

Geometria Computacional

Professor:

Anselmo Montenegro
www.ic.uff.br/~anselmo

Conteúdo (aula 11):

- Diagramas de Voronoi

Roteiro

- Introdução
- Propriedades
- Algoritmos para geração do Diagrama de Voronoi
- Algoritmo incremental
- Dualidade Voronoi/Delaunay
- Algoritmo incremental para Delaunay usando dualidade

- **Diagramas de Voronoi: introdução**

- Segundo Devados e O'Rourke, para um conjunto de pontos S :
 - O fecho convexo captura a fronteira externa (convexa) de S
 - Triangulações particionam o interior de S

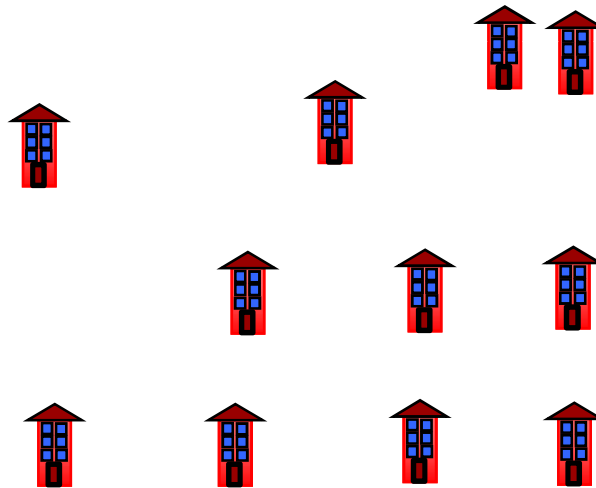
- Diagramas de Voronoi: introdução

- Nesta aula iremos estudar pontos que não estão em S
- Especificamente, estudaremos que ponto em S está mais próximo de algum ponto arbitrário p não pertencente a S
- Em outras palavras focaremos na noção de vizinhos mais próximos

- **Diagramas de Voronoi: introdução**
- A noção de vizinhos mais próximos leva a rica geometria dos *Diagramas de Voronoi*
- Um dos grandes desafios é como **construir computacionalmente** *Diagramas de Voronoi*
- Nesta aula, compreenderemos a **relação de dualidade** entre os *Diagramas de Voronoi* e as *Triangulações de Delaunay*
- Finalmente, mostraremos a **conexão entre ambas estruturas e os Fechos Convexos em 3D**

- Diagramas de Voronoi: introdução

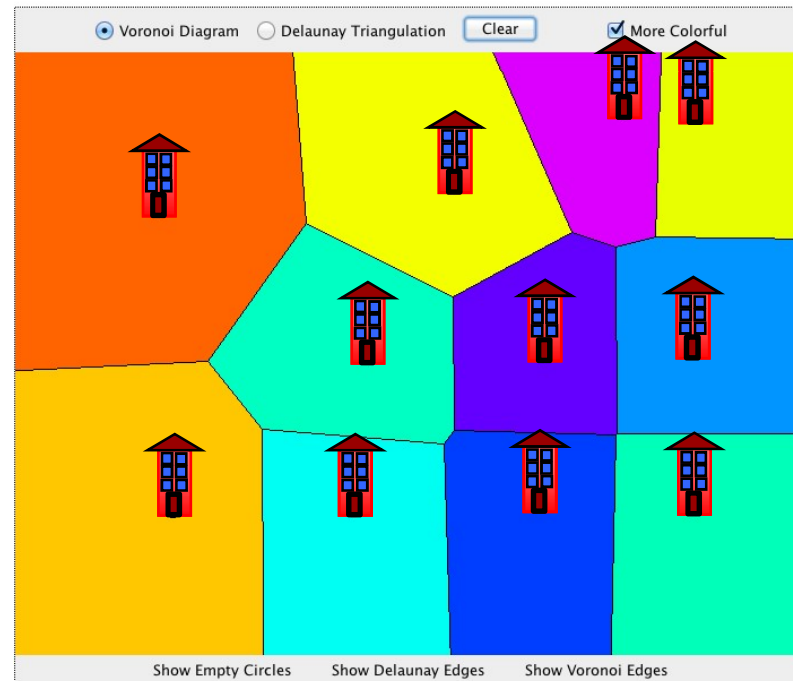
- Considere o seguinte problema: sejam n postos de correio que atendem uma determinada localidade. Determinar o posto mais próximo capaz de atender um determinado local identificado por um ponto q no plano



- Diagramas de Voronoi: introdução

- Considere o seguinte problema: sejam n postos de correio que atendem uma determinada localidade. Determinar o posto mais próximo capaz de atender um determinado local da por um ponto no plano

Voronoi Diagram / Delaunay Triangulation



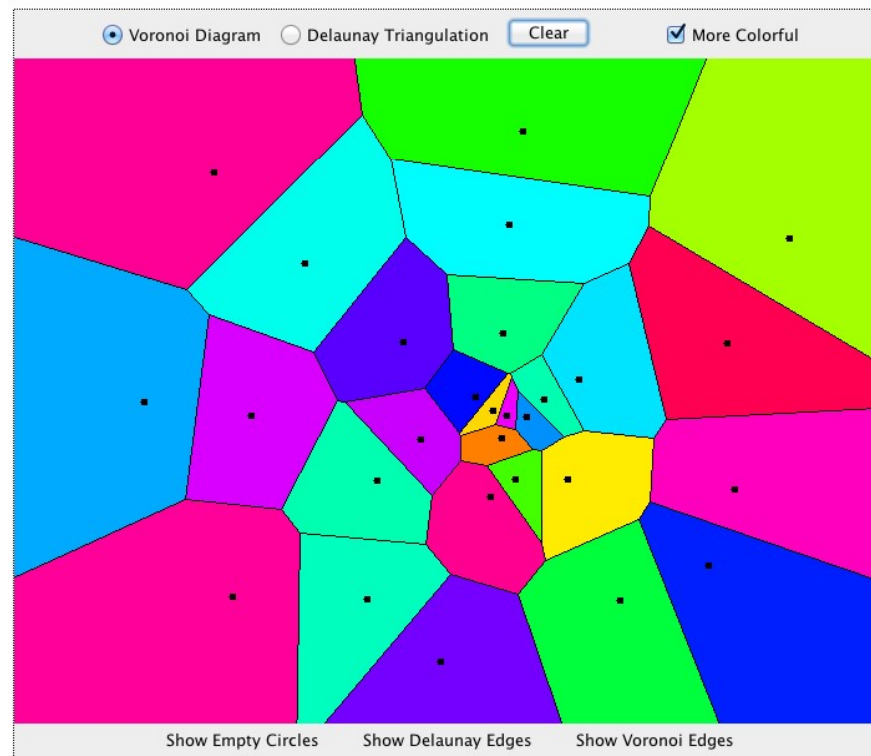
- Diagramas de Voronoi: introdução

- Problema 2: considere um conjunto de amostras de rocha de uma parte da crosta terrestre. Determinar a informação do tipo de rocha para os pontos não conhecidos
- Uma das características fundamentais neste caso é a de que uma **interpolação simples não resolve o problema**
- O que seria uma rocha de tipo = $0.5 \text{ tipo A} + 0.3 \text{ tipo B} + 0.2 \text{ tipo C}$?
- **Não faz sentido interpolar uma informação categórica**

- Diagramas de Voronoi: introdução

- Construindo um diagrama de vizinhanças para cada tipo de rocha, podemos gerar uma informação útil para nossos propósitos

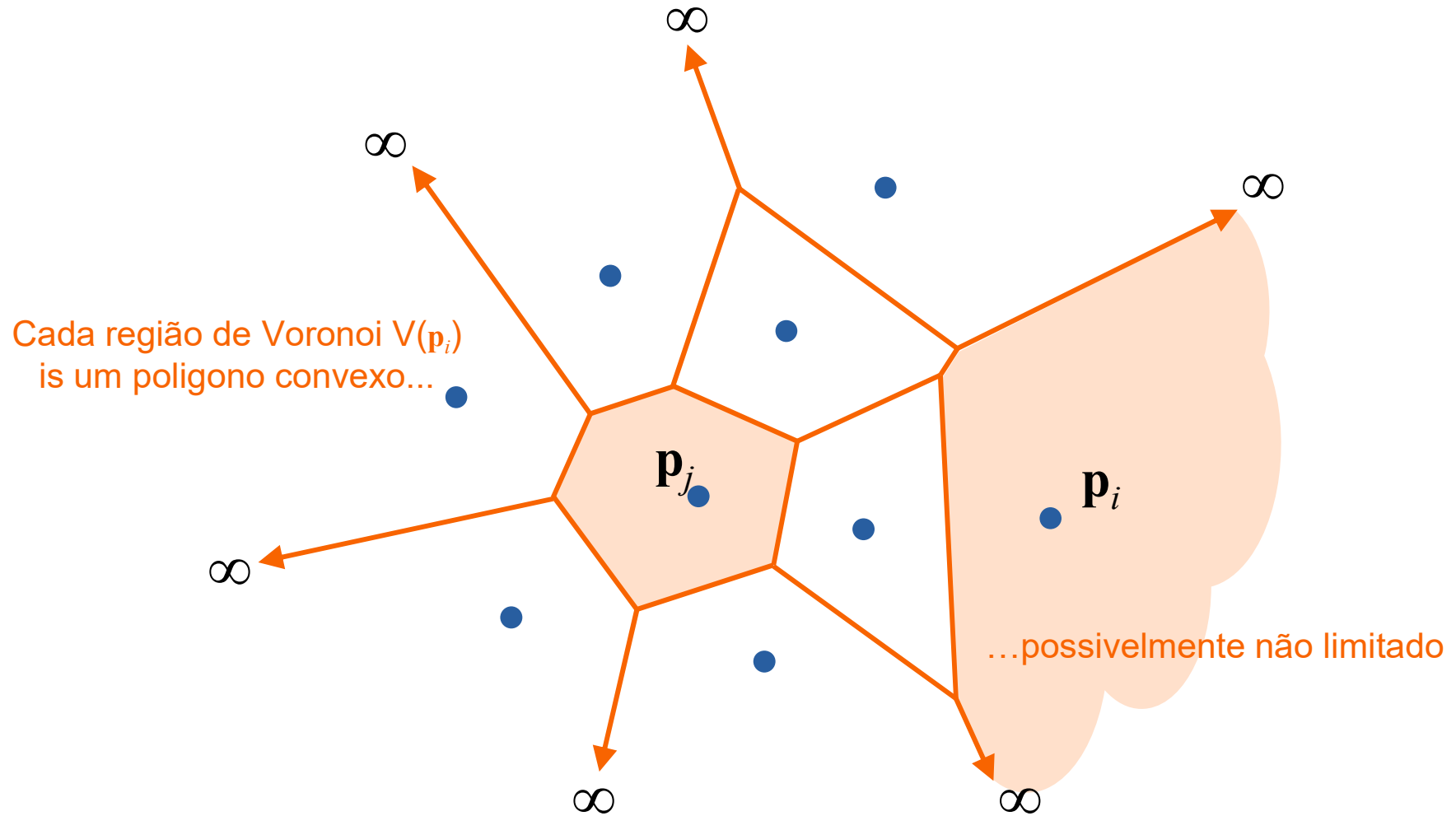
Voronoi Diagram / Delaunay Triangulation



- **Diagramas de Voronoi: introdução**

- Dado um conjunto de pontos S no plano, a subdivisão do plano infinito em regiões R_i , tais que cada região contém os pontos do plano mais próximos de um ponto p de S do que qualquer outro ponto q de S , determina o que chamamos diagrama de Voronoi de S
- Cada região R_i é denominada uma região de *Voronoi*

- Diagramas de Voronoi: introdução



- **Diagramas de Voronoi: introdução**

- *Diagramas de Voronoi* possuem aplicações em:
 - Reconhecimento de padrões
 - Cristalografia
 - Robótica (planejamento de movimentos)
 - Cartografia
 - Geologia, etc.

- Diagramas de Voronoi: introdução

- Definição: Uma **região de Voronoi** associada a um sítio p em um conjunto de pontos do plano em S é definida como

$$Vor(p) = \{x \in R^2 \mid \|x - p\| \leq \|x - q\| \quad \forall q \in S\}$$

- onde $\|p - q\|$ representa a distância Euclidiana entre pontos p e q no plano
- Que propriedades podemos afirmar sobre regiões de Voronoi?

- Diagramas de Voronoi: introdução

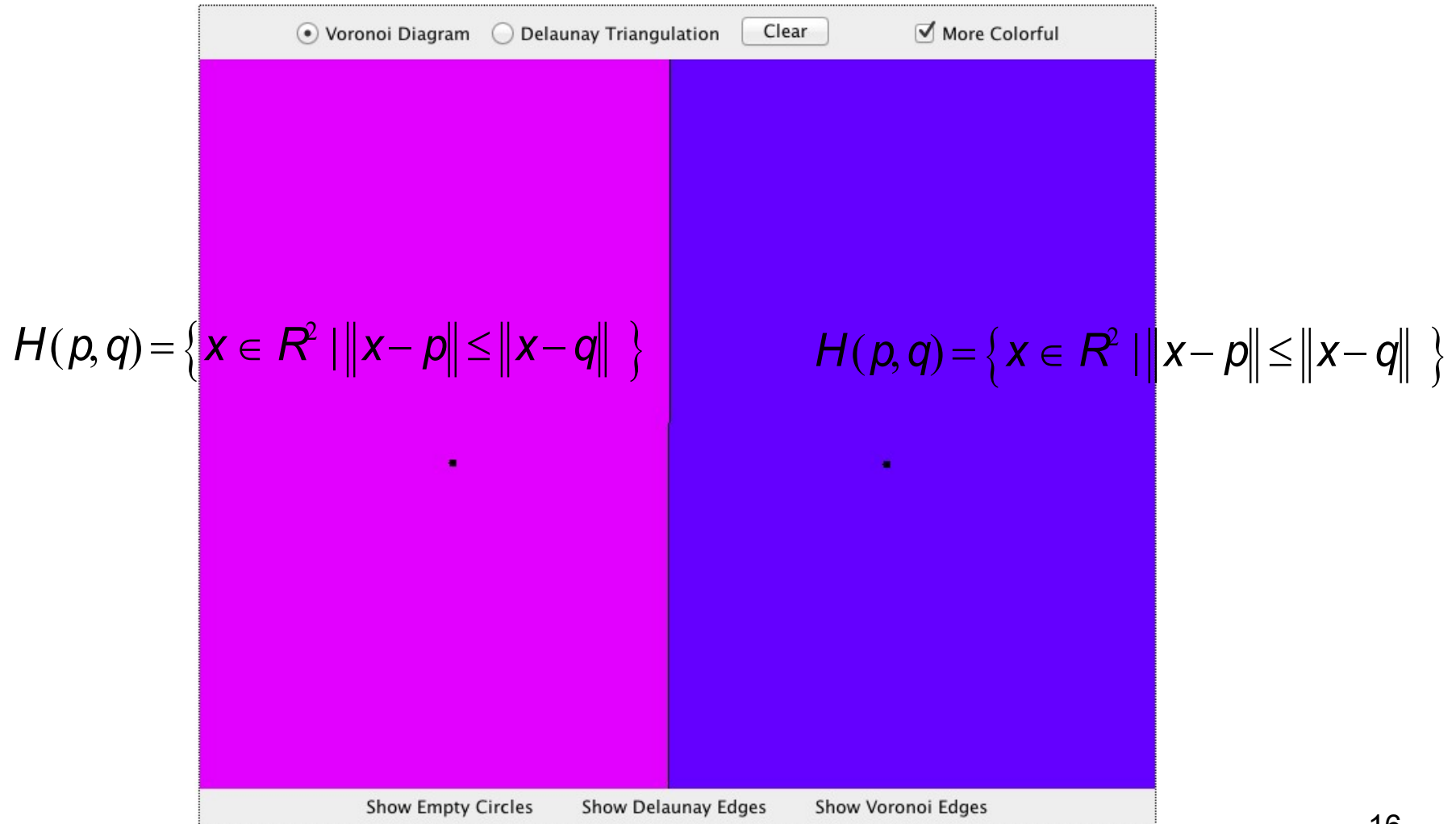
- Compreende-se que $Vor(p)$ é o conjunto de pontos que está tão perto de p quanto qualquer outro ponto em S
- Pontos que estão na fronteira de duas regiões não tem um único sítio mais próximo
- O *Diagrama de Voronoi* $Vor(S)$ é **uma coleção de tais fronteiras**, isto é, o conjunto de pontos que tem mais de um vizinho mais próximo
- $Vor(S)$ é composto de ***vértices de Voronoi*** e ***arestas de Voronoi***

- **Diagramas de Voronoi: introdução**

- Considere a situação em que existem apenas dois sítios p e q em S
- O *Diagrama de Voronoi* é determinado pela mediatriz (bisector) do segmento pq
- A mediatriz corta o plano em duas regiões:
 - O semi-plano que contém p : $H(p, q) = \{ x \in R^2 \mid \|x - p\| \leq \|x - q\| \}$
 - O semi-plano que contém q : $H(q, p) = \{ x \in R^2 \mid \|x - q\| \leq \|x - p\| \}$

- Diagramas de Voronoi: introdução

Voronoi Diagram / Delaunay Triangulation



- Diagramas de Voronoi: introdução

- Teorema 11.1 – A região de Voronoi $Vor(p)$ é determinada pela interseção de todos os semiplanos $H(p,q)$ onde q é qualquer outro sítio em S diferente de p

- **Diagramas de Voronoi: introdução**

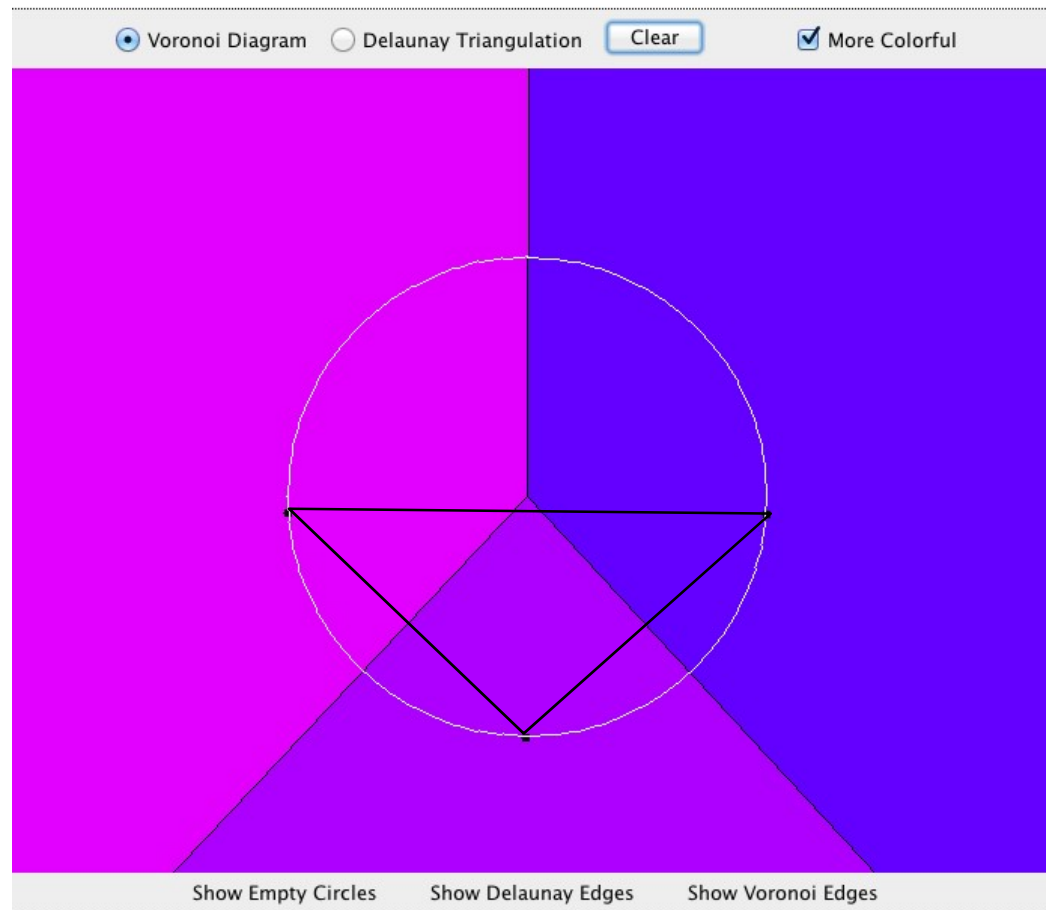
- Teorema 11.2 – A interseção de qualquer (não necessariamente finito) conjunto de objetos convexos é convexa
- Prova. Seja $\{X_i \mid i \in I\}$ uma coleção arbitrária de conjuntos convexos e seja X a interseção deles. Considere dois pontos arbitrários p e q em X . Pela definição de interseção p e q pertencem a cada X_i . Como cada X_i é convexo, o segmento completo pq está em todo conjunto X_i , logo está totalmente contido em X . Consequentemente, X é convexo
- Como **todos os semiplanos são regiões convexas** segue o corolário:
- Corolário 11.1. **Todas as regiões de Voronoi são convexas**

- **Diagramas de Voronoi: vértices**

- *Se S contém vários sítios, então é necessário comparar as distâncias entre p e todos os demais sítios de S*
- *Para uma configuração de $Vor(S)$ com três sítios p , q e r , o diagrama é formado por três mediatrizes dos segmentos pq , pr e qr*
- *Pelo Teorema de Euclides (Elementos, Livro IV, Proposição 5) as mediatrizes dos lados de um triângulo sempre se encontram em um único ponto que é o centro do círculo que o circunscreve*
- *Tal ponto é um **vértice de Voronoi***

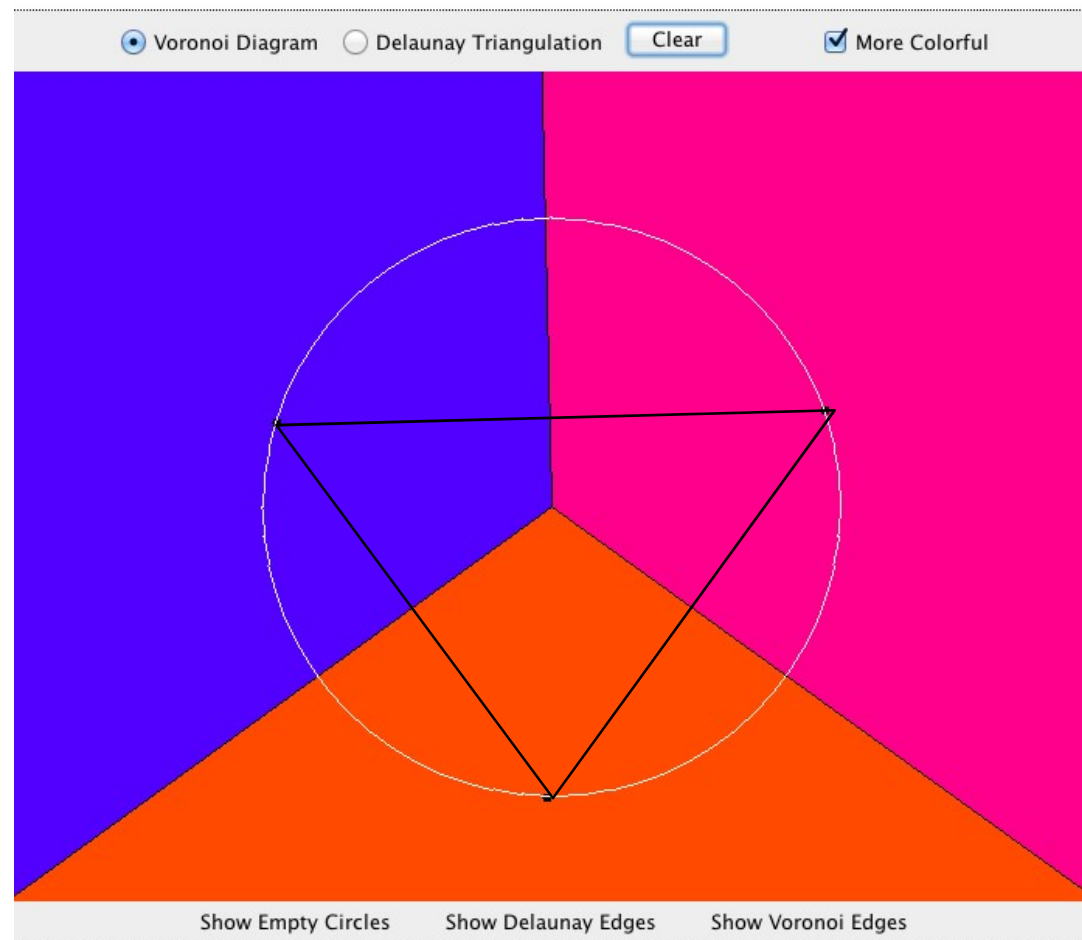
- Diagramas de Voronoi: vértices com $n=3$

Voronoi Diagram / Delaunay Triangulation



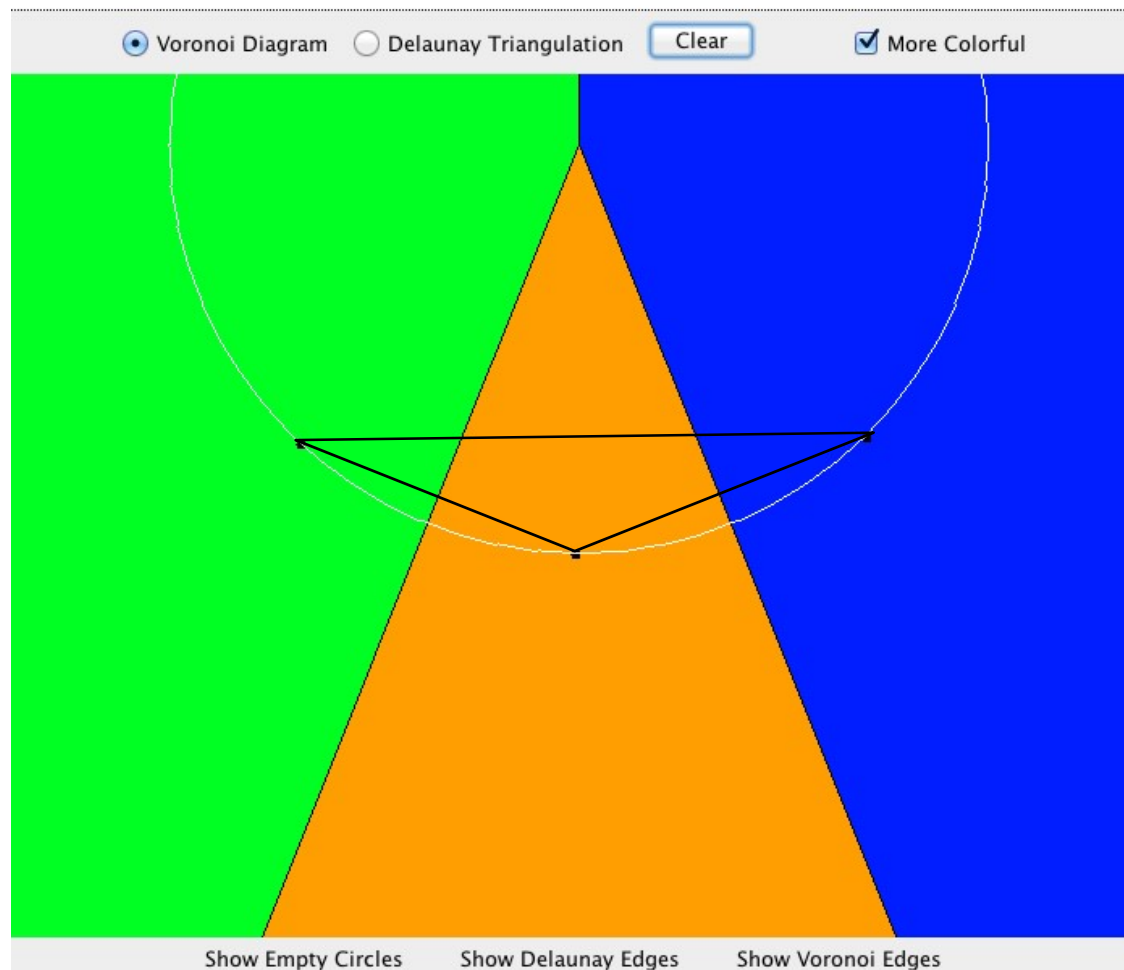
- Diagramas de Voronoi: vértices com $n=3$

Voronoi Diagram / Delaunay Triangulation



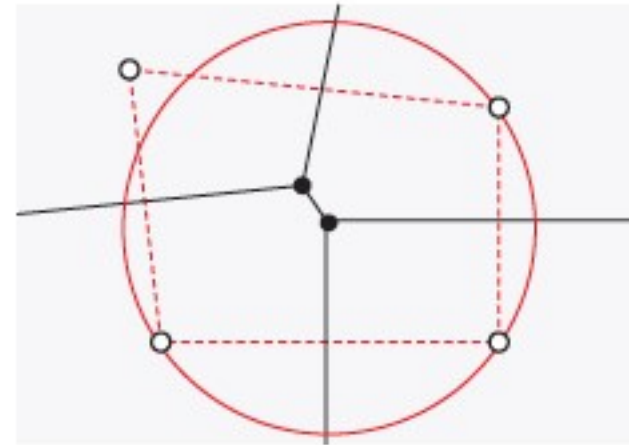
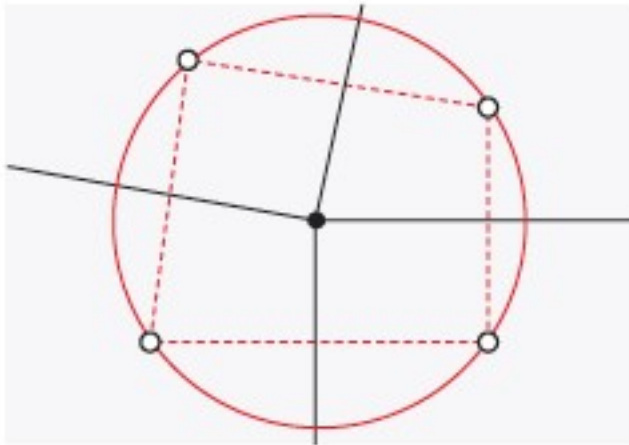
- Diagramas de Voronoi: vértices com $n=3$

Voronoi Diagram / Delaunay Triangulation



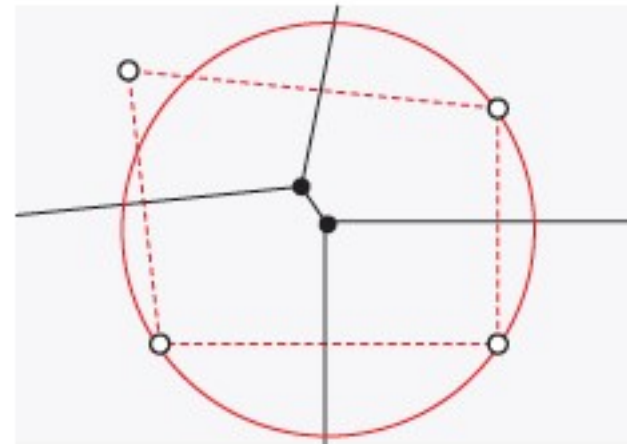
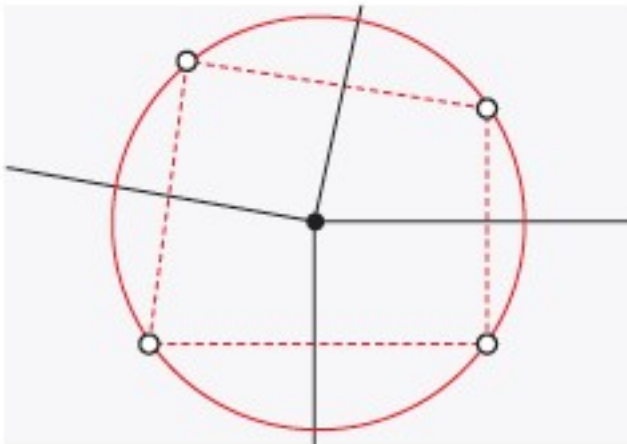
- Diagramas de Voronoi: vértices (com $n > 3$)

- O que ocorre quando S contém mais de 3 vértices?



- Diagramas de Voronoi: vértices (com $n > 3$)

- Podemos observar que quando 4 vértices estão sobre o mesmo circuncírculo então o Diagrama de Voronoi possui apenas um vértice de grau 4
- Se movermos um dos pontos, alcançando uma configuração geral (não há 4 vértices co-circulares) verificamos que o vértice anterior se subdivide em 2 vértices de grau 3



- Diagramas de Voronoi: vértices (com $n > 3$)

- Conclui-se que a interseção de mediatrizes determinam vértices de Voronoi
- Porém nem todas as interseções determinam vértices de Voronoi
- Como determinar que pontos do plano determinam vértices de Voronoi?

- Diagramas de Voronoi: vértices (com $n > 3$)

- Teorema 11.3. Seja S um conjunto de pontos com um diagrama de Voronoi $\text{Vor}(S)$. Um ponto v é um vértice de Voronoi se e somente se existe um círculo centrado em v com 3 ou mais sítios na sua fronteira e nenhum em seu interior
- Prova. (\Rightarrow) Se v é um vértice de Voronoi, então deve ser incidente a 3 regiões de Voronoi: $\text{Vor}(p)$, $\text{Vor}(q)$, $\text{Vor}(r)$. Isto significa que v deve ser equidistante de 3 sítios p, q e r e logo existe um círculo centrado em v com tais sítios na sua borda. Não pode haver outro sítio dentro do círculo caso contrário $\text{Vor}(p)$, $\text{Vor}(q)$, $\text{Vor}(r)$ não se encontrariam em v . (\Leftarrow) Considere a existência de um círculo centrado em v , com ao menos três sítios p, q e r na sua borda. Sendo vazio, v deve ser a fronteira de três regiões $\text{Vor}(p)$, $\text{Vor}(q)$, $\text{Vor}(r)$, logo é um vértice de Voronoi

- Diagramas de Voronoi: arestas de Voronoi

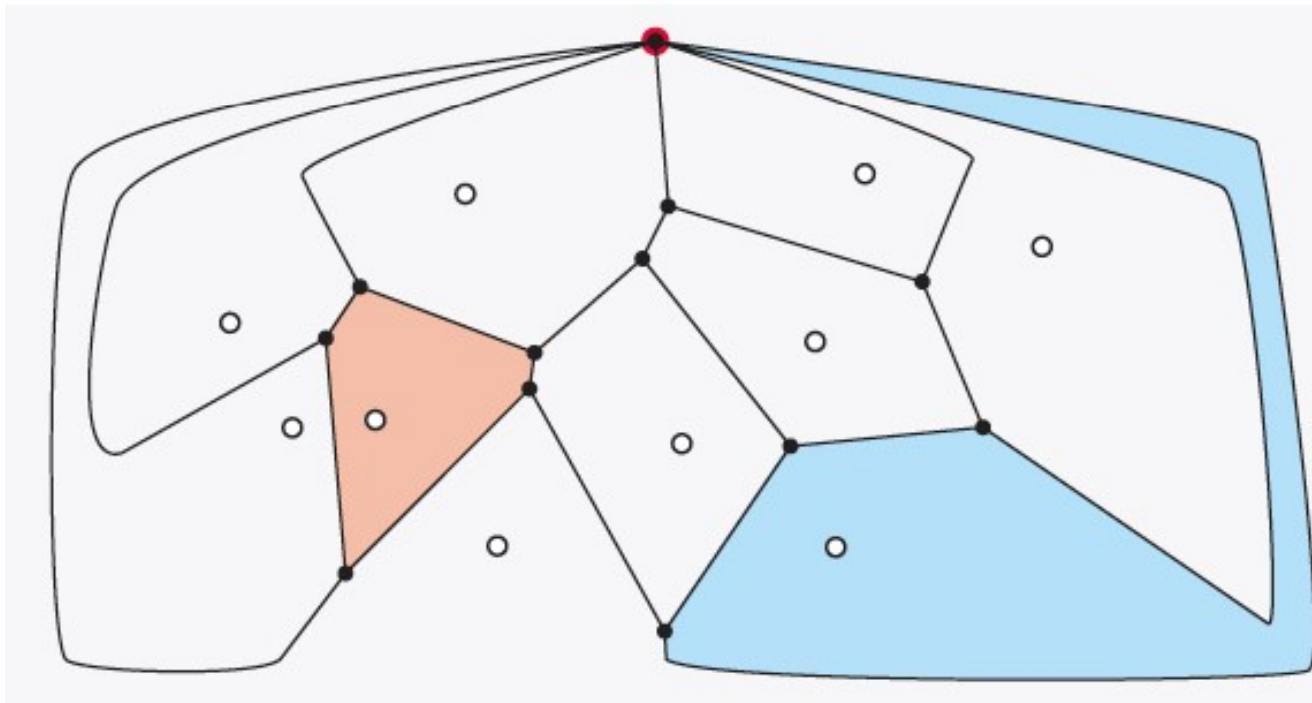
- Teorema 11.4. Seja S um conjunto de pontos com um diagrama de Voronoi $\text{Vor}(S)$ e seja e um subconjunto conexo da mediatriz entre sítios p e q de S . Então, e é uma aresta de Voronoi de $\text{Vor}(S)$ se e somente se para todo ponto x em e o círculo centrado em x através de p e q não contém nenhum outro sítio de S no seu interior ou na sua borda.

- Diagramas de Voronoi: arestas de Voronoi

- Prova. (\Rightarrow) Suponha que x é um ponto na aresta de Voronoi entre p e q . Se o círculo centrado em x com p e q na sua fronteira contem um outro sítio r , então x também estaria em $\text{Vor}(r)$ o que é uma contradição. Logo o círculo não pode conter outros sítios além de p e q
- (\Leftarrow) Assuma que existe um círculo vazio passando somente por p e q com x no seu centro. Então $\|x-p\| = \|x-q\|$ e $\|x-p\| \leq \|x-r\|$ para todo sítio r em S . Logo x deve pertencer a alguma região de $\text{Vor}(S)$ como uma aresta ou um vértice. Pelo teorema 11.3, x não pode ser um vértice (o número de sítios teria que ser maior ou igual 3), logo é uma aresta

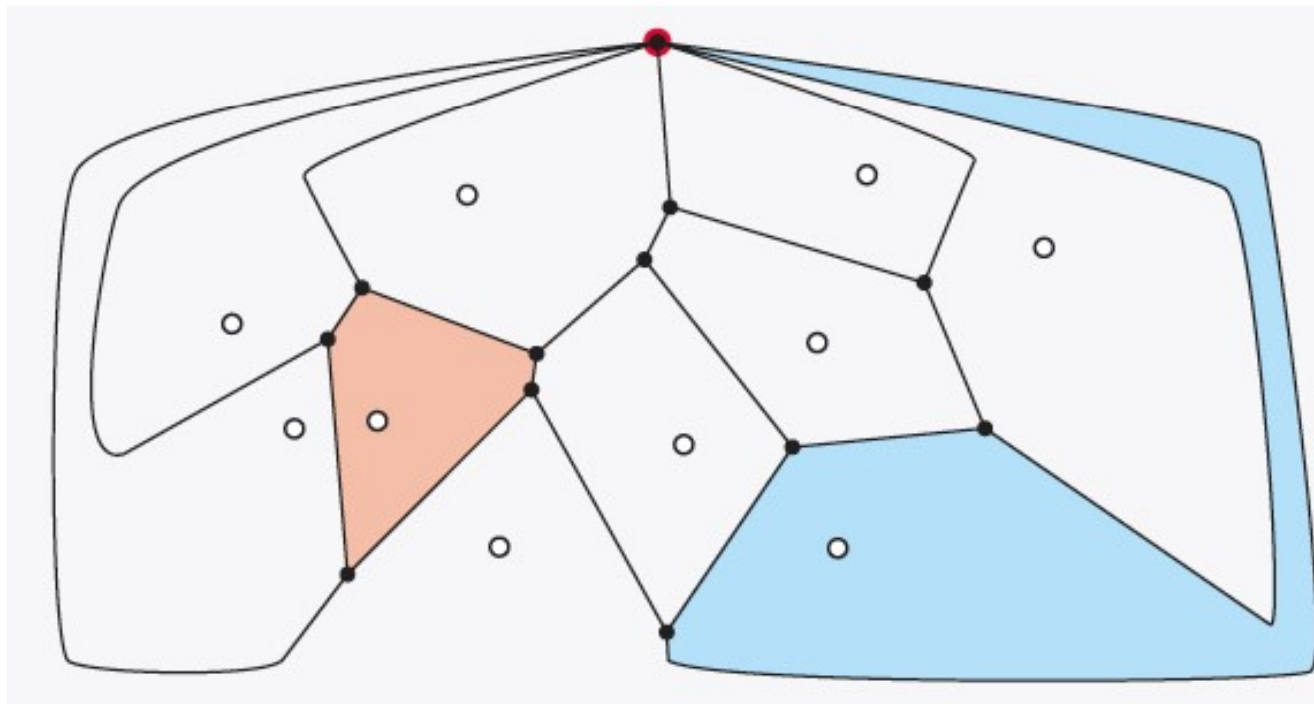
- Diagramas de Voronoi: combinatória dos diagramas de Voronoi

- Teorema 11.5. Seja S um conjunto de pontos com $n \geq 3$ sítios. Então $\text{Vor}(S)$ tem no máximo $2n-5$ vértices de Voronoi e $3n-6$ arestas de Voronoi



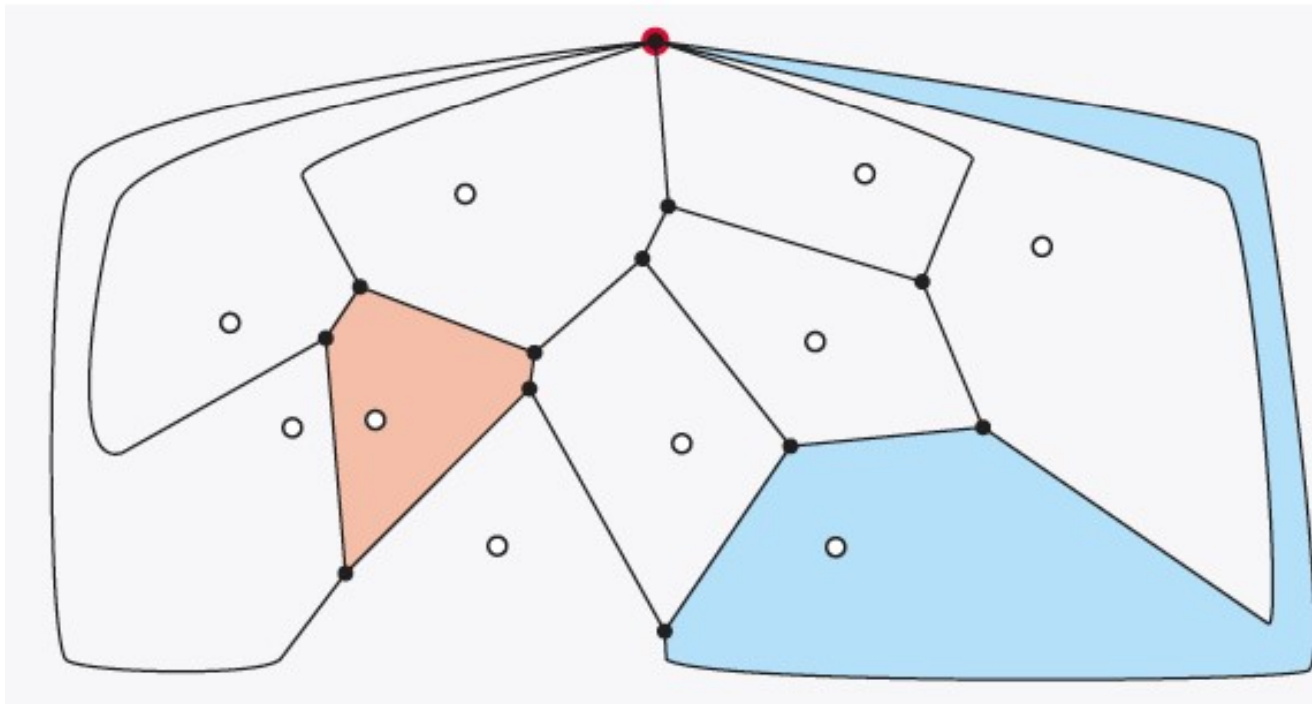
- Diagramas de Voronoi: combinatória dos diagramas de Voronoi

- Prova. Consideraremos o **grafo planar** G associado ao Diagrama de Voronoi $\text{Vor}(S)$ criado ao **adicionar um vértice extra** ve e torcendo e juntando as arestas das regiões ilimitadas em direção a ve



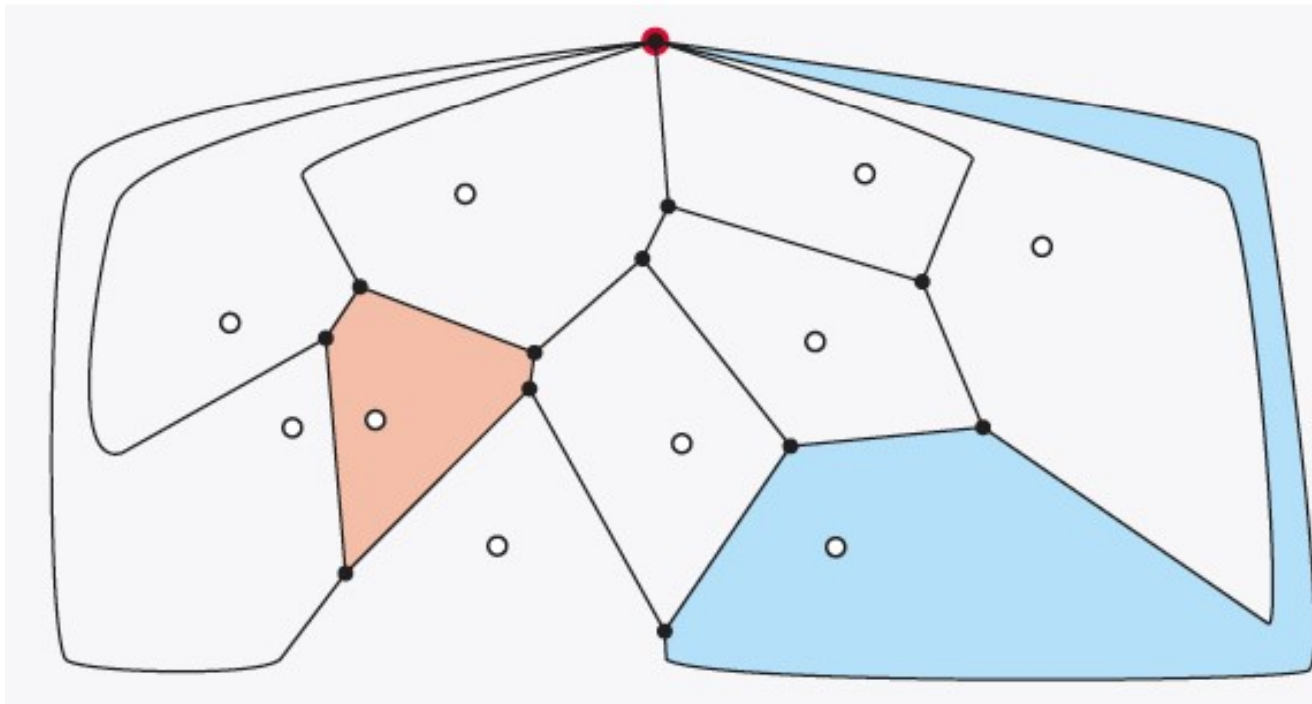
- Diagramas de Voronoi: combinatória dos diagramas de Voronoi

- Prova (continuação). Existe uma relação um-para-um entre as regiões de G e os sítios de S . Logo **o número de nós de G é igual ao número de sítios em S**



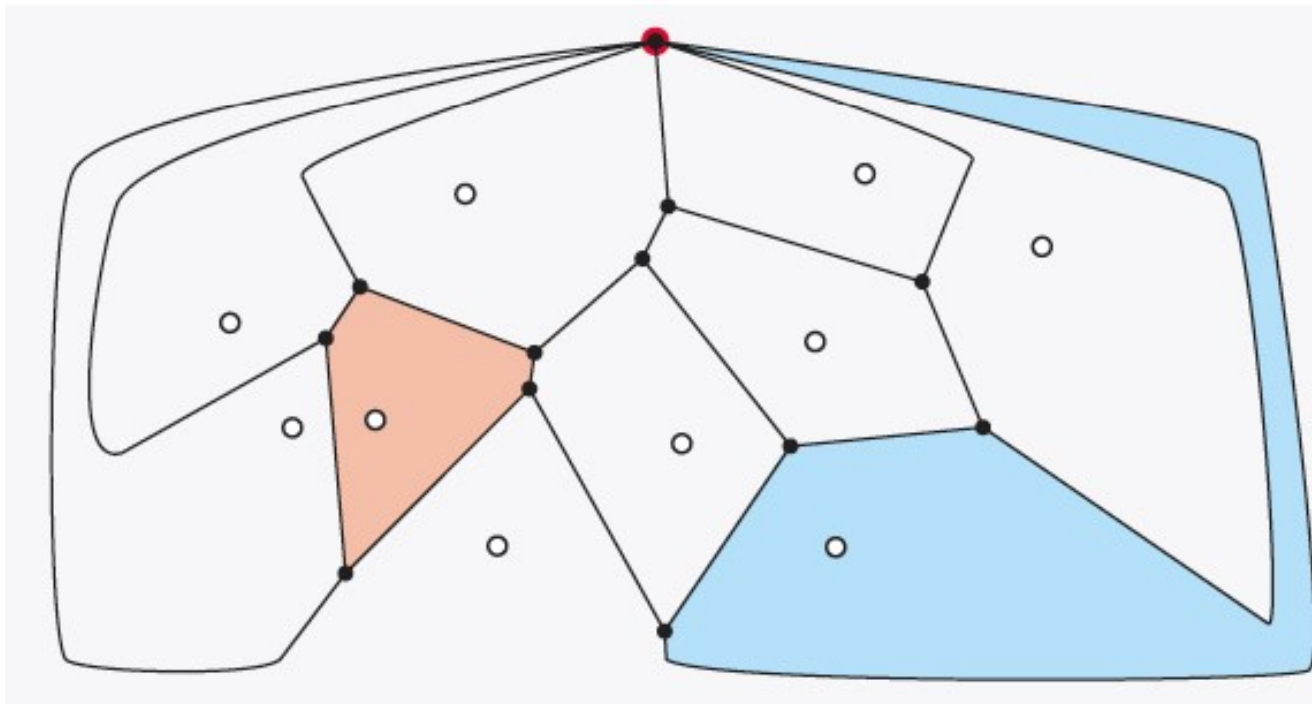
- Diagramas de Voronoi: combinatória dos diagramas de Voronoi

- Prova (continuação). Observemos, entretanto, que $\text{Vor}(S)$ tem n vértices e G tem $n+1$ vértices. Ambos tem o mesmo número de arestas e



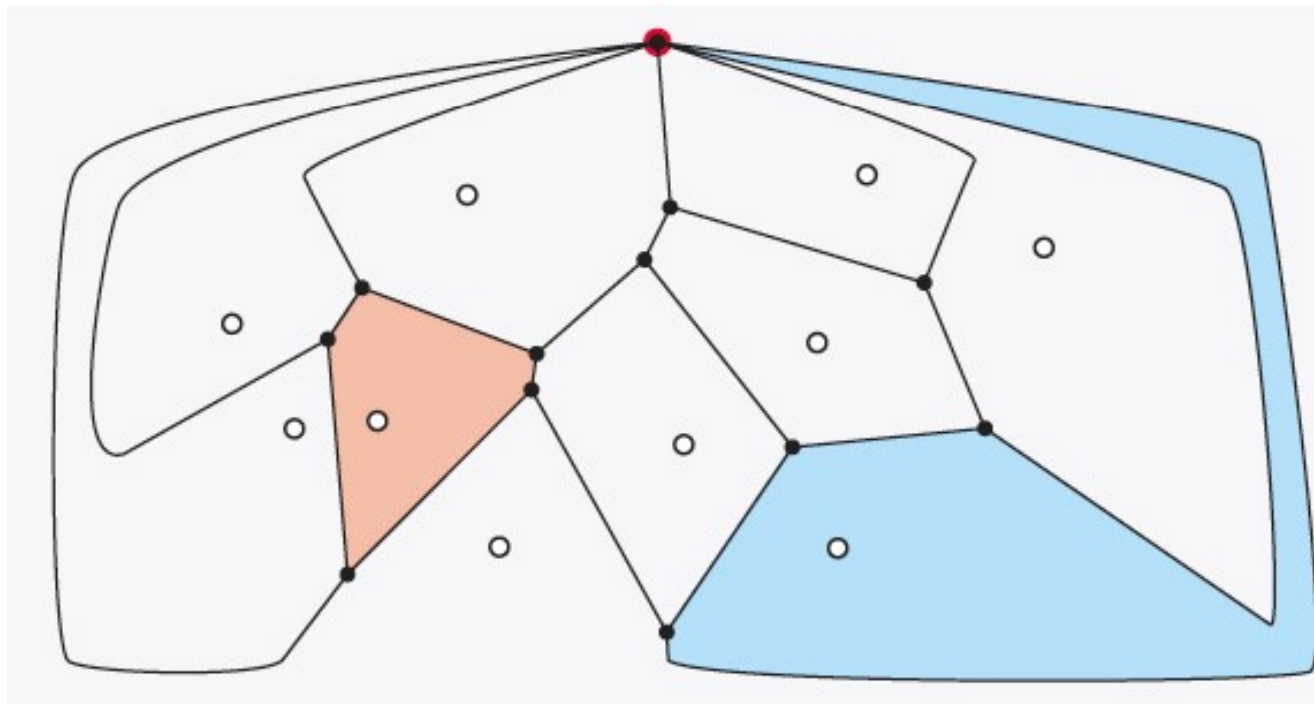
- Diagramas de Voronoi: combinatória dos diagramas de Voronoi

• Prova (continuação). Usando a fórmula de Euler afirmamos que $v+1-e+n = 2$. Além disso, sabemos que a soma dos graus dos vértices de G contam as arestas duas vezes e cada vértice de G tem grau pelo menos igual a 3



- Diagramas de Voronoi: combinatória dos diagramas de Voronoi

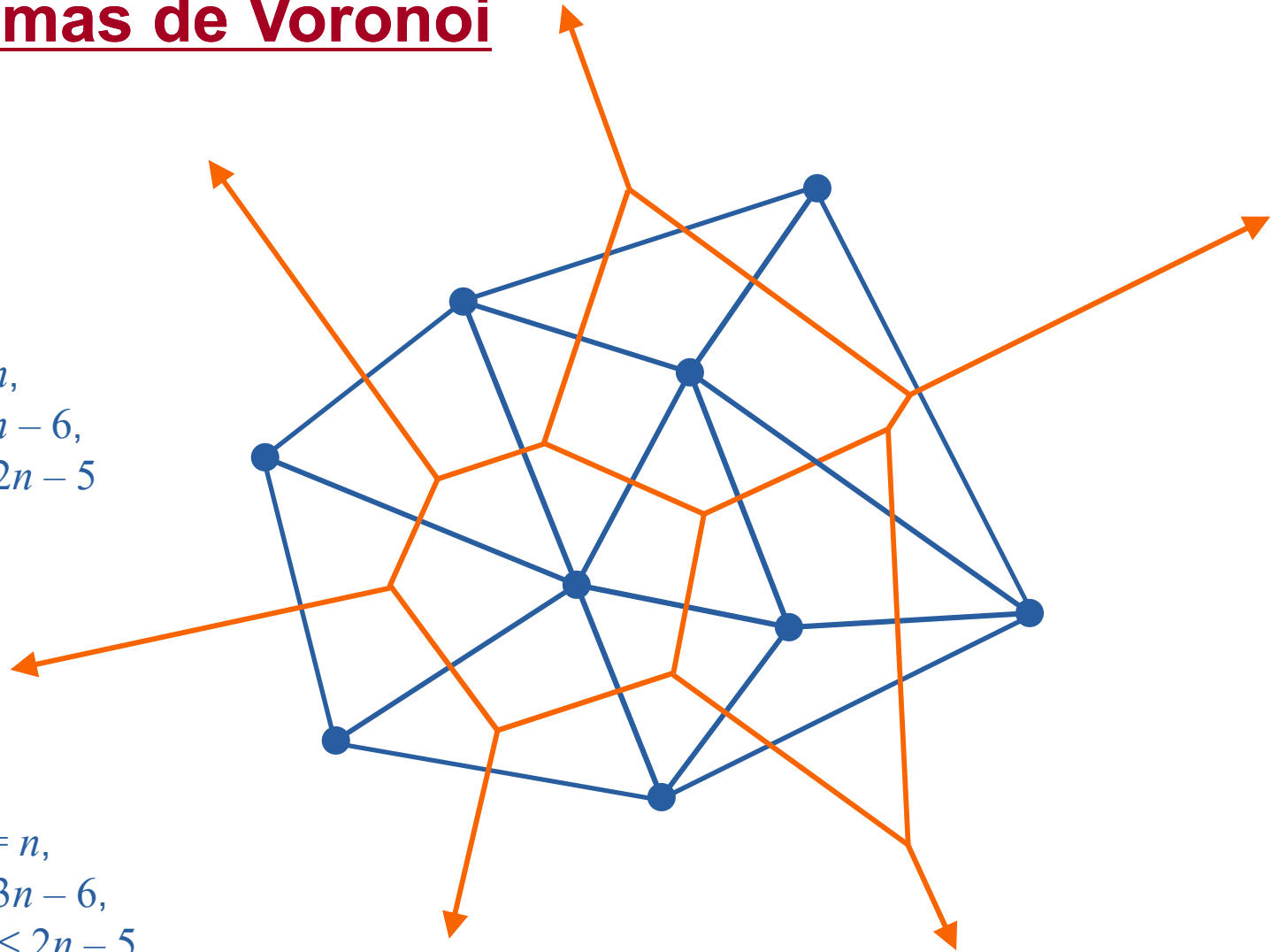
• Prova (continuação). Logo $3(v+1) \leq 2e$. Substituindo $v+1 = 2+e-n$ temos que $3(v+1) \leq 2(v-1+n)$, donde que, $3v-2v \leq 2n-3-2$ e então $v \leq 2n-5$. A outra desigualdade segue de raciocínio equivalente



- Diagramas de Voronoi: combinatória dos diagramas de Voronoi

$V(P)$: #regions = n ,
#edges $\leq 3n - 6$,
#vertices $\leq 2n - 5$

$DT(P)$: #vertices = n ,
#edges $\leq 3n - 6$,
#triangles $\leq 2n - 5$



- **Diagramas de Voronoi: Algoritmos para construção do Diagrama de Voronoi**
- Devido à importância do cálculo do Diagrama de Voronoi, vários algoritmos foram propostos
- A abordagem mais direta é a que computa a **interseção de $n-1$ semi-planos** para determinar cada região de Voronoi por vez
- Existem algoritmos mais eficientes incluindo:
 - Voronoi por divisão e conquista – Shamos e Hoey (1975) – $O(n \log n)$
 - Algoritmo de Fortune (1985) baseado em plane Sweep - $O(n \log n)$

- Diagramas de Voronoi: Algoritmo Incremental $O(n^2)$

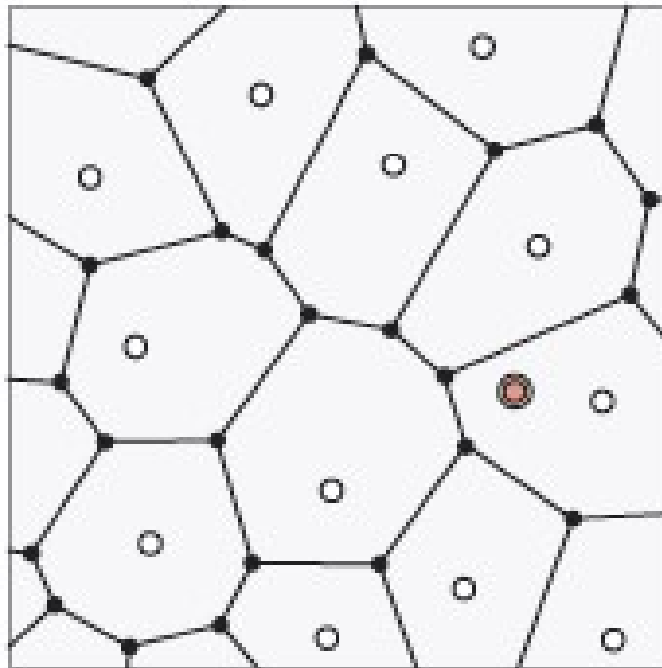
- Algoritmo descrito por Peter Green e Robin Sibson em 1977
- Apesar de ter complexidade $O(n^2)$ é um algoritmo simples e elegante sendo bastante popular
- Usa ideia similar a utilizada nos algoritmos incrementais para fecho convexo e triangulação

- Diagramas de Voronoi: Algoritmo Incremental $O(n^2)$

- O Algoritmo assume que o Diagrama de Voronoi com k sítios $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ foi construído
- Ao adicionar um novo sítio p no plano, busca-se modificar o diagrama corrente para que passe a incluir $Vor(p)$

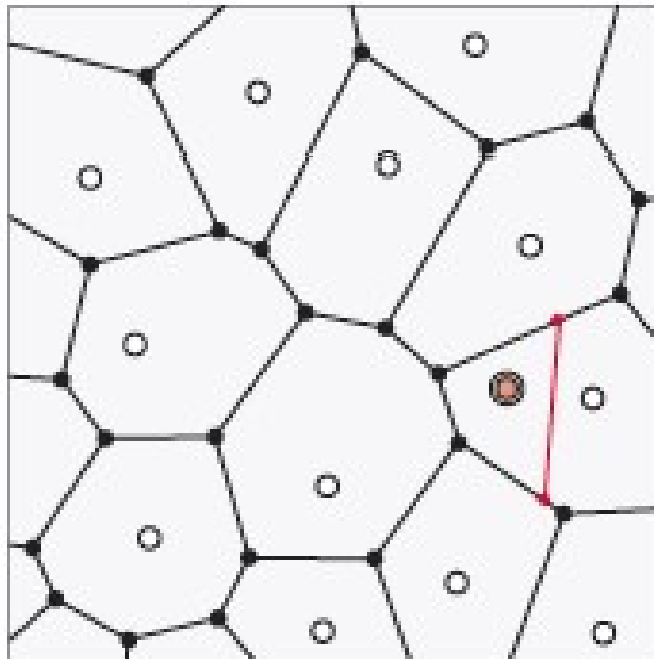
- Diagramas de Voronoi: Algoritmo Incremental $O(n^2)$

- O primeiro passo é detectar a região de Voronoi em que p se encontra



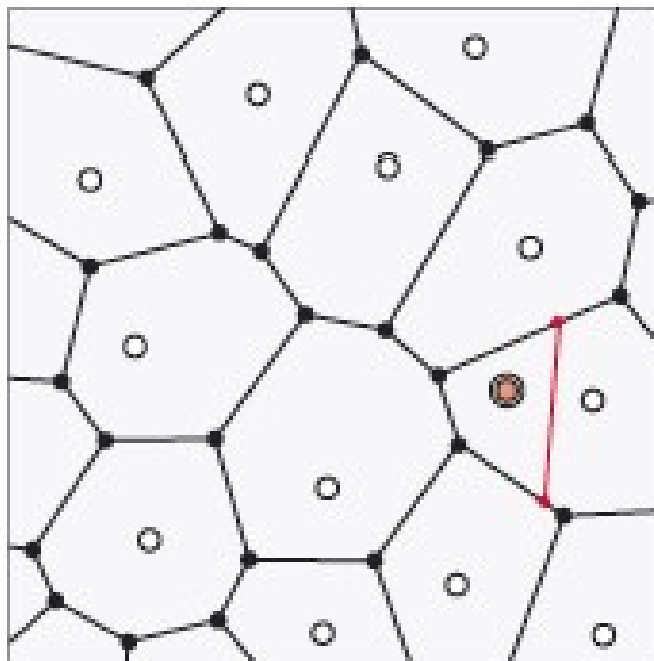
- Diagramas de Voronoi: Algoritmo Incremental $O(n^2)$

- Uma vez determinada a região, por exemplo $\text{Vor}(p_1)$, determina-se a mediatriz entre p e p_1



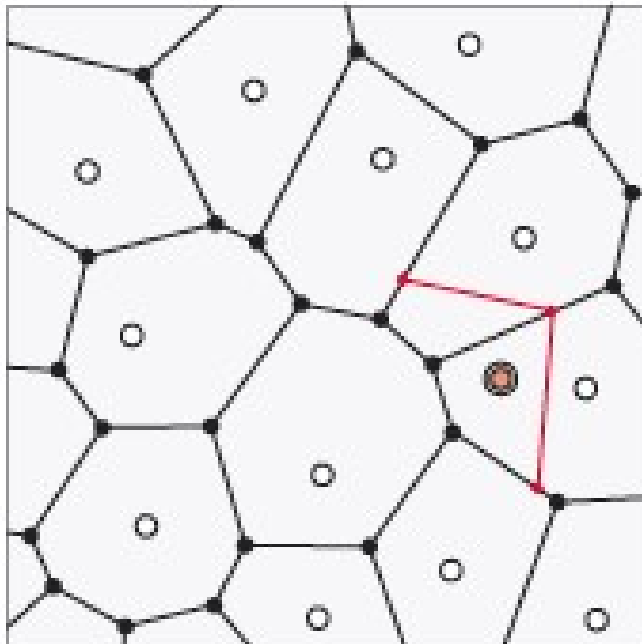
- Diagramas de Voronoi: Algoritmo Incremental $O(n^2)$

- A mediatriz corta $Vor(p_1)$ em dois pontos x_1 e x_2 . Além disso, corta $Vor(p_1)$ em duas partes, uma que pertence a $Vor(p)$, que está sendo construído



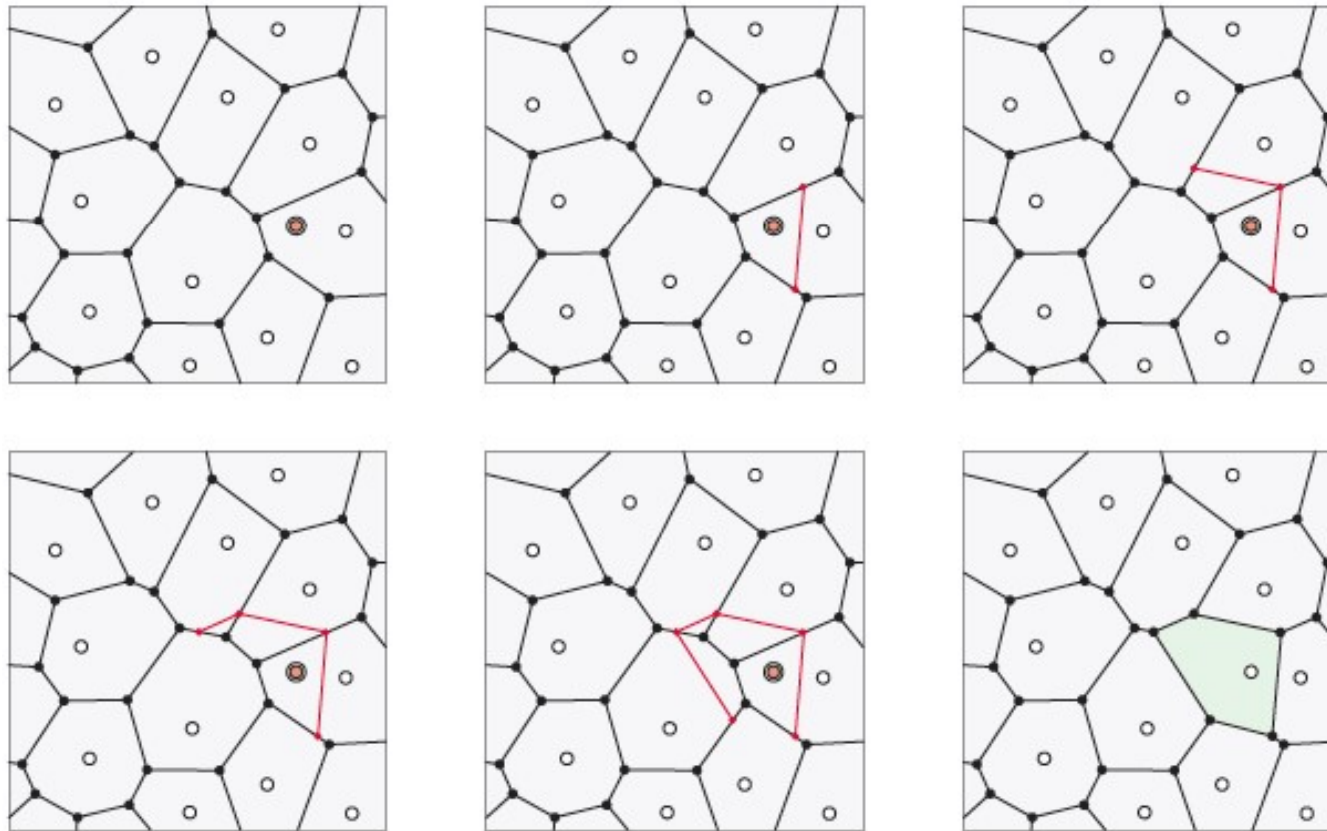
- Diagramas de Voronoi: Algoritmo Incremental $O(n^2)$

- O ponto x_2 encontra-se na aresta de *Voronoi* de $Vor(p_2)$. Partimos dele e construímos a mediatriz entre p e p_2 . Tal mediatriz toca um ponto x_3 em $Vor(p_2)$



- Diagramas de Voronoi: Algoritmo Incremental $O(n^2)$

- Repetimos o processo até determinar $Vor(p)$ ao retornar para x_1



- Diagramas de Voronoi: Algoritmo Incremental $O(n^2)$

INCREMENTAL

Voronoi Diagram Algorithm $O(n^2)$

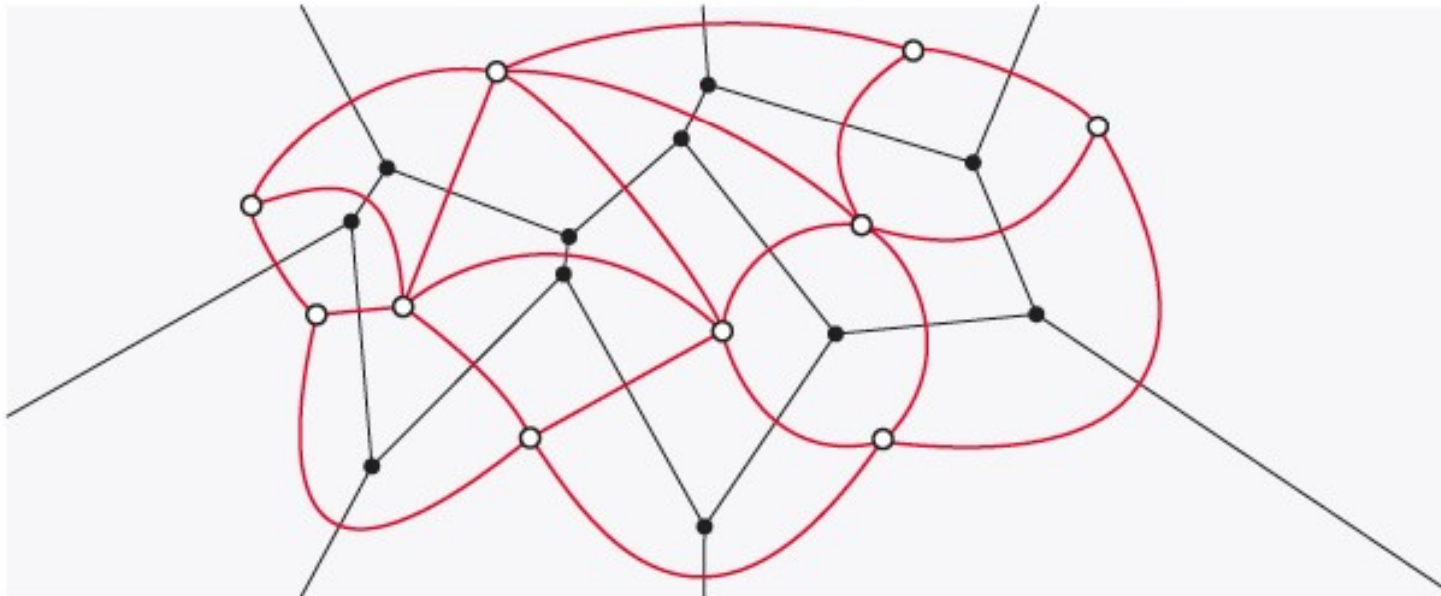
Given a constructed Voronoi diagram, find the region, say $Vor(p_1)$, which contains the new site p . Draw the line segment x_1x_2 that is the perpendicular bisector to p_1p . Continuing from x_2 , construct $Vor(p)$ segment by segment until it closes up back at x_1 . Remove the subdiagram inside this polygonal region to obtain the new Voronoi diagram, now containing p .

- Diagramas de Voronoi: Dualidade Delaunay/Voronoi

- Os Diagramas de Voronoi codificam a **proximidade de pontos a sítios**
- A proximidade sítio a sítio é codificada pela relação de adjacência entre as regiões de Voronoi
- Estas relações de adjacência são expostas pelo **grafo dual** do diagrama de Voronoi $Vor(S)$

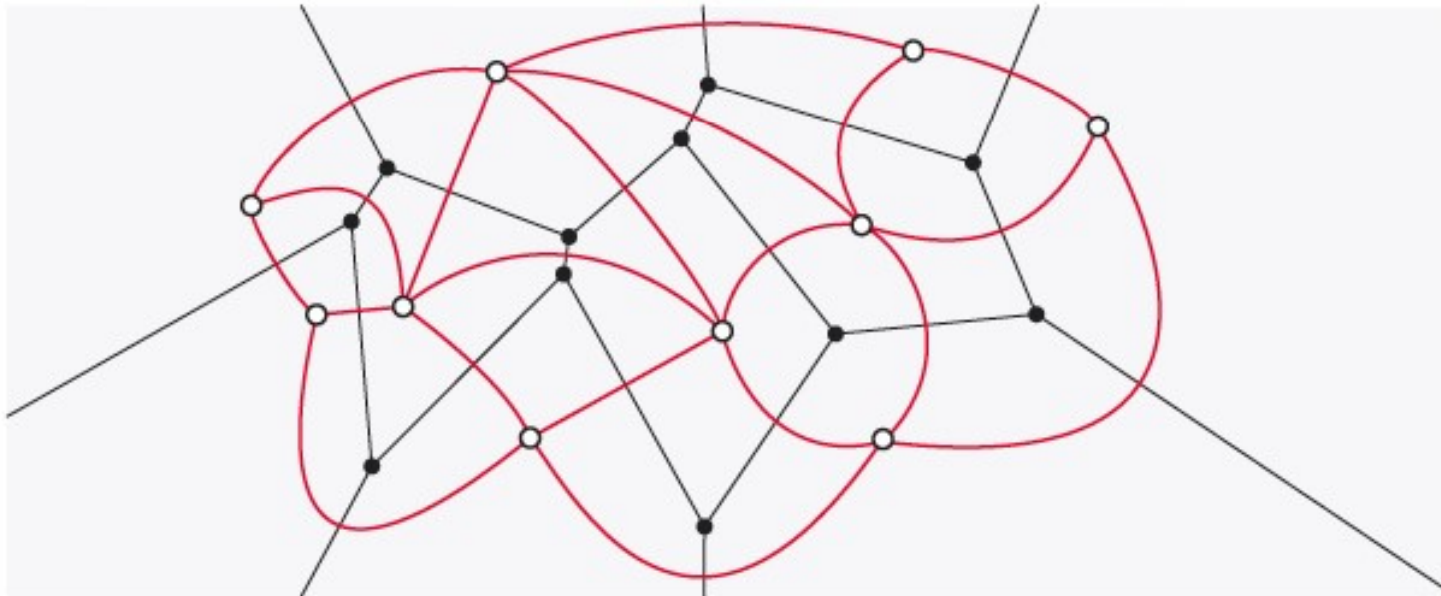
- Diagramas de Voronoi: Dualidade Delaunay/Voronoi

- No **grafo dual**, os nós são os sítios de S e arcos conectam dois sítios se eles correspondem a regiões de Voronoi que compartilham uma aresta de Voronoi



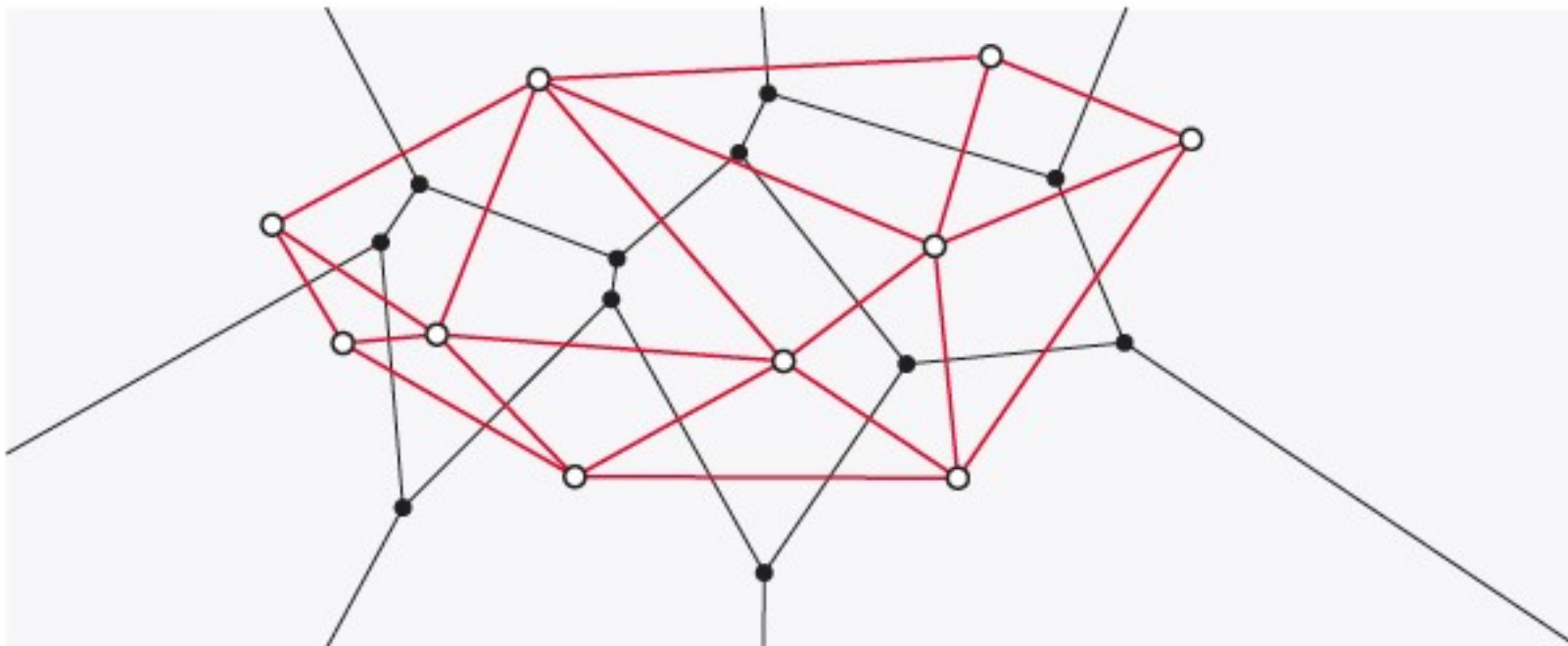
- Diagramas de Voronoi: Dualidade Delaunay/Voronoi

- Como o diagrama de Voronoi é um grafo planar, o seu dual também é



- **Diagramas de Voronoi: Dualidade Delaunay/Voronoi**

- A pergunta que surge é se a versão com arestas retilíneas do grafo dual é um grafo planar



- **Diagramas de Voronoi: Dualidade Delaunay/Voronoi**

- A resposta é positiva. Para isto vamos provar alguns lemas e teoremas
- Teorema 11.6. O grafo dual de $\text{Vor}(S)$ formado por arestas retas é um grafo planar

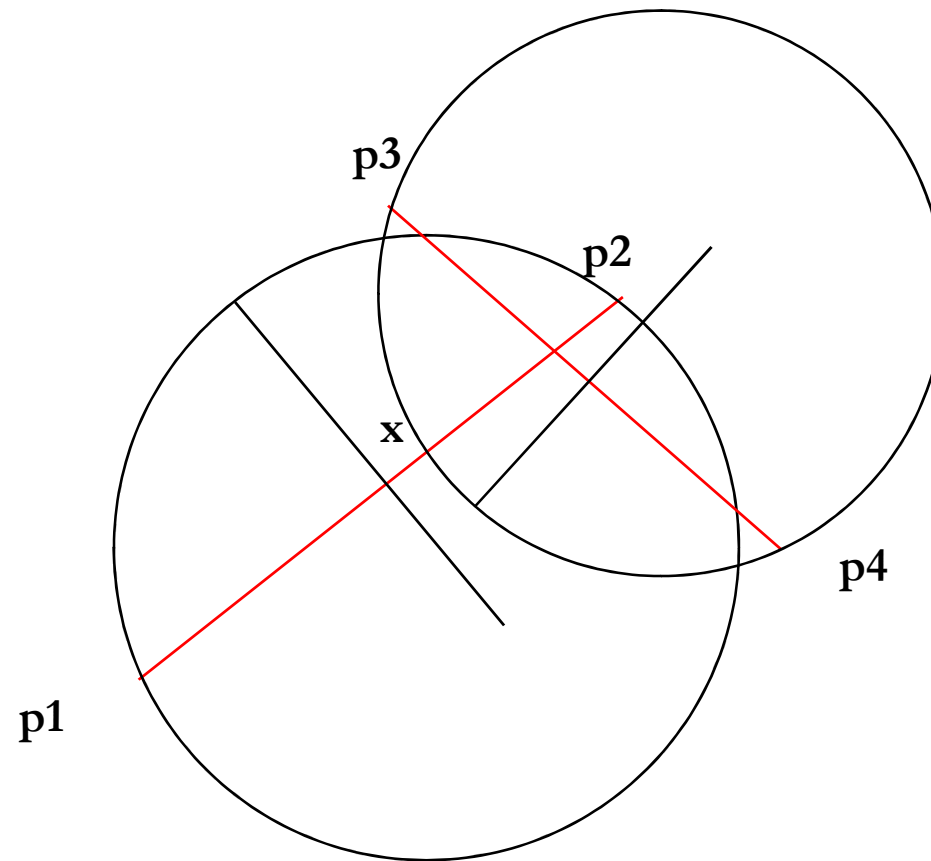
- Diagramas de Voronoi: Dualidade Delaunay/Voronoi

- Prova. Suponha que duas arestas p_1p_2 e p_3p_4 no grafo dual do diagrama de Voronoi se cruzam.

- Sabemos que pelo Teorema 11.4 existe um ponto x na aresta Voronoi entre p_1 e p_2 tal que o círculo C_x centrado em x e passando por p_1 e p_2 é vazio. Por outro lado existe um círculo vazio C_y centrado em um ponto y da aresta de voronoi entre p_3 e p_4 e passando por p_3 e p_4

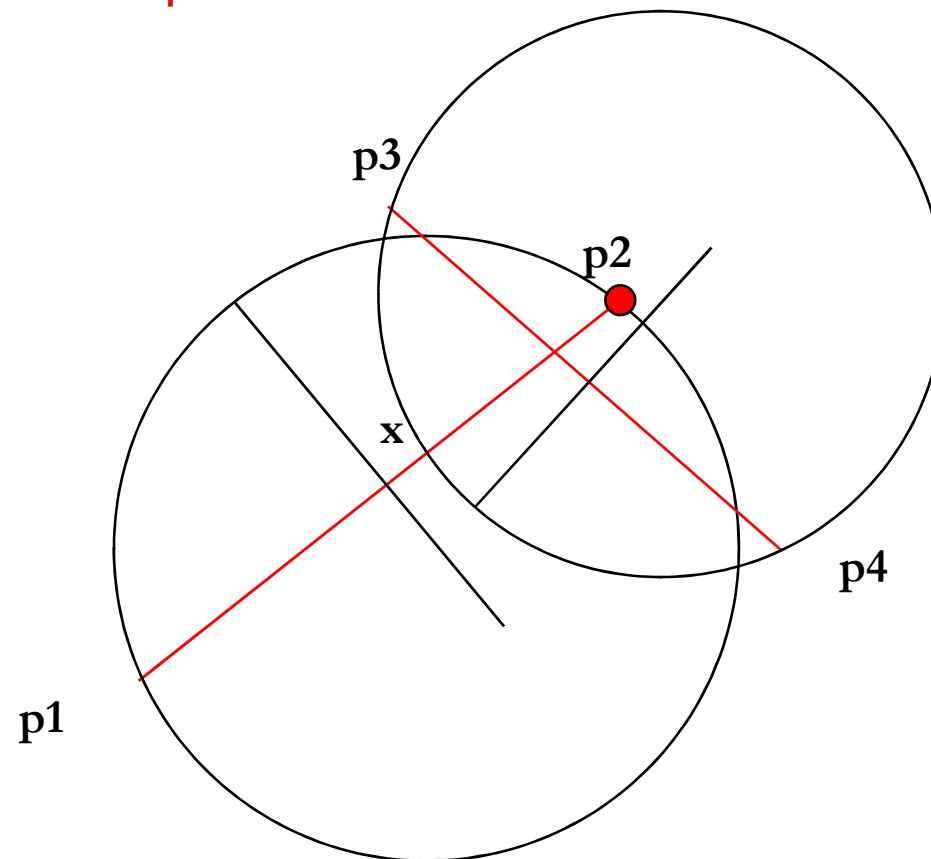
- Diagramas de Voronoi: Dualidade Delaunay/Voronoi

- Prova (continuação).



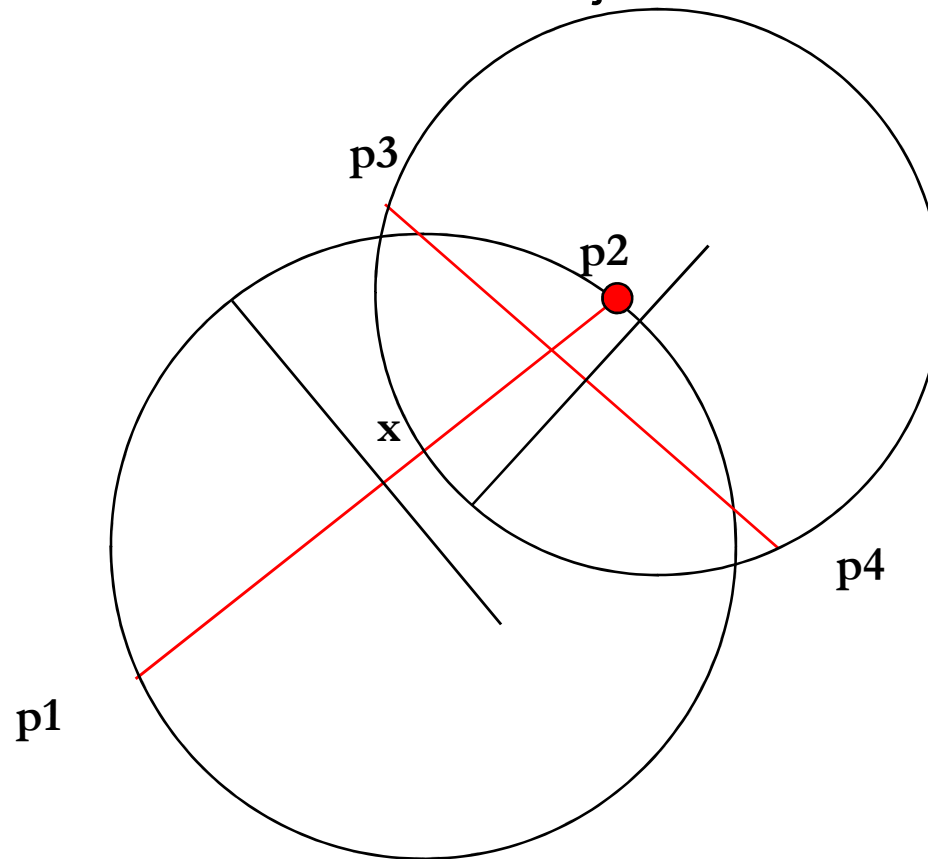
- Diagramas de Voronoi: Dualidade Delaunay/Voronoi

- Observe que neste caso, um dos círculos contém o extremo de um segmento que forma uma corda do outro



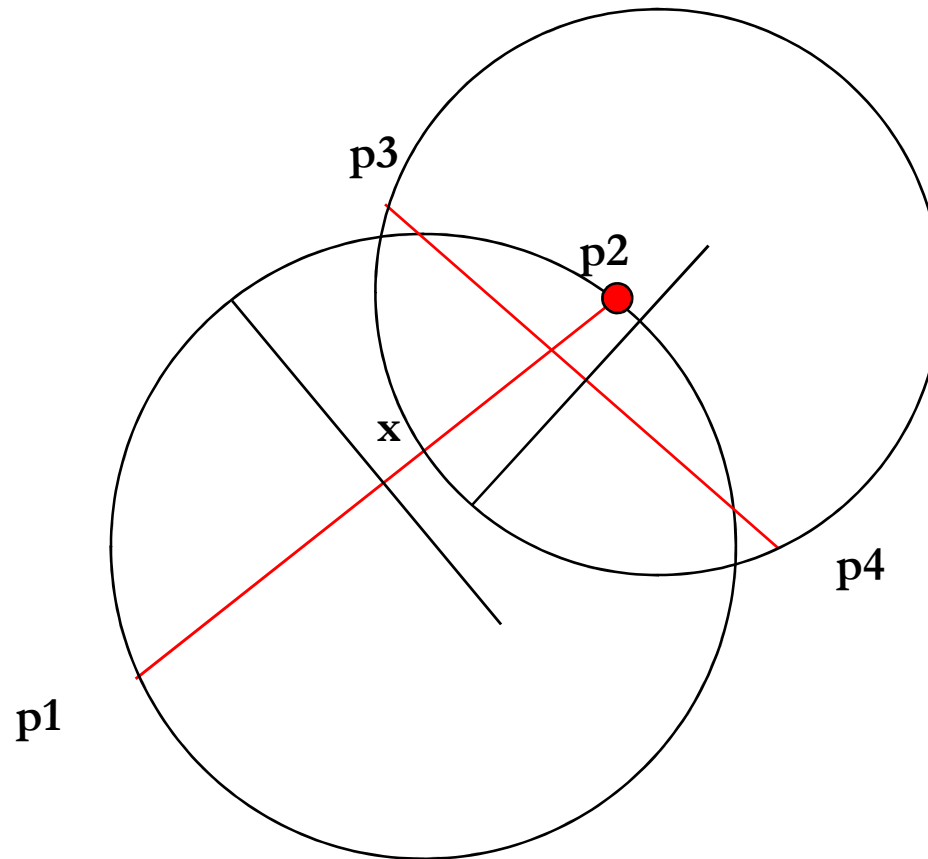
- Diagramas de Voronoi: Dualidade Delaunay/Voronoi

- Isto contradiz o fato de ambos os círculos serem vazios, o que faz com que uma das arestas não seja de Voronoi



- Diagramas de Voronoi: Dualidade Delaunay/Voronoi

- Logo, duas arestas do grafo dual retilíneo nunca se intersectam o que faz com que o grafo seja planar



- **Diagramas de Voronoi: Dualidade Delaunay/Voronoi**

- Na verdade, usamos um resultado sem ter sido provado
- Lema 11.1 – Sejam A e B dois círculos com cordas próprias que se intersectam. Então pelo menos um extremo da corda de um dos círculos está contido no interior estrito do outro círculo
- Ver prova no livro de Devadoss e O'Rourke

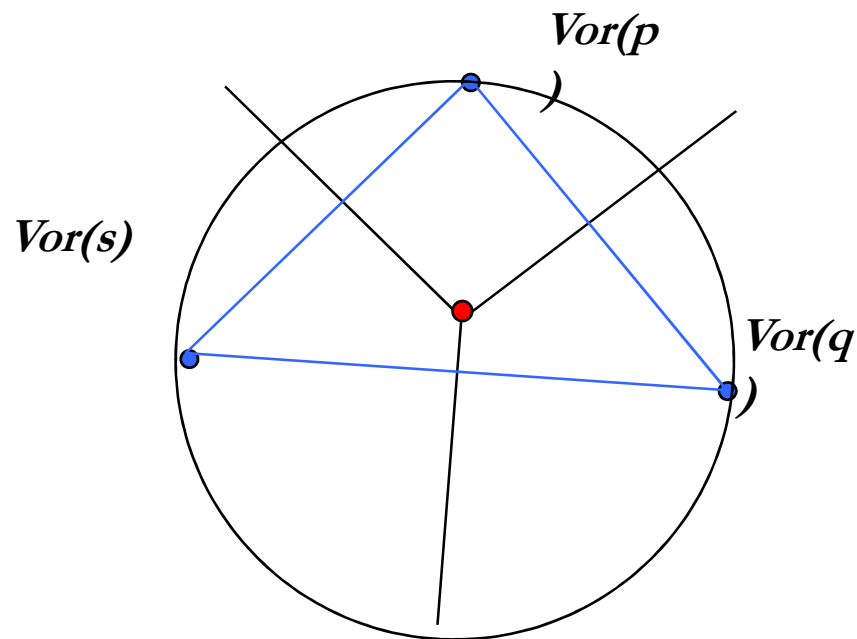
- **Diagramas de Voronoi: Dualidade Delaunay/Voronoi**

- Teorema 11.7. Seja S um conjunto de pontos em posição geral (sem 4 pontos co-circulares). A triangulação dual de $\text{Vor}(S)$ é uma Triangulação de Delaunay

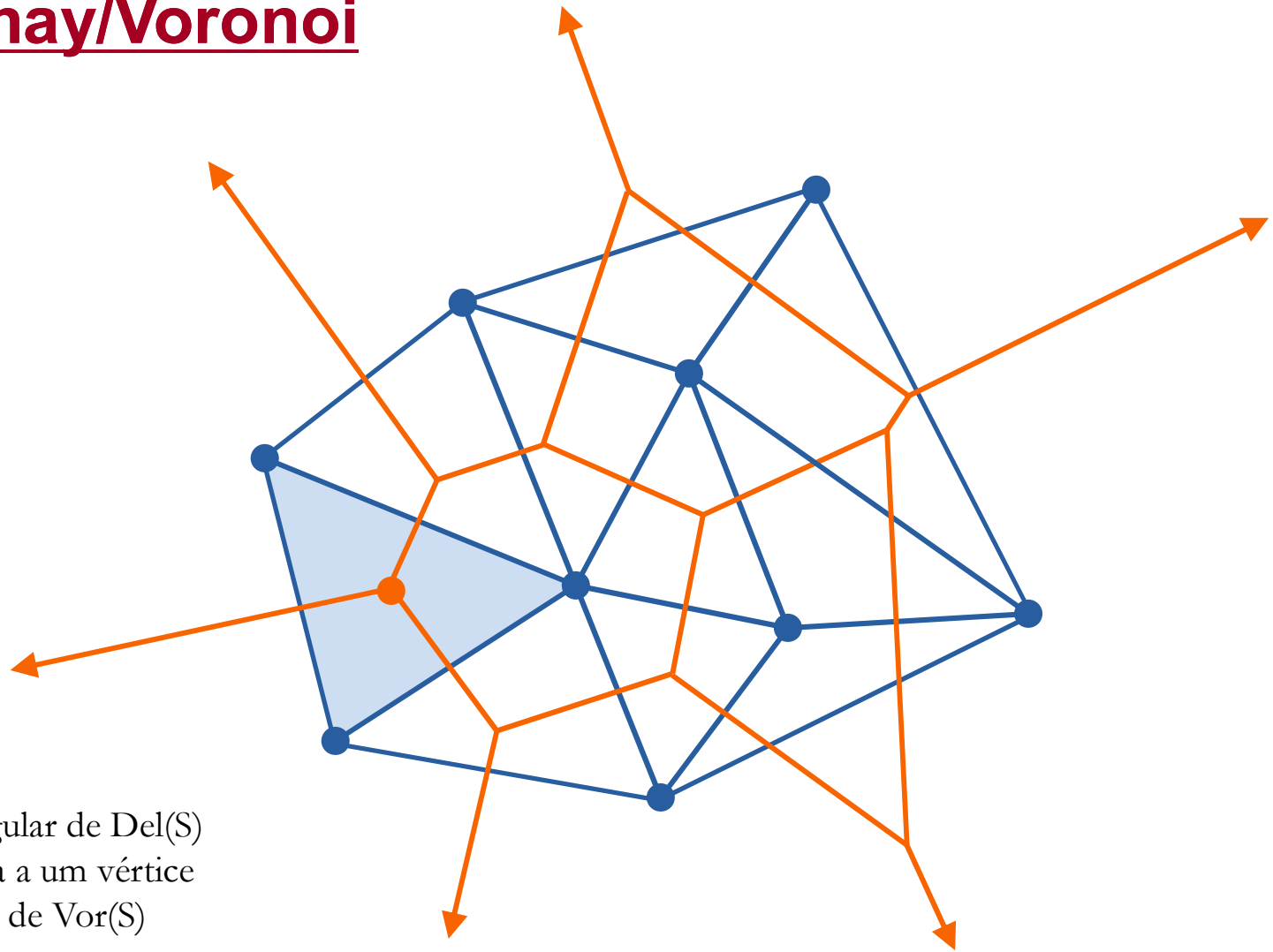
- Prova. Sabemos pelo Teorema 11.3 que o circuncírculo de cada triângulo no dual de $\text{Vor}(S)$ não tem sítios (pontos de S) em seu interior. Além disso, como S está em posição geral, cada circuncírculo de cada triângulo no dual de $\text{Vor}(S)$ contém somente vértices daquele triângulo. Logo cada triângulo em $\text{Vor}(S)$ é de Delaunay pelo teste do círculo.

- Diagramas de Voronoi: Dualidade Delaunay/Voronoi

- Isto ocorre porque se o vértice tem grau 3 então existe 3 arestas de Voronoi a ele incidentes . As arestas na estrela de um vértice consecutivas correspondem a arestas consecutivas no grafo dual que formam um triângulo

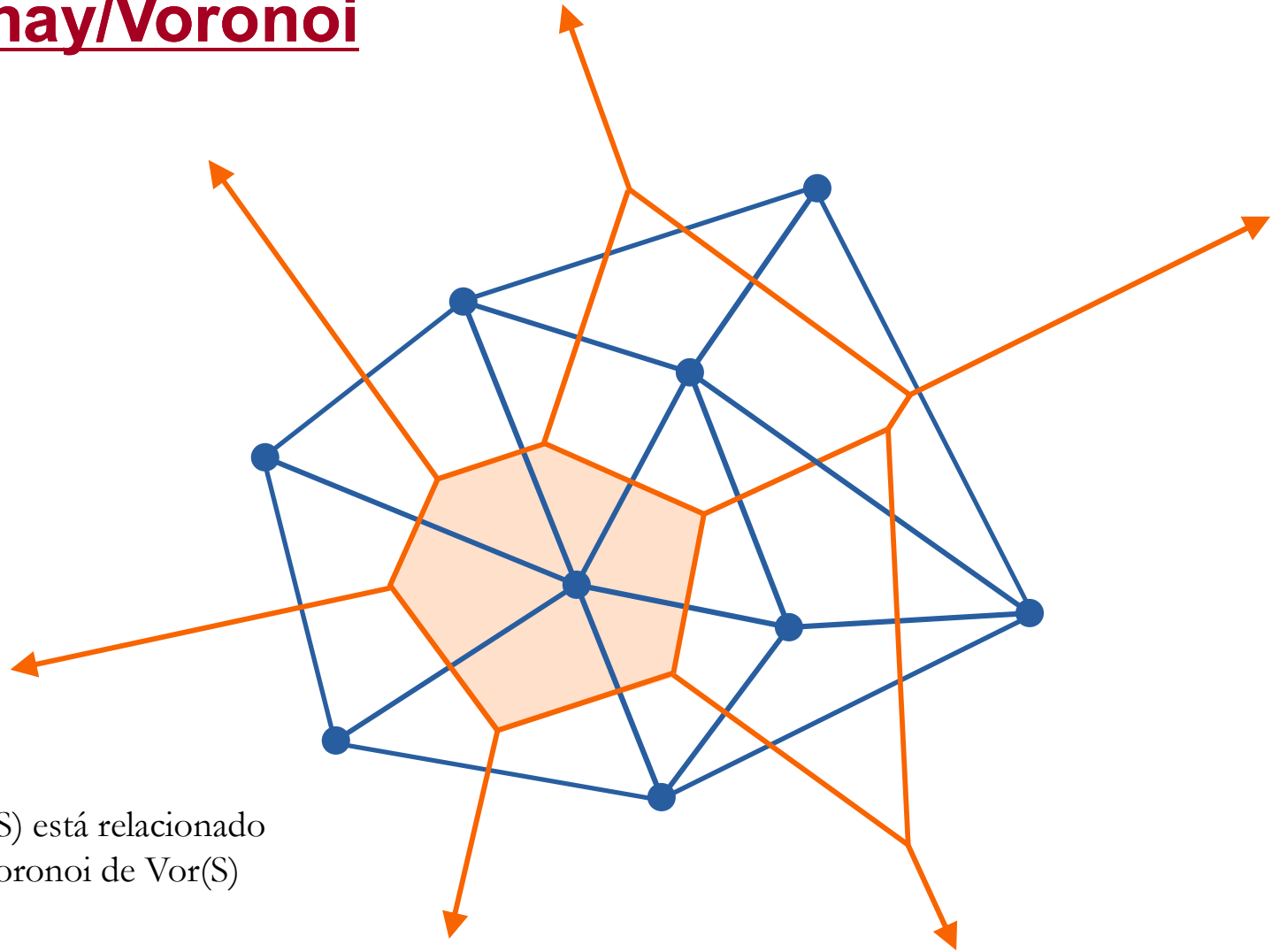


- Diagramas de Voronoi: Dualidade Delaunay/Voronoi



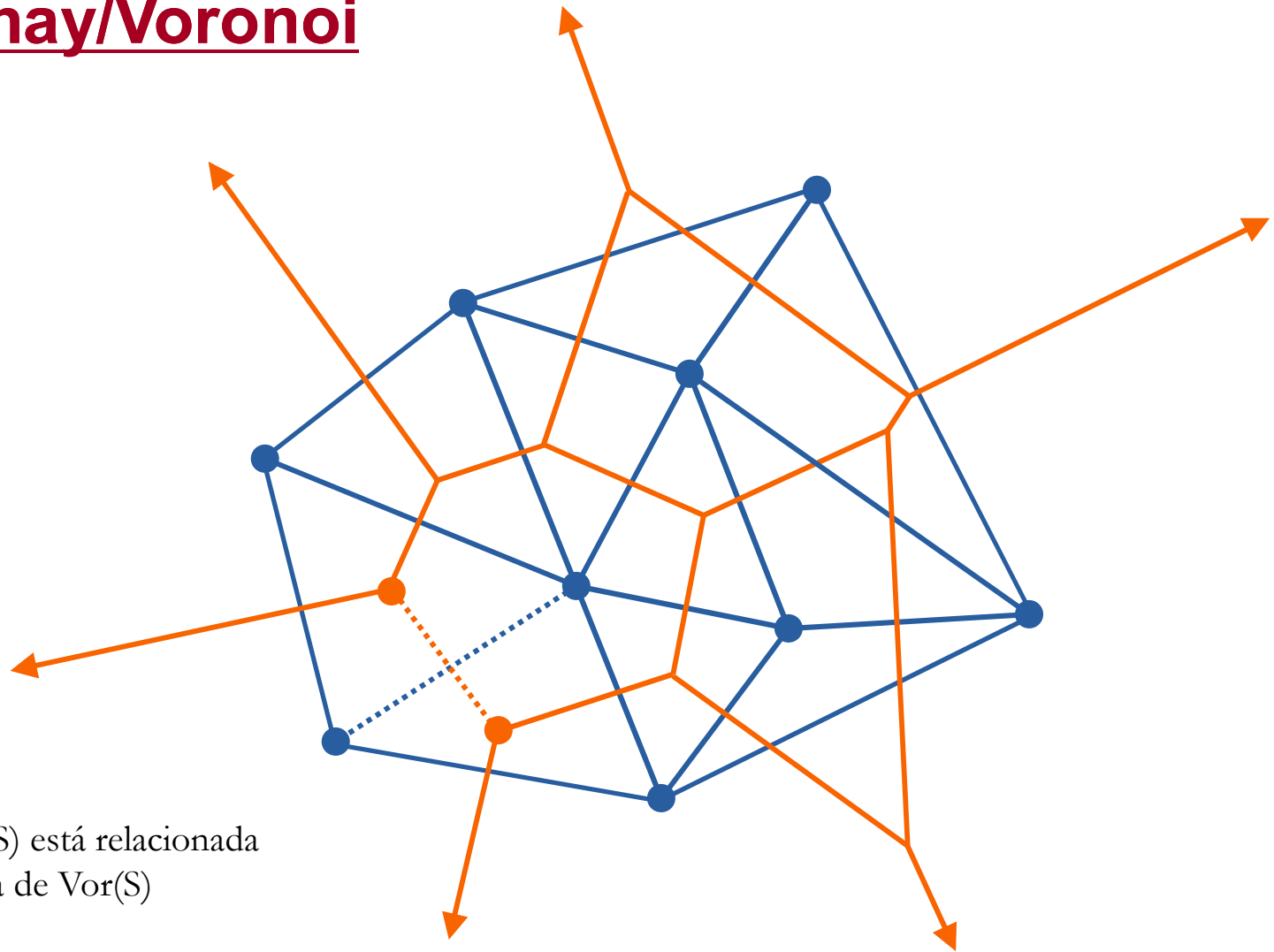
Cada face triangular de $\text{Del}(S)$
está relacionada a um vértice
de Voronoi de $\text{Vor}(S)$

- Diagramas de Voronoi: Dualidade Delaunay/Voronoi



Cada vértice de $\text{Del}(S)$ está relacionado a uma região de Voronoi de $\text{Vor}(S)$

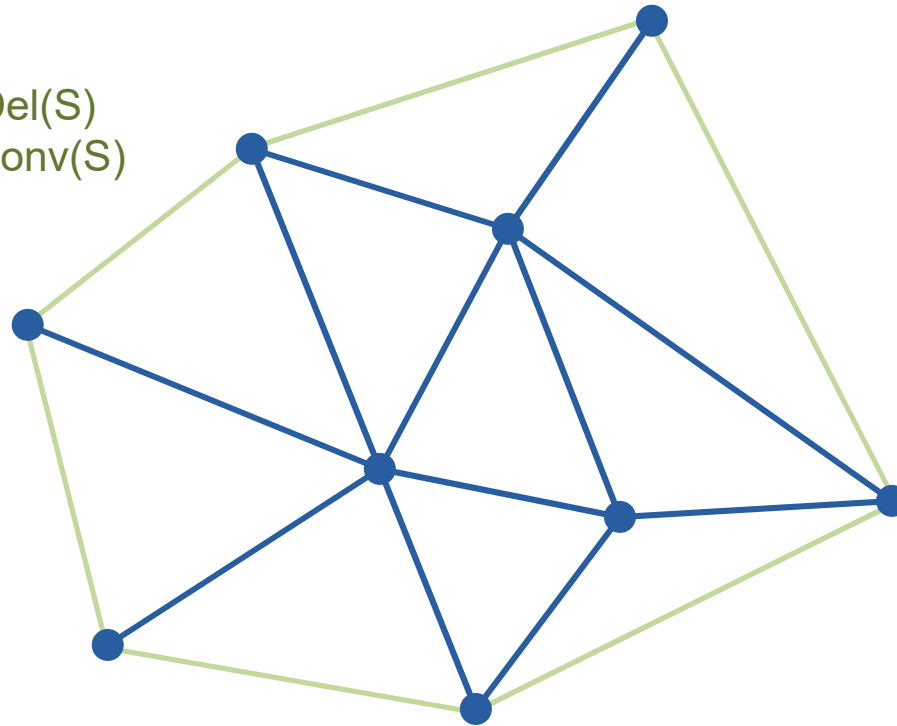
- Diagramas de Voronoi: Dualidade Delaunay/Voronoi



Cada aresta de Del(S) está relacionada a uma aresta de Vor(S)

- Diagramas de Voronoi: Dualidade Delaunay/Voronoi

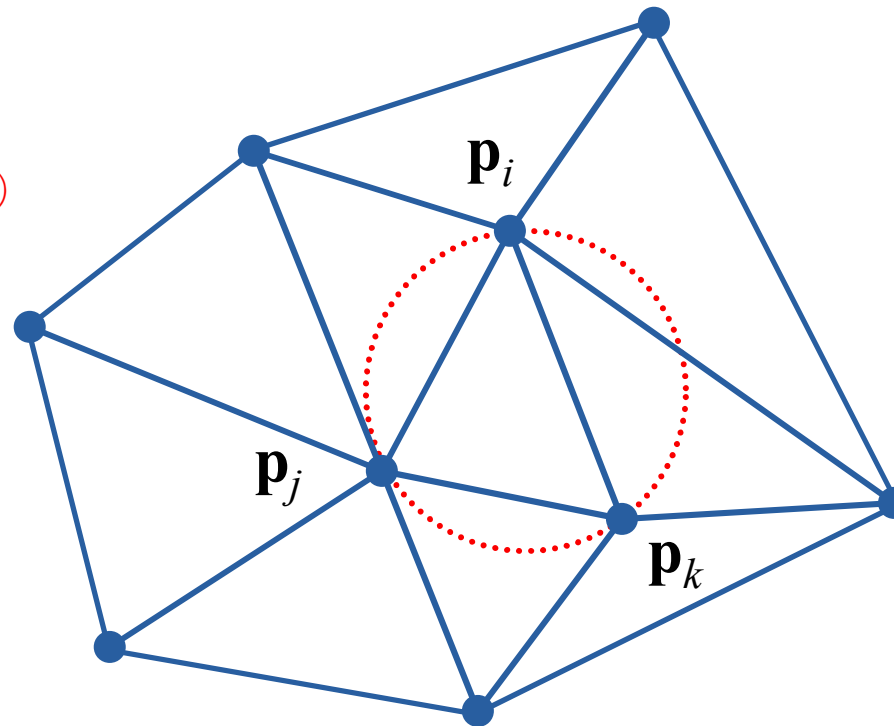
A fronteira de $\text{Del}(S)$
é a fronteira de $\text{conv}(S)$



- Diagramas de Voronoi: Dualidade Delaunay/Voronoi

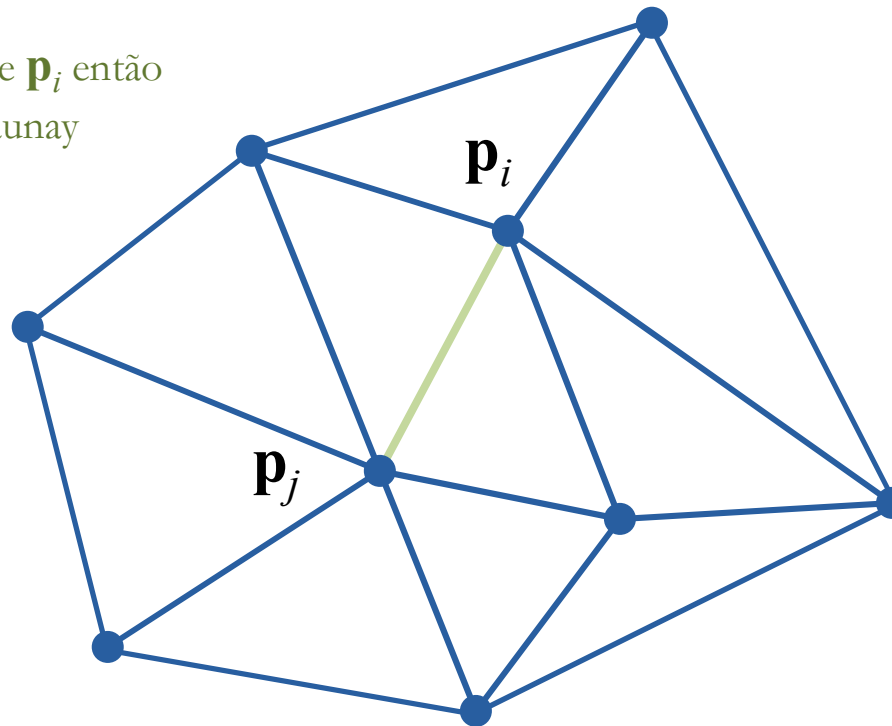
$C(\mathbf{v})$ is circuncírculo do triângulo de Delaunay $(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k)$

Triângulos de Delaunay admitem a propriedade de círculo vazio



- Diagramas de Voronoi: Dualidade Delaunay/Voronoi

Se \mathbf{p}_j é o vizinho mais próximo de \mathbf{p}_i então $(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j)$ é uma aresta de Delaunay



- **Diagramas de Voronoi: Um algoritmo incremental para Delaunay baseado na dualidade Voronoi/Delaunay**

- Seja S_k o conjunto dos k primeiros sítios de um conjunto de pontos S no plano

- Assuma conhecido $\text{Del}(S_k)$

- É possível inserir um novo ponto p e alterar $\text{Del}(S_k)$ para construir $\text{Del}(S_{k+1})$

- Diagramas de Voronoi: Um algoritmo incremental para Delaunay baseado na dualidade Voronoi/Delaunay

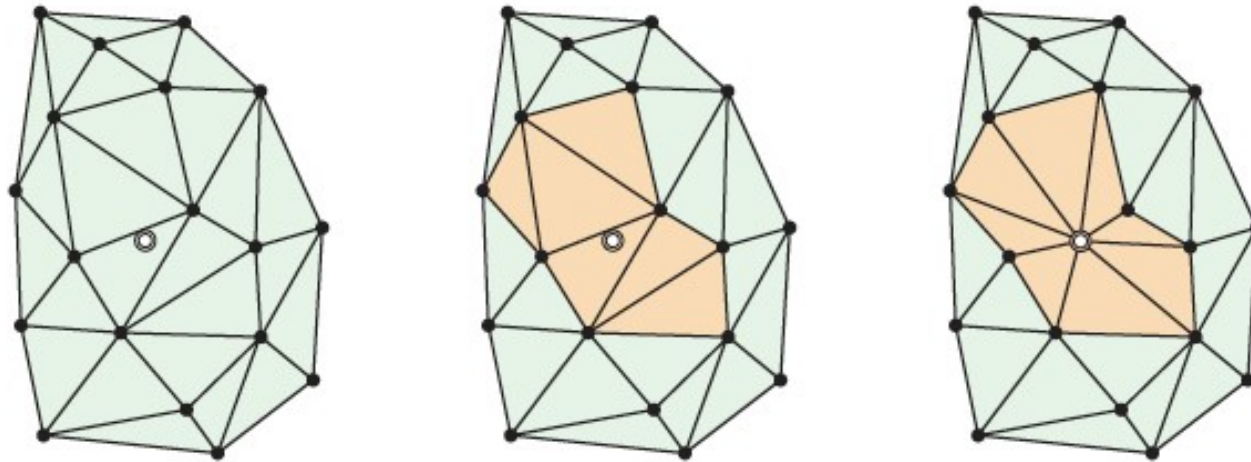
- Assumimos que p está dentro de $\text{conv}(S_k)$

- Um triângulo t de $\text{Del}(S_k)$ é afetado por p se e somente se o circuncírculo de t contém p .

- Logo **modificações em $\text{Del}(S_k)$ devem ocorrer somente nos triângulos t afetados por p**

- **Diagramas de Voronoi: Um algoritmo incremental para Delaunay baseado na dualidade Voronoi/Delaunay**

- Marcamos todos os triângulos t de $\text{Del}(S_k)$ afetados por p e removemos as diagonais do polígono triangulado resultante da união dos triângulos t
- Triangulamos o polígono resultante conectando cada ponto do polígono obtido com p



- **Diagramas de Voronoi: Um algoritmo incremental para Delaunay baseado na dualidade Voronoi/Delaunay**

- Por que $Del(S_{k+1})$ assim construído é de Delaunay?

- Por que todos os novos triângulos tem que conter o vértice p ?

- Prova. Suponha que existe um novo triângulo t' em $Del(S_{k+1})$ que não contenha p . Então o circuncírculo de t' deve ser vazio porque é um triângulo de Delaunay. Em particular p não está no circuncírculo de t' . Mas então, t não pode ser um novo triângulo e já estava originalmente em $Del(S_k)$, o que é uma contradição

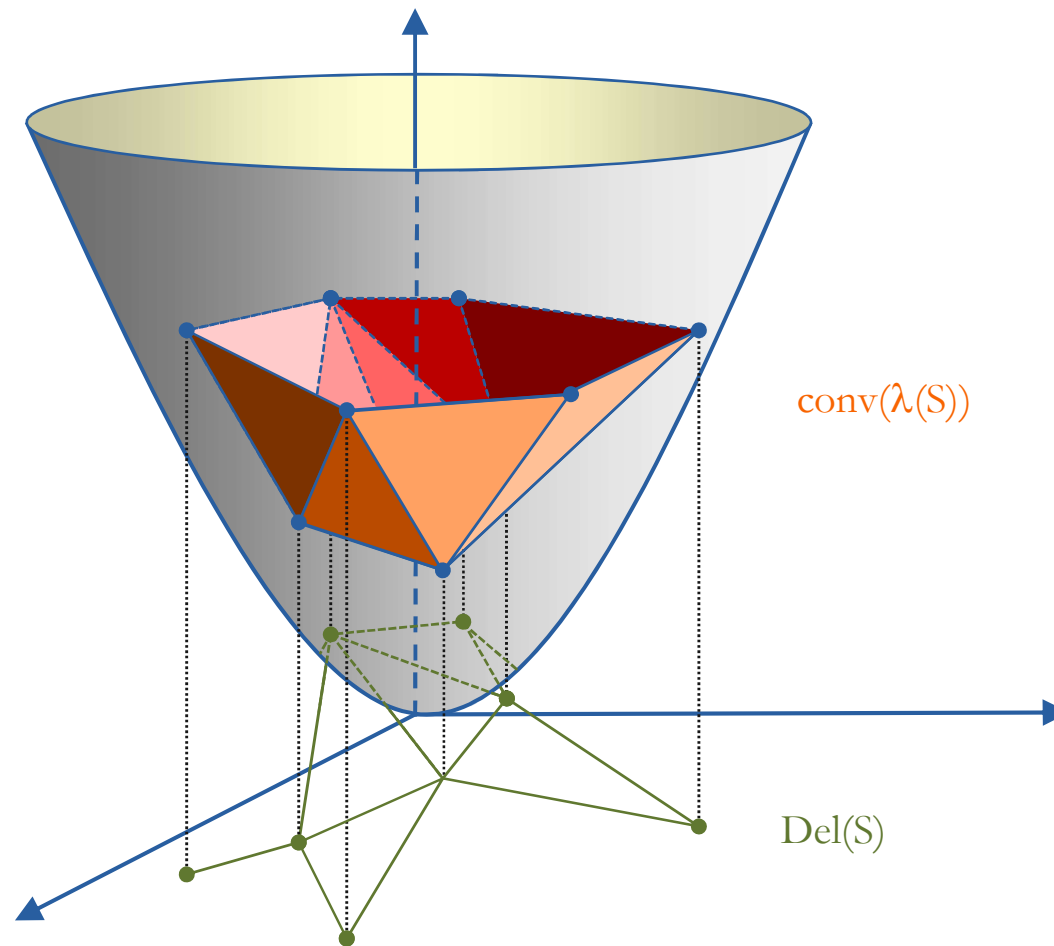
- Diagramas de Voronoi: Um algoritmo incremental para Delaunay baseado na dualidade Voronoi/Delaunay

INCREMENTAL Delaunay Triangulation Algorithm $O(n^2)$
Given a constructed Delaunay triangulation $\text{Del}(S_k)$ with k sites, find the set of triangles of $\text{Del}(S_k)$ whose circumcircles contain the new site p . The union of these triangles is a triangulated polygon. Remove the diagonals of this polygon and add edges from p to each of the vertices of the polygon to obtain the new Delaunay triangulation, now containing p .

- **Diagramas de Voronoi: Relação Voronoi/Delaunay/Fecho Convexo3D**

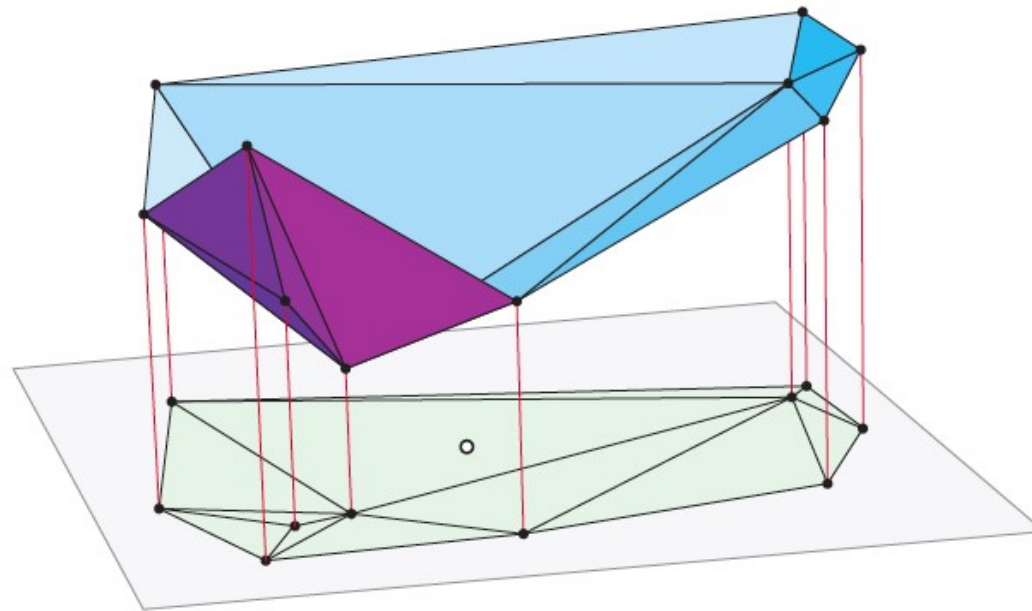
- Seja S um conjunto de pontos no plano xy em posição geral (sem 4 pontos co-circulares).
- Associe cada sítio (x,y) a um valor de altura x^2+y^2
- Isto posiciona todos os sítios em um parabolóide

- Diagramas de Voronoi: Relação Voronoi/Delaunay/Fecho Convexo3D



- Diagramas de Voronoi: Relação Voronoi/Delaunay/Fecho Convexo3D

- Compute o Fecho 3D dos novos pontos no R^3 e descarte as faces superiores
- Tal estrutura é denominada **Fecho Convexo Inferior**



- **Diagramas de Voronoi: Relação Voronoi/Delaunay/Fecho Convexo3D**

- Teorema 11.8. Dado um conjunto de pontos S no plano xy . A triangulação de Delaunay $\text{Del}(S)$ é exatamente a projeção no plano xy do fecho convexo inferior dos pontos $(x, y, x^2 + y^2)$

- Diagramas de Voronoi: Relação Voronoi/Delaunay/Fecho Convexo3D

• Prova. Sabe-se que a equação do plano tangente a um parabolóide em um ponto (a,b) é dada por

$$z = 2ax + 2by - a^2 - b^2$$

• Se o plano for deslocado por uma distância r^2 obtém-se um novo plano π com equação $z = 2ax + 2by - a^2 - b^2 + r^2$

• A interseção de π com o parabolóide é uma elipse, cuja projeção é um círculo no plano xy

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

- **Diagramas de Voronoi: Relação Voronoi/Delaunay/Fecho Convexo3D**

- Escolha uma face t do Fecho Convexo Inferior, e seja π o plano definido pelos 3 pontos de t no parabolóide. Mova π para baixo na direção z até que ele se torne tangente ao parabolóide. Seja $(a, b, a^2 + b^2)$ o ponto de tangência e seja r^2 a magnitude do movimento para baixo

- Pela discussão anterior, a projeção dos 3 pontos no plano xy define um círculo de raio r dado pela equação do círculo.

- **Diagramas de Voronoi: Relação Voronoi/Delaunay/Fecho Convexo3D**

- Como t é uma face inferior do fecho convexo, todos os outros sítios no parabolóide estão acima de π , o que implica que eles se projetam para a do raio r .

- Logo o círculo determinado por t é vazio. Consequentemente o triângulo correspondente a projeção de t no plano é de Delaunay. Como isto é verdade para todas as faces inferiores, a projeção de todas as faces é de Delaunay

Diagrama de Voronoi: Referências

- Satyan L. Devadoss, Joseph O'Rourke,
Discrete and Computational Geometry, Princeton University Press, 2011.
- Applet para cálculo do Diagrama de Voronoi/Triangulação de Delaunay
<https://www.cs.cornell.edu/home/chew/Delaunay.html>
- Slides do curso de Álgebra geométrica do Prof. Leandro Fernandes
- As imagens utilizadas (excetuando as feitas pelo expositor) foram obtidas de:
 - Satyan L. Devadoss, Joseph O'Rourke,
Discrete and Computational Geometry, Princeton University Press, 2011.
 - Applet para cálculo do Diagrama de Voronoi/Triangulação de Delaunay
<https://www.cs.cornell.edu/home/chew/Delaunay.html>
 - Slides do curso de Álgebra geométrica do Prof. Leandro Fernandes