso de empate, das ordenadas) e particionar o conjunto em duas metades, esquerda (E) e direita (D)

- Deste modo, o problema reduz-se a remover arestas do tipo EE e DD e inserir novas arestas ED que sejam de Delaunay

- Iremos a seguir apresentar em linhas gerais os algoritmos de Lee e Schachter para combinar Del(S1) e Del(S2) em tempo linear o que leva a um algoritmo O(n log n)

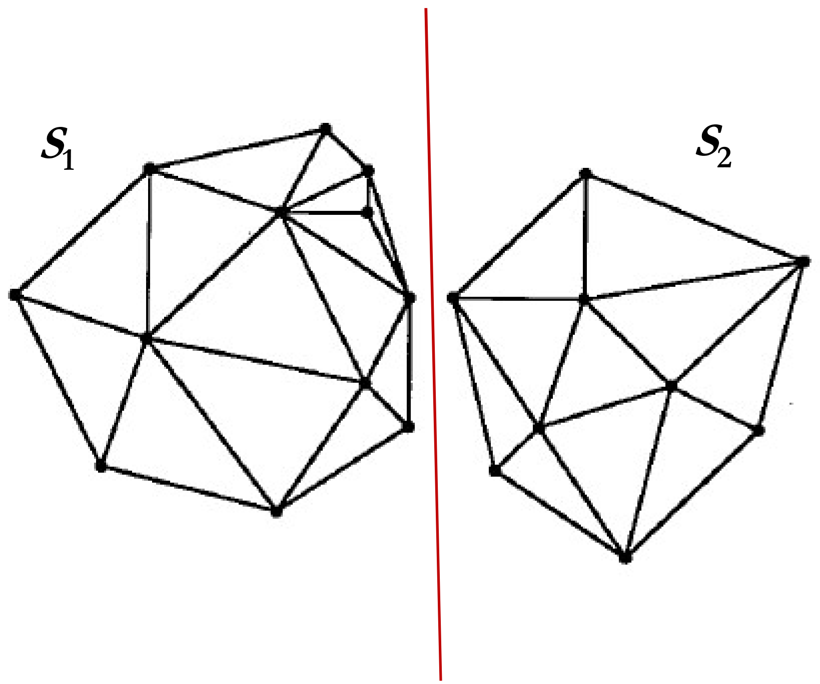
• Triangulação de Delaunay: algoritmo O(n log n) para triangulação de Delaunay

- O algoritmo parte da ideia de que existe uma reta que separa conv(S1) de conv(S2)



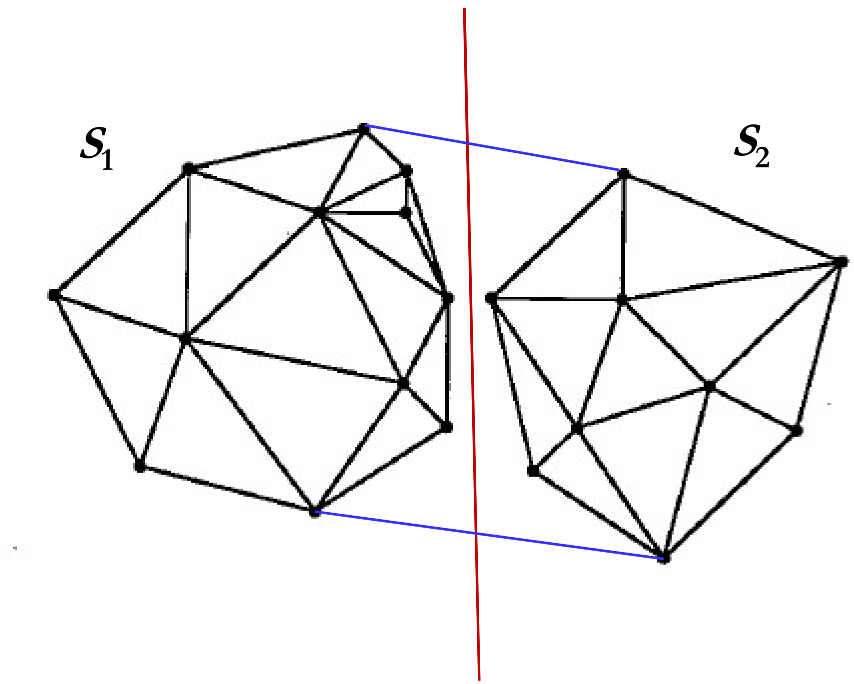
- **Triangulação de Delaunay: algoritmo O(n log n) para triangulação de Delaunay**

  - Tal reta corta as arestas em Del($S_1 \cup S_2$) cujas interseções definem uma ordem sobre tais arestas



• Triangulação de Delaunay: algoritmo O(n log n) para triangulação de Delaunay

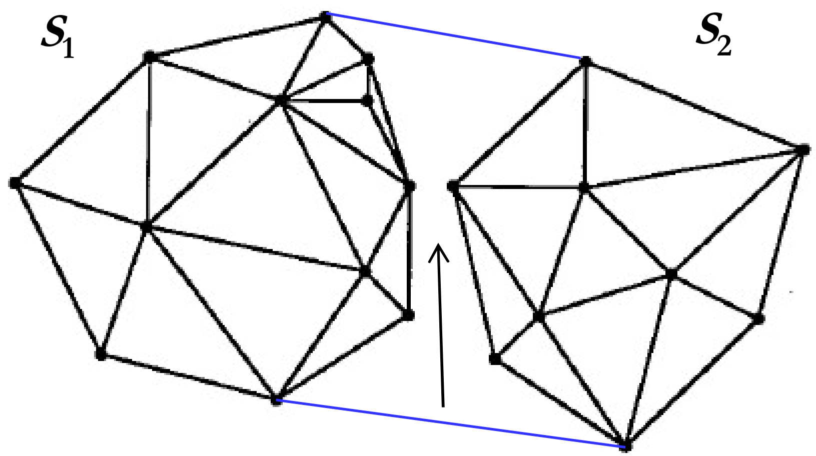
- As arestas inferior e superior definem tangentes tanto a conv(S_1) quanto a conv(S_2)



- Estas arestas por estarem na fronteira de conv($S_1 \cup S_2$) são de Delaunay

• Triangulação de Delaunay: algoritmo O(n log n) para triangulação de Delaunay

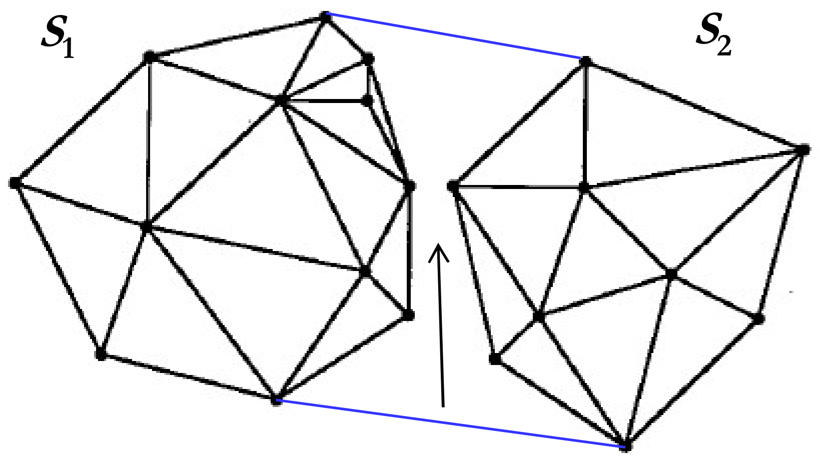
- O algoritmo parte então da tangente inferior (que pode ser obtida em tempo linear) e constrói as demais arestas de , até atingir a tangente superior



- As arestas de Del(S_1) e Del(S_2) que não são arestas de Del($S_1 \cup S_2$) são removidas durante o processo

• Triangulação de Delaunay: algoritmo O(n log n) para triangulação de Delaunay

- O algoritmo parte então da tangente inferior (que pode ser obtida em tempo linear) e constrói as demais arestas de Del($S_1 \cup S_2$) , até atingir a tangente superior

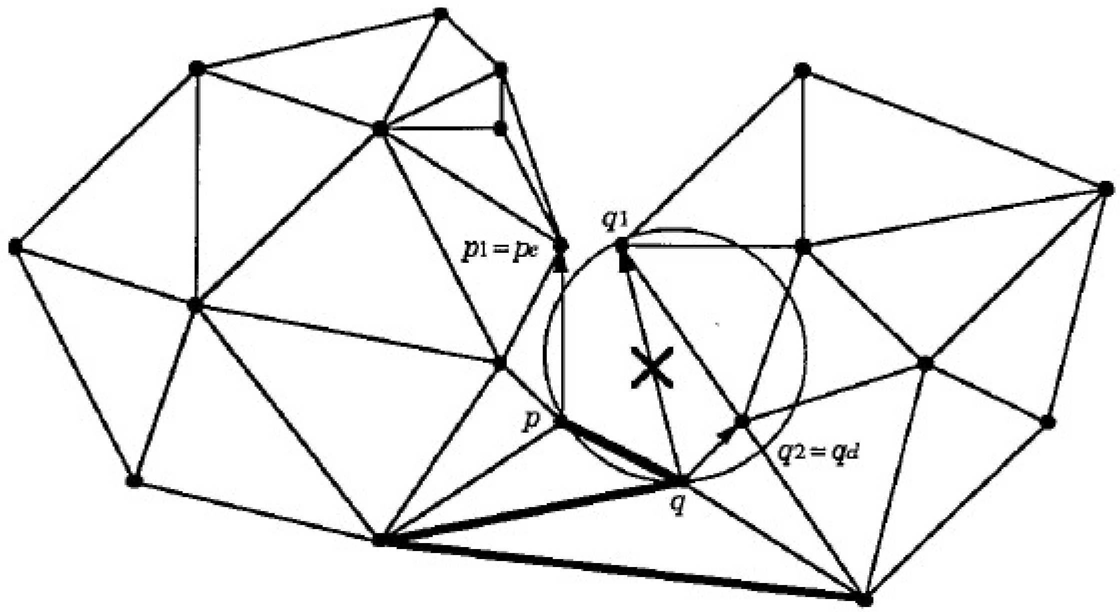


- As arestas de Del(S_1) e Del(S_2) que não são arestas de Del($S_1 \cup S_2$) são removidas durante o processo

• Triangulação de Delaunay: algoritmo O(n log n) para triangulação de Delaunay

- Suponha que em um dado passo construímos as arestas de Del($S_1 \cup S_2$) até uma aresta pq.

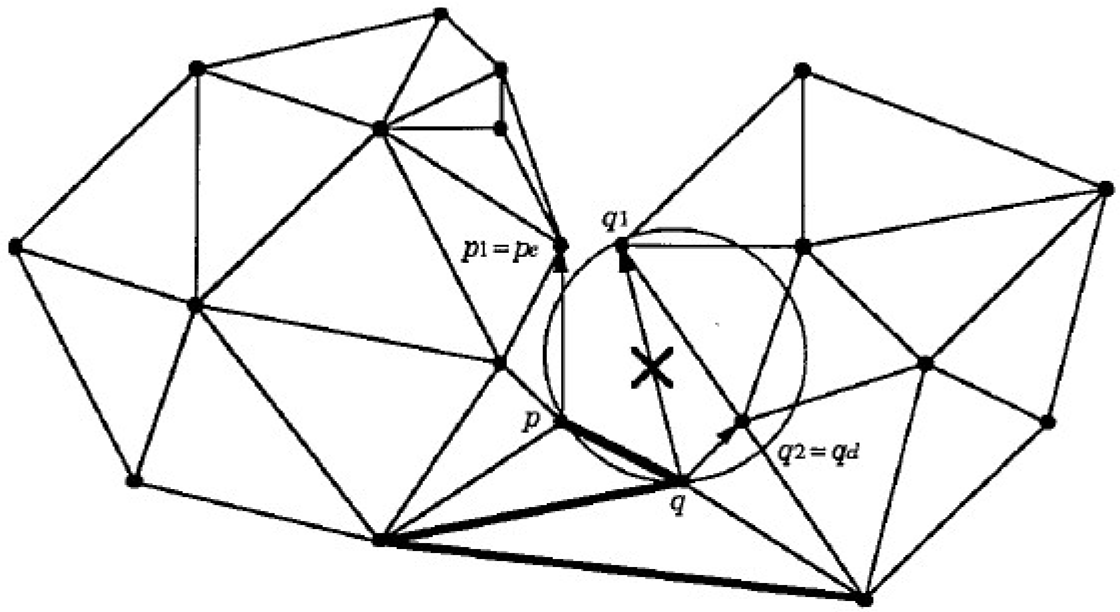
- A nova aresta de Delaunay de Del($S_1 \cup S_2$) terá um extremo ou em p ou em q



• Triangulações: Algoritmo O(n log n) para triangulação de Delaunay

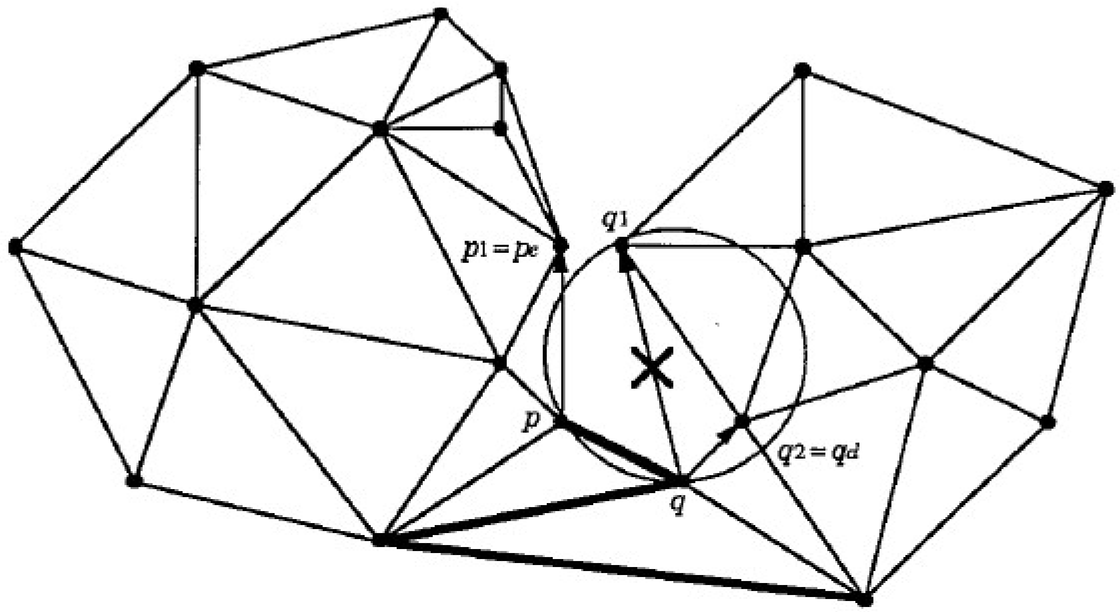
- Sejam $p_1,p_2,...,p_k$ os vértices incidentes a p no sentido anti-horário e $q_1,q_2,...,q_l$ os vértices incidentes a q no sentido horário

- Se pqp_1 forma um triângulo cujo circuncírculo contém p_2 então $pp1$ é uma aresta que viola o critério do círculo e deve ser removida



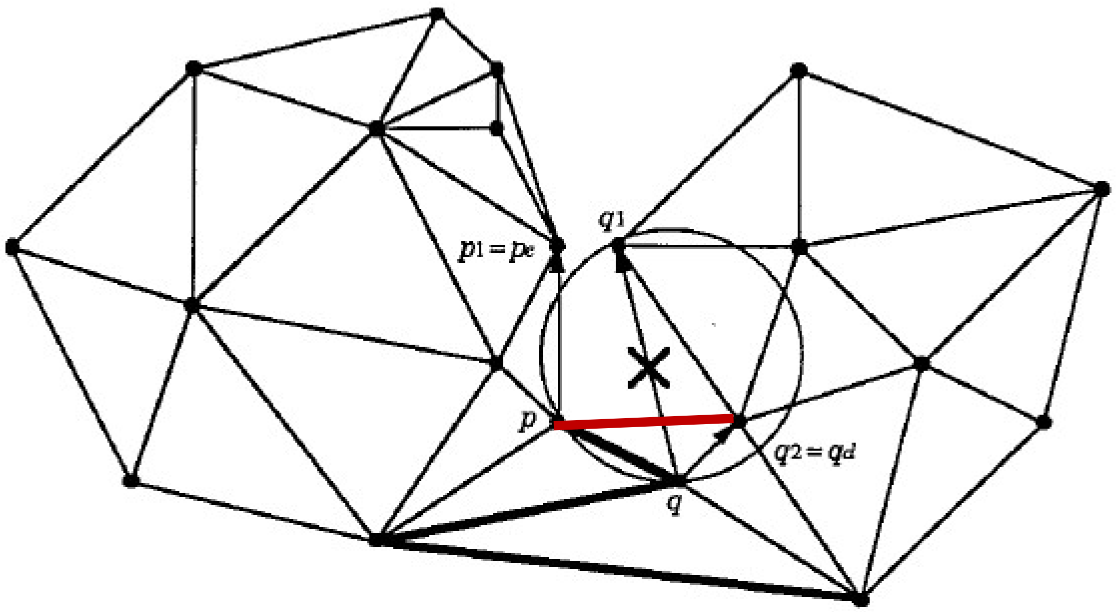
- **Triangulações: Algoritmo O(n log n) para triangulação de Delaunay**

  - Observe que este não é o caso, mas o circuncírculo de pqq_1 contém q_2 e qq_1 deve ser removida
  - Seja p_e o primeiro vértice de $p_1, p_2, \ldots, p_k$ que não viola o critério e q_d o seu análogo em $q_1, q_2, \ldots, q_l$



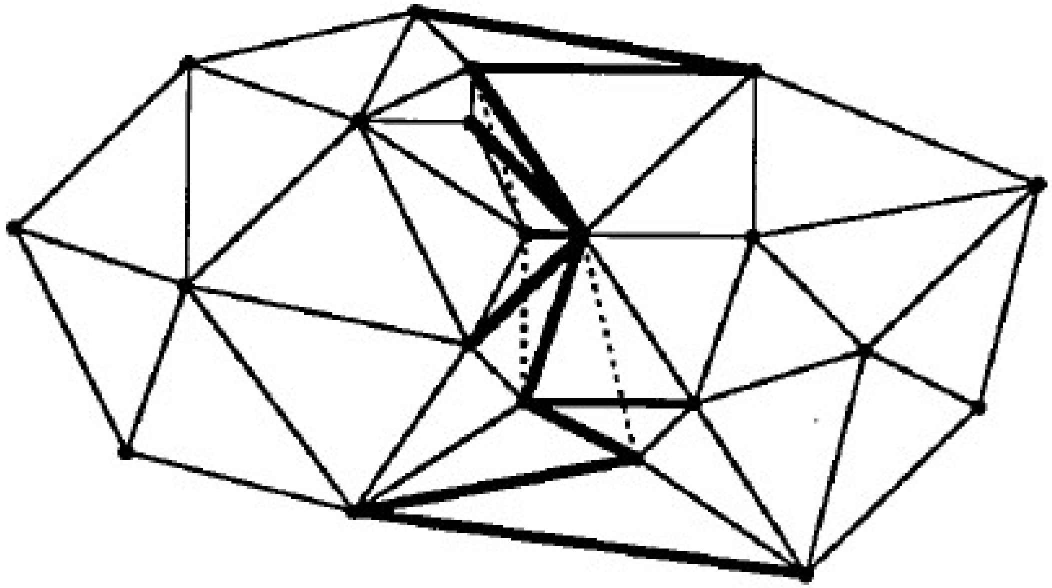
• Triangulação de Delaunay: algoritmo O(n log n) para triangulação de Delaunay

- Dentre p_e e q_d escolhemos o ponto que forma o maior ângulo com pq
- Como pq_dq forma o maior ângulo, acrescentamos pq_d a solução



- **Triangulação de Delaunay: algoritmo O(n log n) para triangulação de Delaunay**

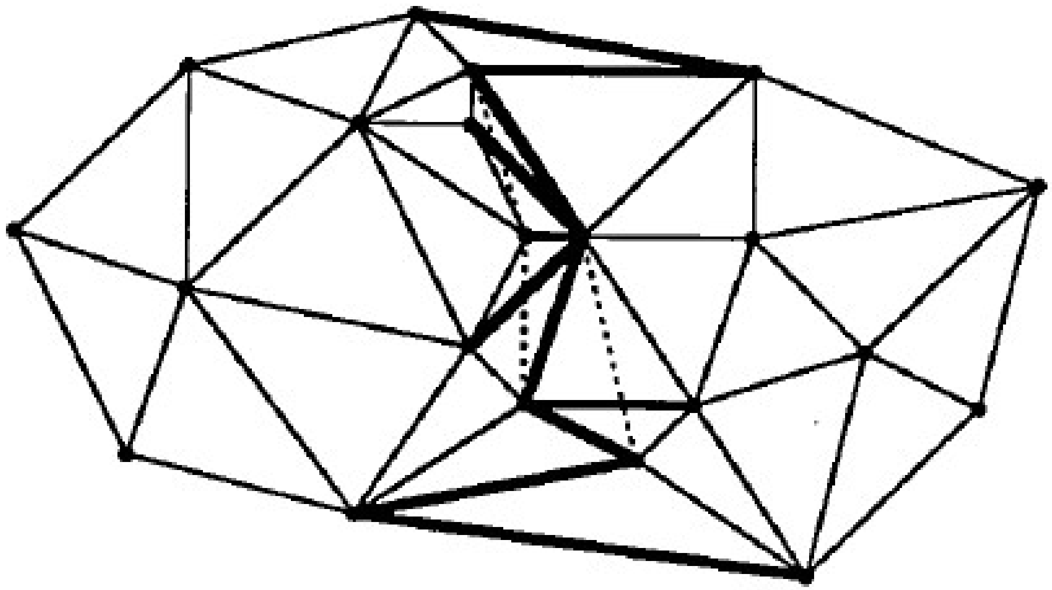
  - O algoritmo prossegue até encontrarmos a aresta tangente superior



• Triangulação de Delaunay: algoritmo O(n log n) para triangulação de Delaunay

- Observe que para alcançar a complexidade O(nlogn) precisamos encontrar as arestas incidente a cada vértice em tempo constante

- Por esta razão é fundamental o uso de uma estrutura topológica como a Half-edge ou a Winged-edge que permitem que tal consulta seja feita eficientemente



• Triangulação de Delaunay: algoritmo O(n log n) para triangulação de Delaunay

- Para maiores detalhes sobre o algoritmo ver:

  Leonidas Guibas and Jorge Stolfi. 1985. Primitives for the manipulation of general subdivisions and the computation of Voronoi. *ACM Trans. Graph.* 4, 2 (April 1985), 74-123. DOI=10.1145/282918.282923 http://doi.acm.org/10.1145/282918.28292

- O artigo de Guibas e Stolfi também apresenta a estrutura de dados topológica Quad-edge que permite computar simultaneamente os diagramas de Delaunay e Voronoi (assunto da próxima aula)

Triangulações: Referências

- Introdução:

P. C. P. Carvalho e L. H. de Figueiredo,
Introdução à Geometria Computational, 18° Colóquio Brasileiro de Matemática,
IMPA, 1991.

- Demais slides incluindo as imagens (exceto as feitas pelo expositor):

Satyan L. Devadoss, Joseph O'Rourke,
Discrete and Computational Geometry, Princeton University Press, 2011.