Geometria Computacional

Professor:

Anselmo Montenegro
www.ic.uff.br/~anselmo

Conteúdo (aula 12):

- Eixo medial e esqueletos

Roteiro

- Introdução
- Eixos Mediais
- Esqueletos
- Aplicações

- **Introdução**

- Nesta apresentação estenderemos o diagrama de Voronoi para curvas gerando duas generalizações:
  - *Eixos Mediais*
  - *Esqueletos*

- **Revisão de Conceitos de Diagramas de Voronoi**

- Diagrama de Voronoi Vor(S) de um conjunto de pontos do plano:
  - É o lugar geométrico dos centros de discos vazios maximais
  - É o lugar geométrico dos pontos para os quais existem dois ou mais sítios vizinhos mais próximos que os demais
  - É o conjunto de pontos de extinção da queimada se o plano é queimado uniformemente e simultaneamente a partir de cada sítio em S

• Eixo Medial

- Ao invés de considerar um conjunto discreto de pontos como origem do diagrama de Voronoi, considere como entrada a fronteira ∂P de um polígono convexo P

- Considere o problema de encontrar o objeto que possui as mesmas 3 propriedades de Vor(S)

- Tal objeto é conhecido na literatura como Eixo Medial

• Eixo Medial: definição

- Definição (Eixo Medial). O eixo medial M(P) de um polígono P é o fecho de todos os pontos de P que possuem dois ou mais vizinhos mais próximos dentre todos os pontos de ∂P

Eixo Medial: aplicações

- O eixo medial tem aplicações em diferentes problemas:
  - Reconhecimento de formas biológicas
  - Reconhecimento de caracteres
  - Sistemas de Informação Geográfica
  - Detecção de simetria em objetos
  - Particionamento de objetos em partes

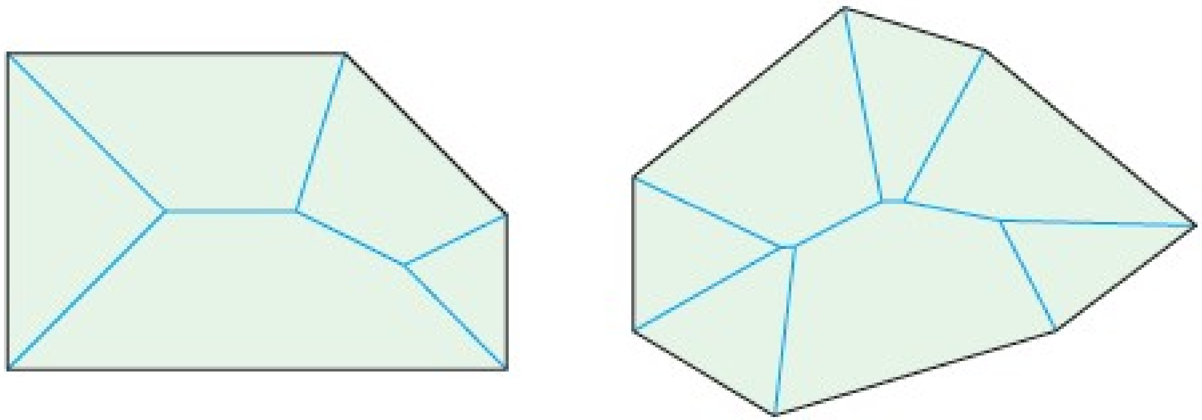
Eixo Medial de Polígonos Convexos

- A definição de Eixo Medial pode ser generalizada para outros objetos além de polígonos

- Nesta exposição focaremos primeiramente em polígonos convexos

• Eixo Medial de Polígonos Convexos

- Eixo Medial de polígonos convexos



Eixo Medial de Polígonos Convexos

- O eixo medial de um polígono convexo determina uma árvore formada por segmentos retos cujas folhas são os vértices de P

- A razão para a definição do eixo medial como o fecho do conjunto de pontos é o de que os vértices do polígono não seriam incluídos já que ele são mais próximos somente deles mesmos

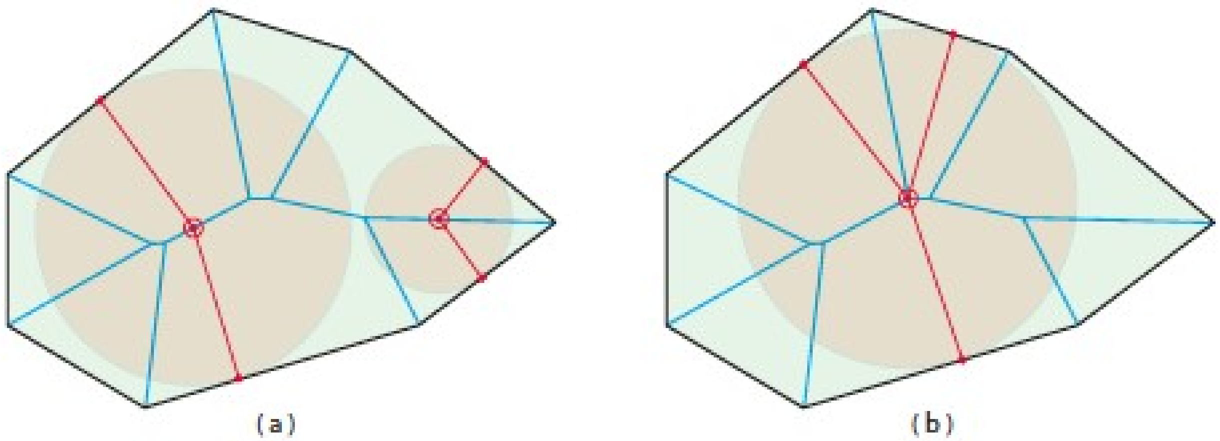
Eixo Medial de Polígonos Convexos

- Por que o nome Eixo Medial?
- Resposta: Porque a forma da estrutura passa em certo sentido pelo meio da figura
- O termo Eixo Medial foi introduzido por Harry Blum em 1967 ao estudar formas biológicas

• Eixo Medial de Polígonos Convexos: propriedades

- Vamos verificar se o Eixo Medial atende as propriedades encontradas no Diagrama de Voronoi

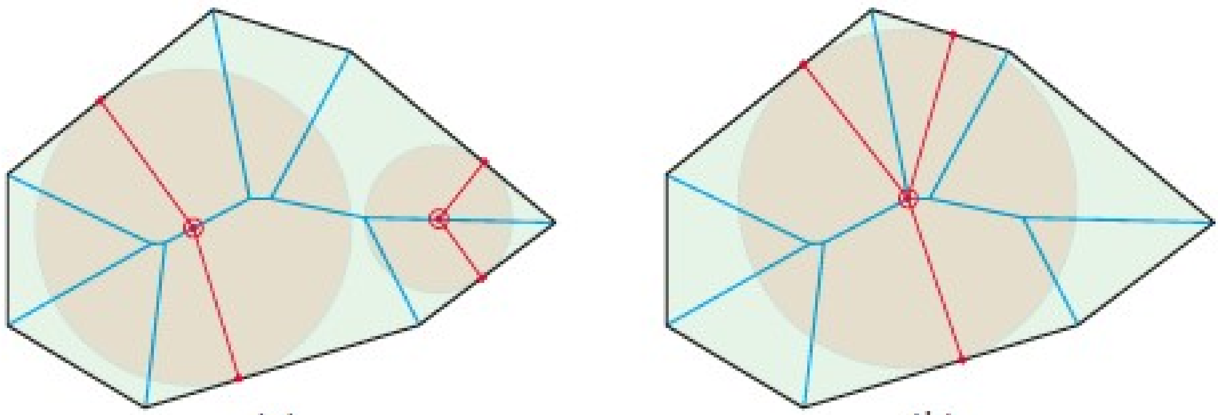
- Os pontos do eixo medial *M*(*P*) de um polígono *P* são centros de discos maximais que tocam dois ou mais pontos distintos



• Eixo Medial de Polígonos Convexos: propriedades

- Vamos verificar se o Eixo Medial atende as propriedades encontradas no Diagrama de Voronoi

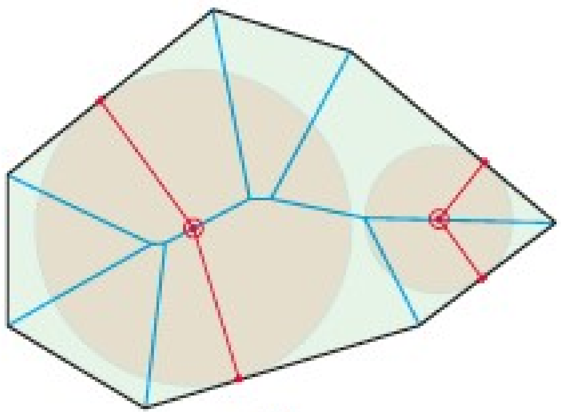
- Os pontos do eixo medial *M*(*P*) de um polígono *P* são centros de discos maximais que tocam dois ou mais pontos distintos

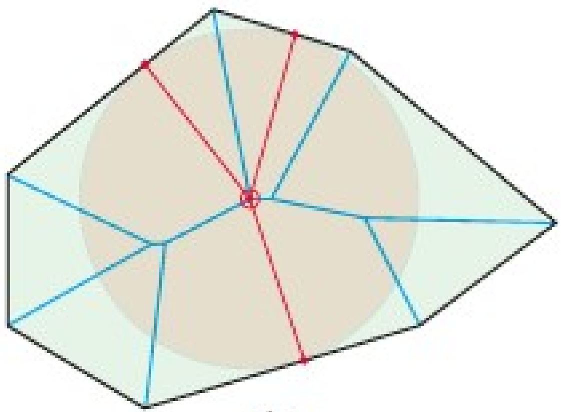


(a) (b)

• Eixo Medial de Polígonos Convexos: propriedades

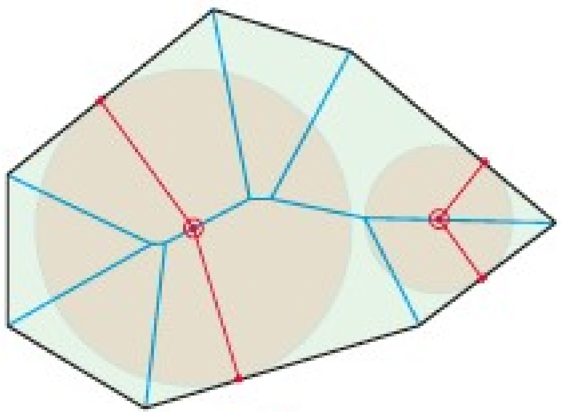
- Pontos no interior de um segmento estão associados a discos maximais que tocam dois pontos de tangência em ∂P
- Pontos com grau igual a *k* no Eixo Medial tocam *k* pontos de tangência
- Observe que os raios determinam caminhos mínimos dos pontos de tangência aos pontos do Eixo Medial


(a)

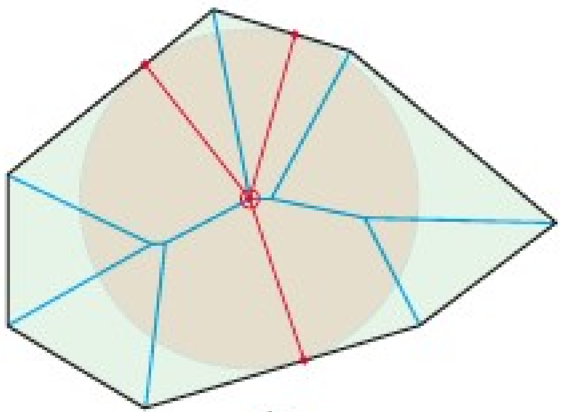

(b)

• Eixo Medial de Polígonos Convexos: propriedades

- Uma analogia pode ser feita considerando o polígono como uma área gramada que é incendiada a partir da fronteira
- O fogo marcha em paralelo a partir da fronteira e se encontra ao longo de bissetrizes dos pontos angulares dos polígono



(a)



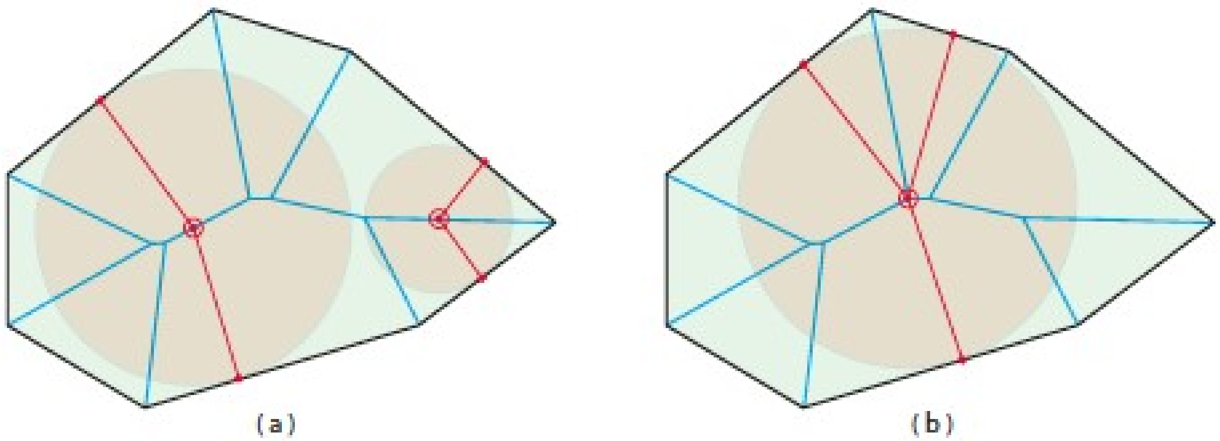
(b)

• Eixo Medial de Polígonos Convexos: propriedades

- Cada ponto de encontro das regiões incendiadas pode ser associado a um tempo *t*

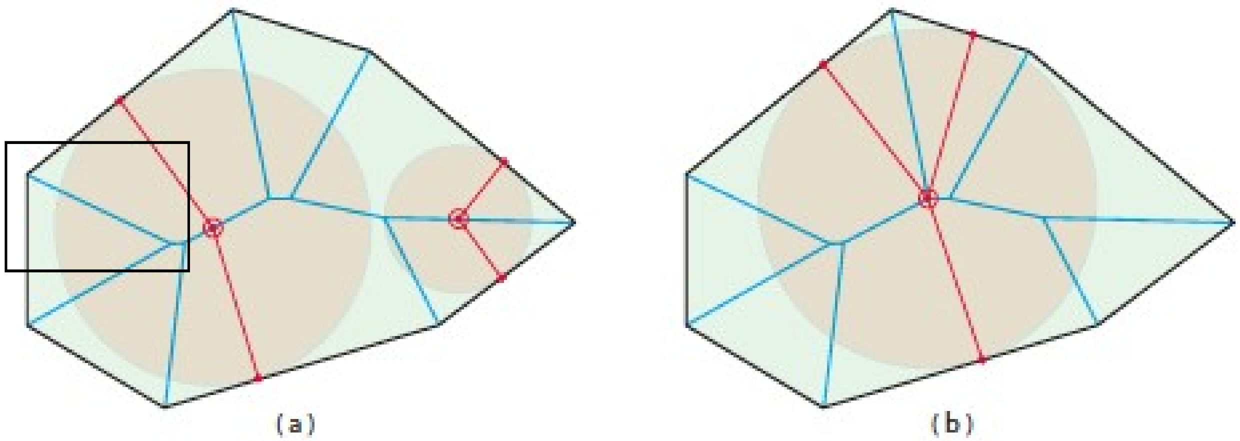
- Este tempo é igual a medida do raio *r* dos discos maximais vinculados a cada ponto

- A transformação de P em M(P) é conhecida como *Grassfire Transformation* (transformação de queimada ou incêndio)



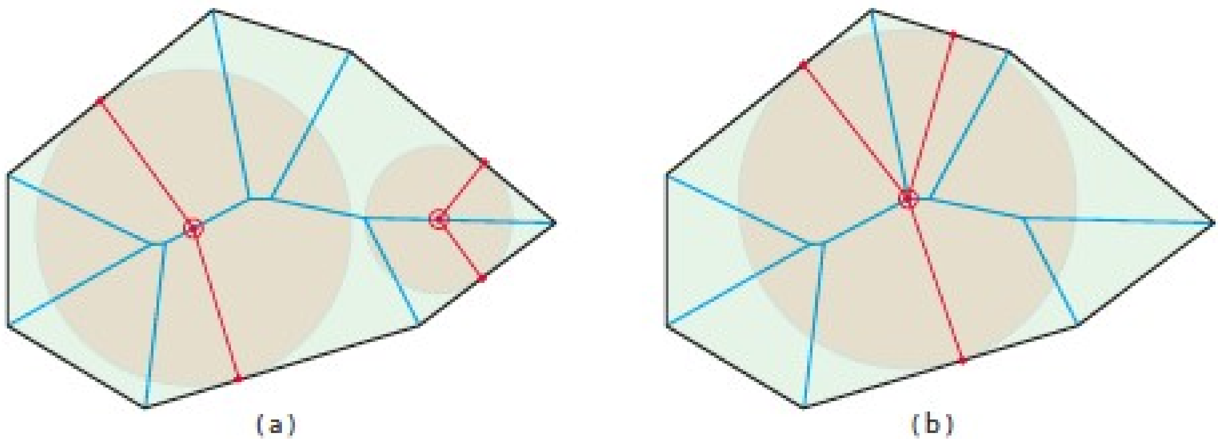
• Eixo Medial de Polígonos Convexos: contrução

- Sejam $v_1,...,v_n$ os vértices de um polígono convexo e $e_i=v_iv_{i+1}$ as arestas de P
- O segmento $M(P)$ incidente a v_i é uma bissetriz em v_i cujos pontos são centros de discos tocando e_{i-1} e e_i



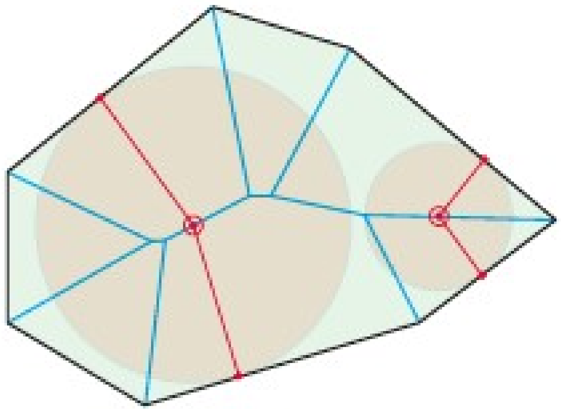
• Eixo Medial de Polígonos Convexos: propriedades

- O que não é trivial é o que ocorre quando as bissetrizes se encontram no interior e como é definido o interior da árvore M(P)

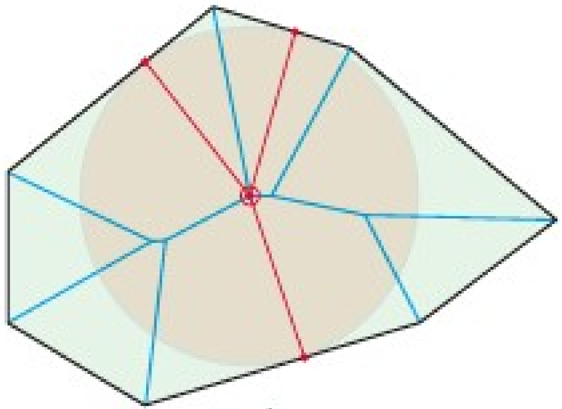


• Eixo Medial de Polígonos Convexos: propriedades

- O que não é trivial é o que ocorre quando as bissetrizes se encontram no interior e como é definido o interior da árvore M(P)



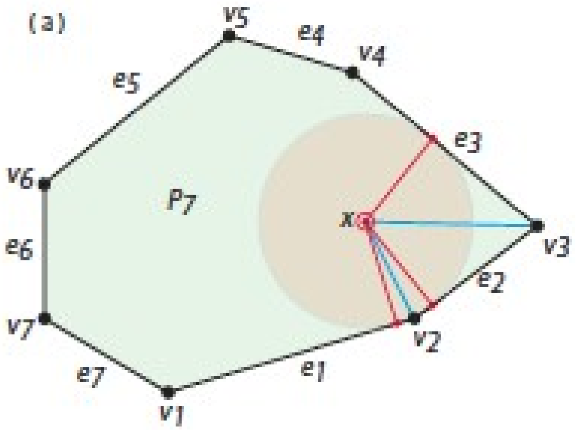
(a)



(b)

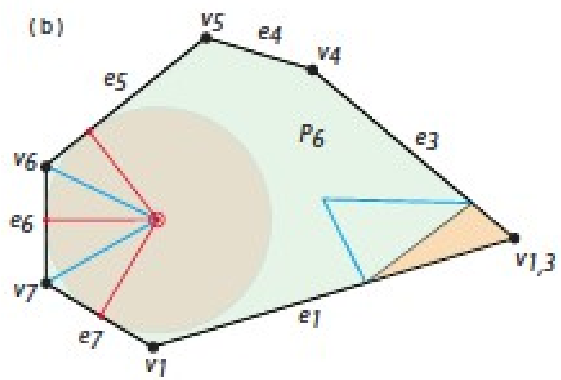
• Eixo Medial de Polígonos Convexos: Algoritmo Recursivo

- Considere um polígono com 7 vértices P_7 e imagine os bissetores de cada cada ângulo nos vértices crescendo durante a transformação de incêndio
- Em um tempo t, o primeiro par intersecta
- Quase sempre a interseção é de bissetores de dois vértices adjacentes no caso v_2 e v_3 e o grau é tipicamente 3



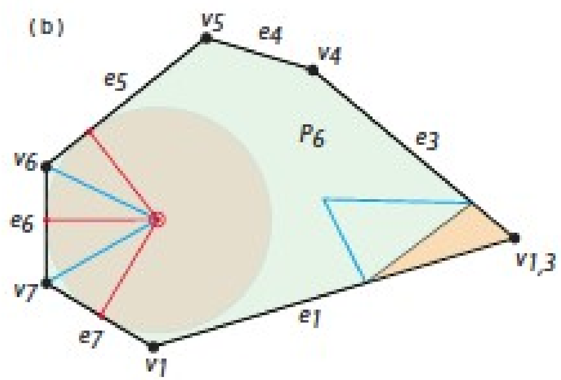
• Eixo Medial de Polígonos Convexos: Algoritmo Recursivo

- Conforme o incêndio prossegue, a bissetriz de e_1 e e_3 emerge em x
- A aresta e_2 não mais tem efeito na geração *de M(P)* (a queimada correspondente a e_2 se extingue)
- A partir de então podemos estender e_1 e e_3 para se encontrar em um novo vértice $v_{1,3}$ de um polígono com um vértice a menos P_6



• Eixo Medial de Polígonos Convexos: Algoritmo Recursivo

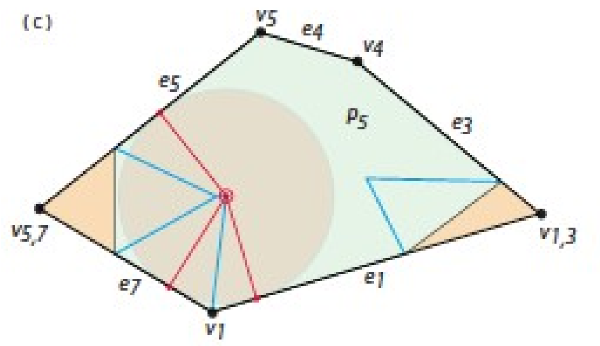
- O eixo medial $M(P_7)$ pode ser construído a partir de uma alteração sobre o eixo $M(P_6)$ que ainda está em construção
- Para construir $M(P_6)$ identificamos v_6 e v_7 como as novas bissetrizes a se encontrarem



• Eixo Medial de Polígonos Convexos: Algoritmo Recursivo

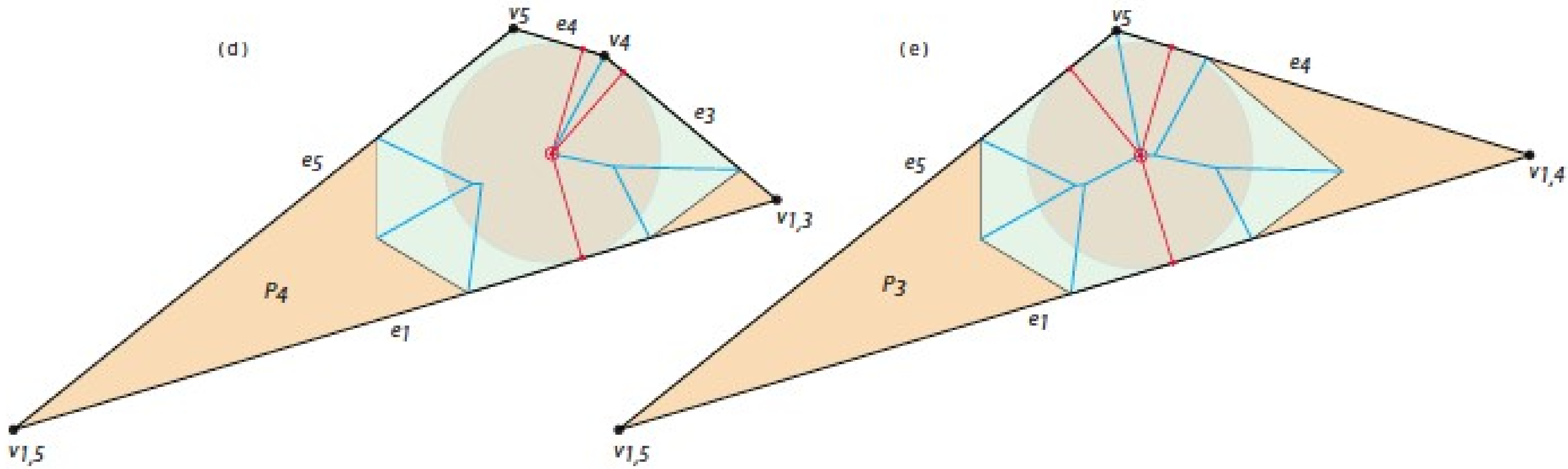
- Após a "extinção" de e_6 estendemos v_6 e v_7 e criamos $v_{5,7}$ do polígono P_5

- Agora $v_{5,7}$ e v_1 são as bissetrizes a se encontrarem



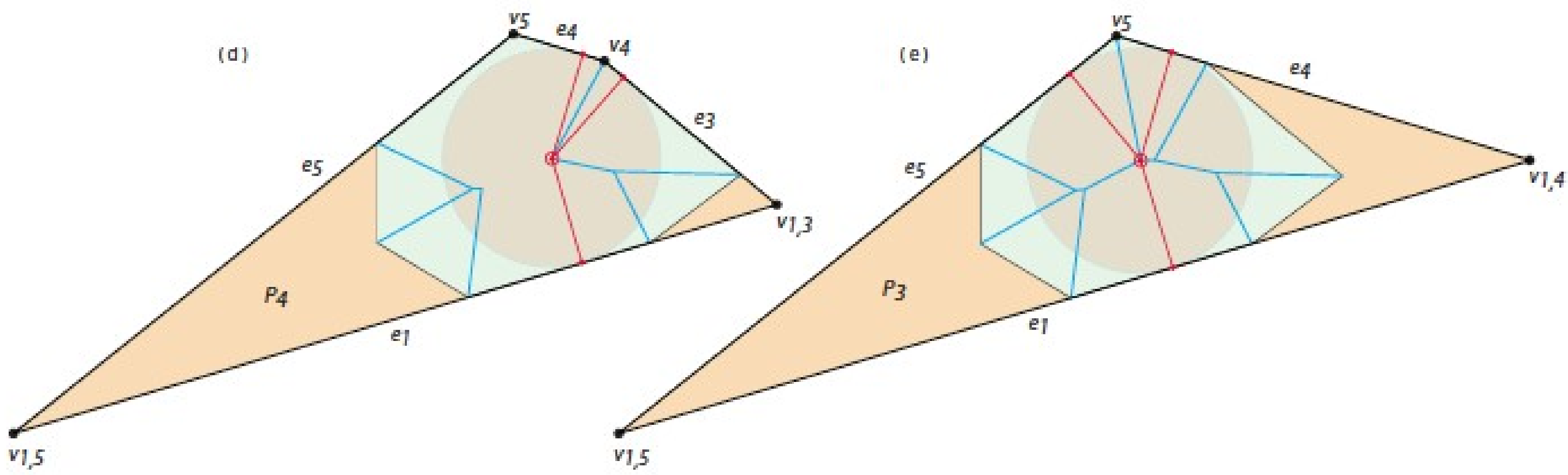
Eixo Medial de Polígonos Convexos: Algoritmo Recursivo

- Repetindo o processo a aresta e_7 é extinta e criamos o vértice $v_{1,5}$
- As próximas bissetrizes a se encontrarem são $v_{1,3}$ e v_4
- Após o encontro de $v_{1,3}$ e v_4 , e_4 é extinta

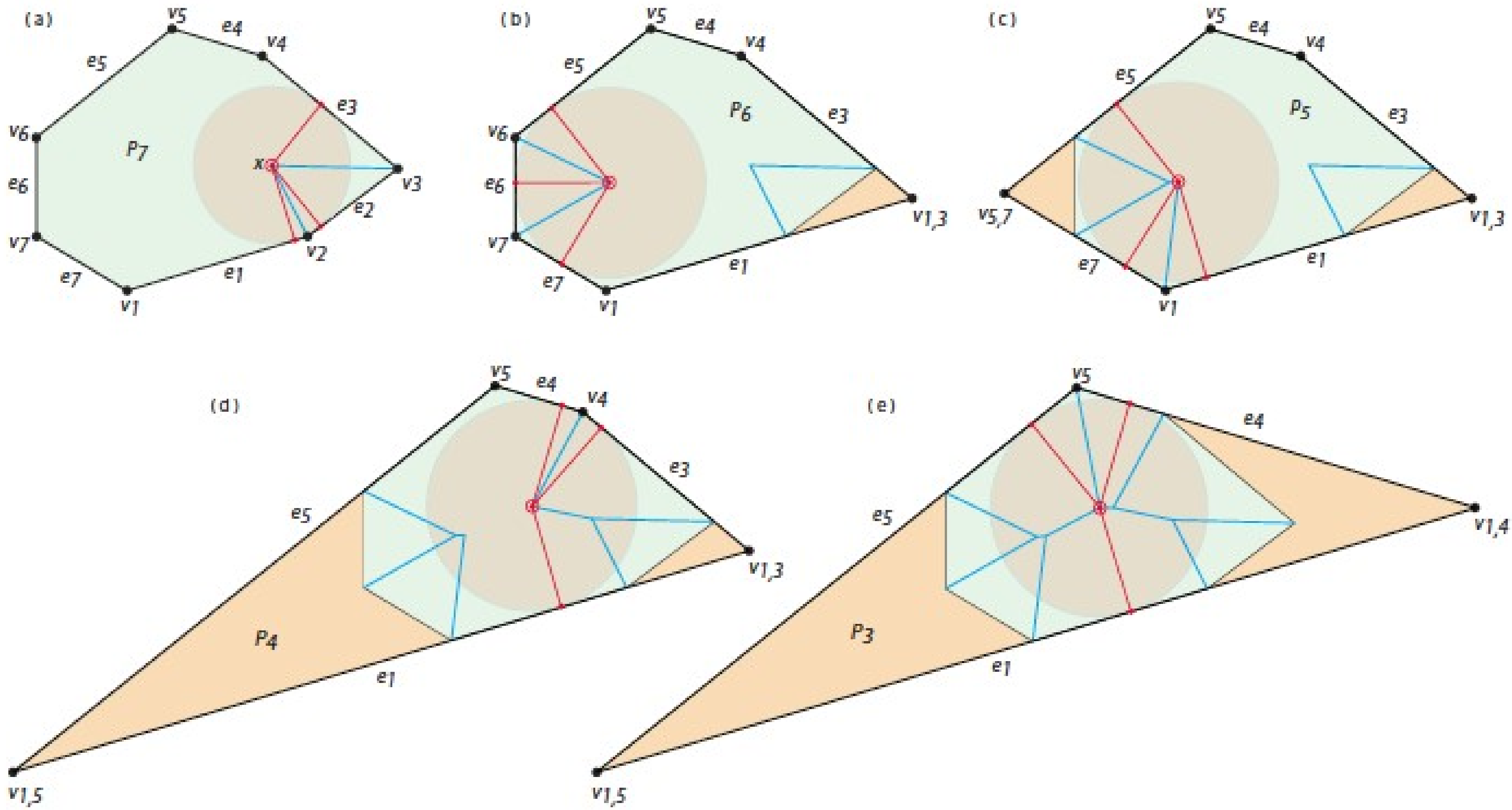


• Eixo Medial de Polígonos Convexos: Algoritmo Recursivo

- Finalmente geramos o polígono P_3 estendendo e_4 e e_1 e fazemos as bissetrizes de $v_{1,5}$, v_5 e $v_{1,4}$ se encontrarem

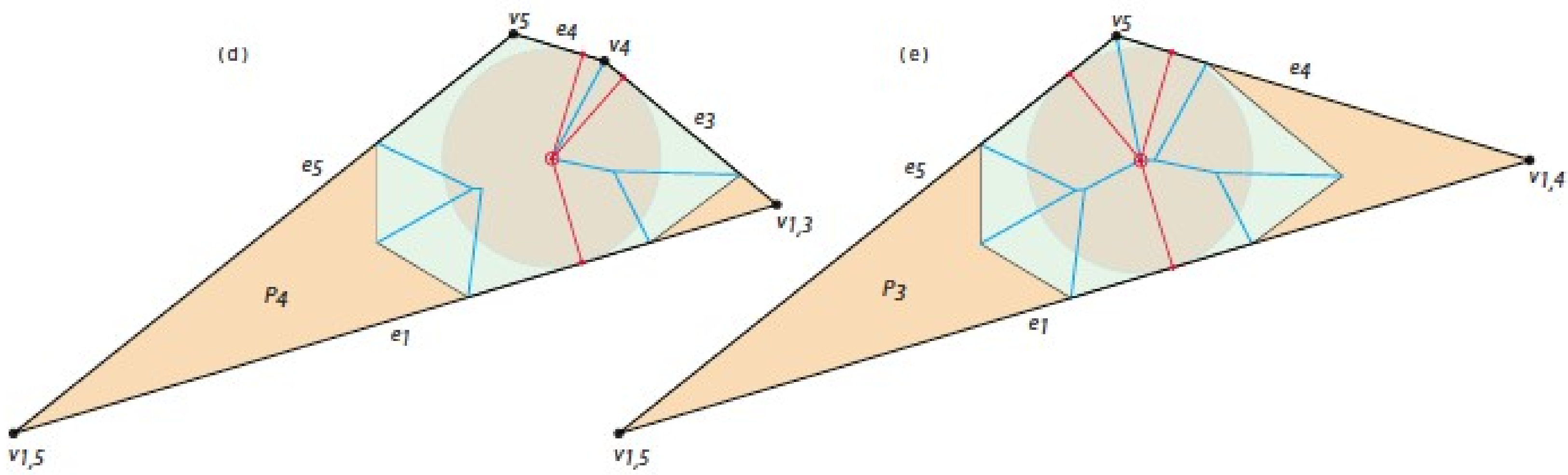


- **Eixo Medial de Polígonos Convexos: propriedades**



- **Eixo Medial de Polígonos Convexos: Algoritmo Recursivo**

  - O eixo medial do polígono P_3 são as bissetrizes dos seus 3 ângulos



- **Eixo Medial de Polígonos Convexos: Algoritmo Recursivo**

MEDIAL AXIS $O(n^2)$

Let P_n be an n-vertex convex polygon. Identify the two adjacent vertices v_i and v_{i+1} whose bisectors meet first, at point x. Extend edges e_{i-1} and e_{i+1} over e_i to meet at a new vertex v and call the resulting polygon P_{n-1}. Compute $M(P_{n-1})$ recursively and delete xv from $M(P_{n-1})$ and add xv_i and xv_{i+1} to form $M(P_n)$.

Eixo Medial de Polígonos Convexos: Algoritmo Recursivo

- Como determinar os bissetores que se encontram primeiro.
- Sabemos que os bissetores que se encontram primeiro são os de vértices adjacentes
- Logo, temos O(*n*) pares de bissetores adjacentes para serem comparados
- Para determinar quem é o par que se encontra primeiro

• Eixo Medial de Polígonos Convexos: Algoritmo Recursivo

- Para determinar quem é o par que se encontra primeiro lembramos que o tempo t associado a um ponto m de M(P) é o raio do círculo maximal em m

- As arestas mais próximas de m são determinadas da seguinte forma:

  - Seja v_i e v_{i+1} os bissetores que geraram *m*, então as três arestas tangentes na interseção *m* são as três arestas consecutivas e_{i-1},e_i e e_{i+1}

  - Assim o tempo de encontro de dois bissetores é dado pelo raio do disco que tangencia e_{i-1},e_i e e_{i+1} centrado na interseção m dos bissetores

Eixo Medial de Polígonos Convexos: Análise de complexidade do algoritmo Recursivo

- O custo para encontrar os bissetores que se encontram primeiro é O(*n*) já que existe *n* pares de bissetores a serem testados e o tempo pode ser calculado em tempo O(1)

- O cálculo do polígono P_{n-1} a partir de P_n pode ser obtido intersectando as arestas e_{i-1} e e_{i+1}

- Como podemos obter recursivamente $M(P_{n-1})$ em tempo O(n) e a partir de $M(P_{n-1})$ construir M(P) o custo total do algoritmo é $O(n^2)$

• Eixo Medial de Polígonos Não-Convexos: Propriedades

- Para polígonos não-convexos, os vértices reflexos introduzem novos elementos
- Apesar de M(P) permanecer uma árvore cujas folhas são os vértices, as arestas da árvore associada a vértices reflexos são arcos de parábola
- Lembre: uma parábola é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de um ponto (foco) e uma reta (diretriz)

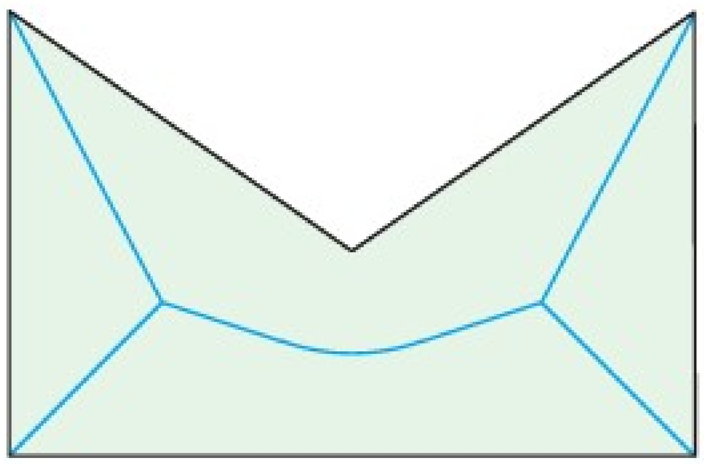
- **Eixo Medial de Polígonos Não-Convexos: Propriedades**

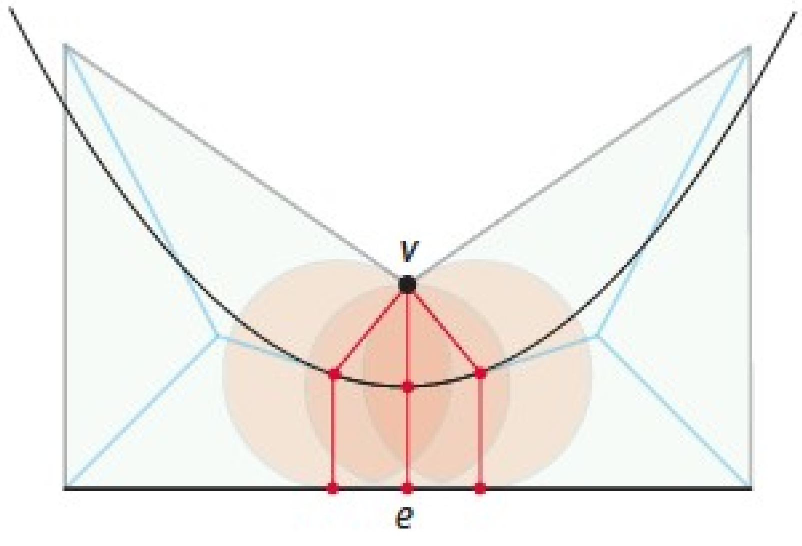
- Para polígonos não-convexos, os vértices reflexos introduzem novos elementos
- Apesar de M(P) permanecer uma árvore cujas folhas são os vértices, as arestas da árvore associada a vértices reflexos são arcos de parábola
- Lembre: uma parábola é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de um ponto (foco) e uma reta (diretriz)

- **Eixo Medial de Polígonos Não-Convexos: Propriedades**

- Considere o polígono P_5. Os bissetores emergem dos 4 vértices convexos e se encontram em pontos de grau 3 de M(P) e continuam como antes.

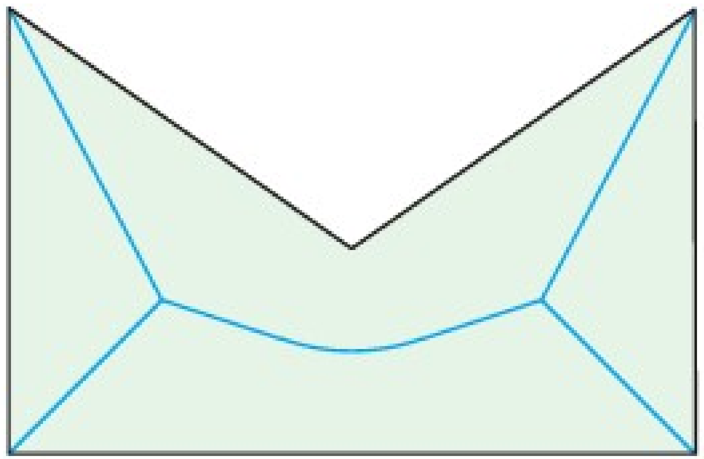
- Entretanto, eles se juntam suavemente a um arco de parábola com foco em v e diretriz dada pela reta contendo a aresta e

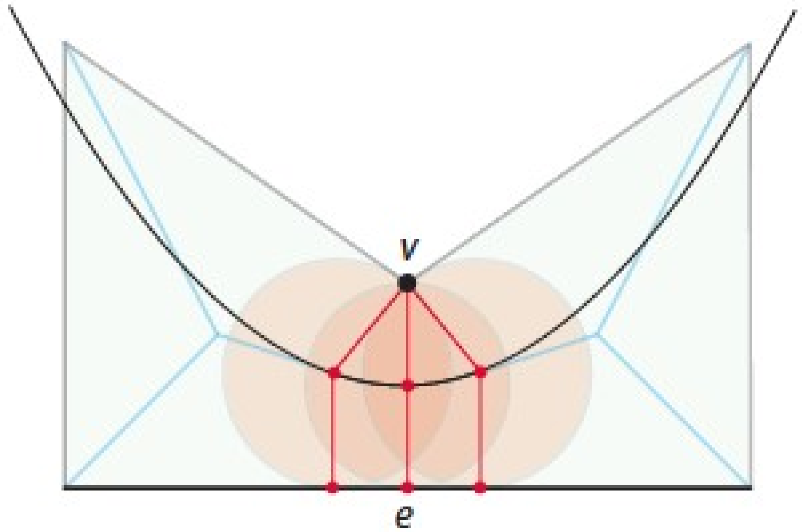




- **Eixo Medial de Polígonos Não-Convexos: Propriedades**

  - O surgimento de estruturas curvas no eixo medial torna seu cálculo mais complexo ainda que seja possível encontrar algoritmos eficientes





• Esqueletos retilíneos

- Apesar dos eixos mediais serem matematicamente elegantes e de utilidade prática, a presença de arcos parabólicos pode ser problemático em algumas aplicações
- Uma alternativa ao Eixo Medial é o Esqueleto Retilíneo S(P) para um polígono P

• Esqueletos retilíneos

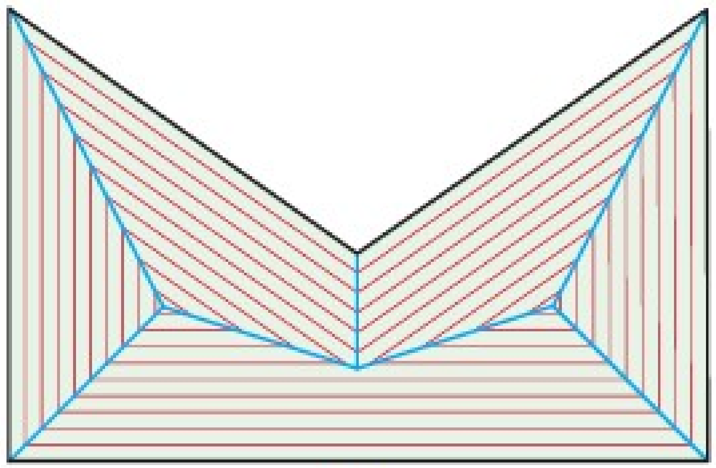
•O Esqueleto Retilíneo foi proposto nos anos por Aichholzer et al para o interior de um polígono e posteriormente para figuras gerais no plano formadas por segmentos de reta

•O Esqueleto Retilíneo tem sido aplicado em vários contextos:

- Construir um telhado poligonal a partir de paredes [1]
- Reconstruir um terreno a partir do mapa de rios
- Definir padrões de dobra que façam com que as arestas de um polígono de papel sejam colineares [1] e [6]

• <u>Esqueletos retilíneos</u>

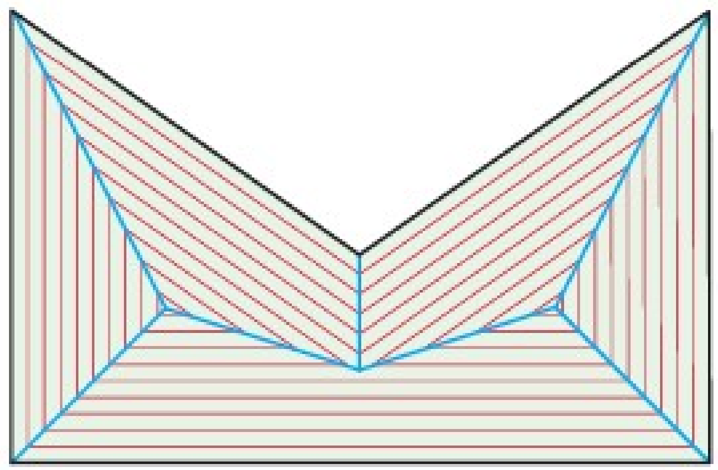
- O Esqueleto retilíneo pode ser explicado através da Transformação de Queimada (*Grassfire Transform*)
- Visualize ∂P encolhendo via uma translação paralela de todas as arestas a mesma velocidade para o interior da forma.
- Todos os vértices, incluindo os reflexos viajam sobre as bissetrizes



(b)

• Esqueletos retilíneos

- De fato, em vértices convexos as arestas contraem
- Em vértices reflexos as arestas expandem

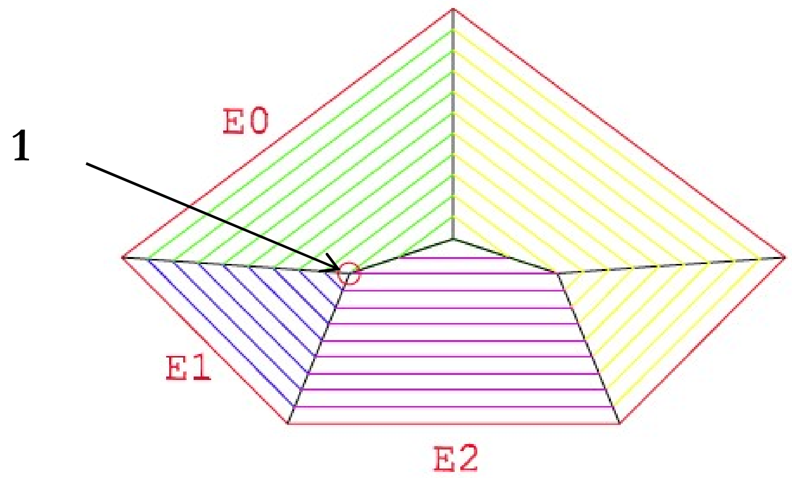


(b)

• Esqueletos retilíneos

- O processo de propagação das frentes de queimada prossegue até que surjam dois eventos:

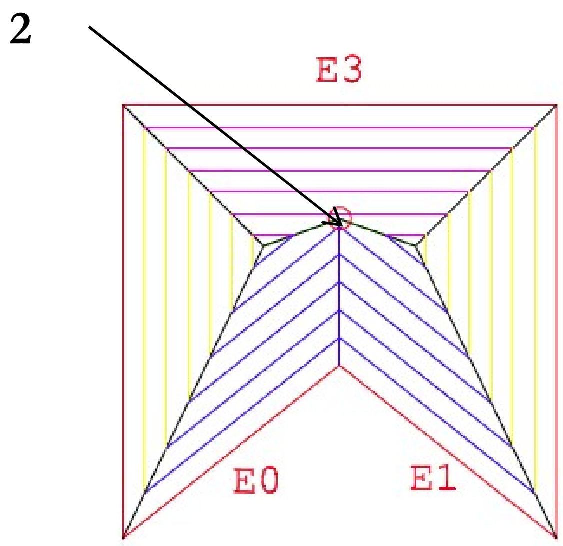
  1 - Duas arestas E_{i-1} e E_{i+1} adjacentes a E_i colidam e E_i colapse , isto é, E_i encolha para comprimento zero (*Edge Event*)



• Esqueletos retilíneos

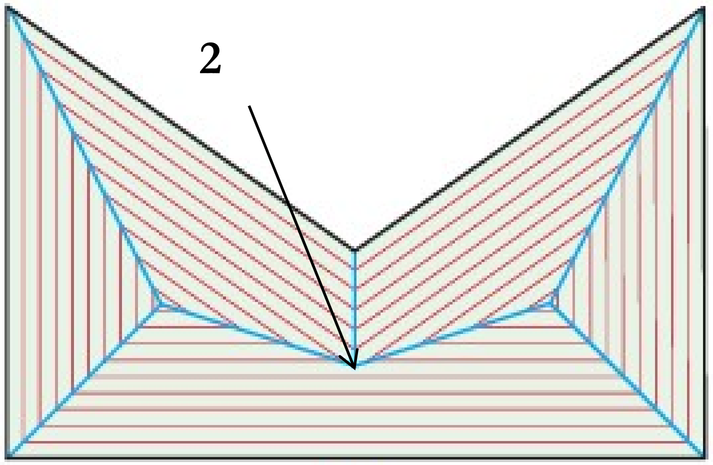
- O processo de propagação das frentes de queimada prossegue até que surjam dois eventos:

  2 – Uma aresta E_i colida simultaneamente com duas arestas E_j e E_{j+1} consecutivas quebrando E_i no ponto de interseção (Split Event)



• Esqueletos retilíneos

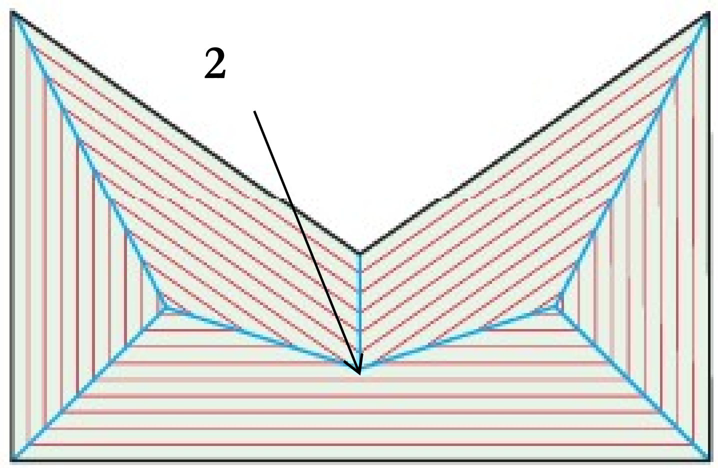
- Os eventos *Edge Event* e *Split Event* mudam a topologia do próximo offset do polígono
- Com o *Edge Event* o polígono tem menos arestas
- Como o *Split Event* o polígono é quebrado em dois diferentes polígonos



(b)

• Esqueletos retilíneos

- O processo de *offsetting* (propagação da queimada ou frente de onda) para em um sub-polígono quando sua área reduz a zero

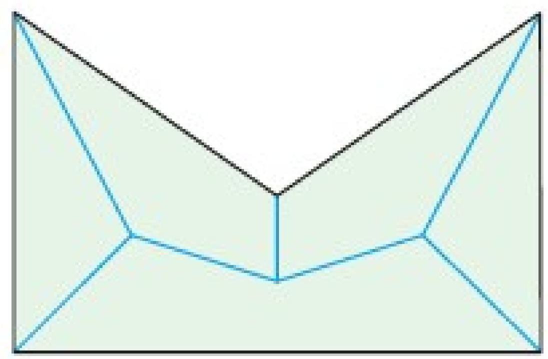


(b)

• Esqueletos retilíneos

•Como no Eixo Medial, S(P) é uma árvore de segmentos retos cujas folhas são os vértices de P

•O segmentos são retos porque são sempre pedaços de bissetrizes

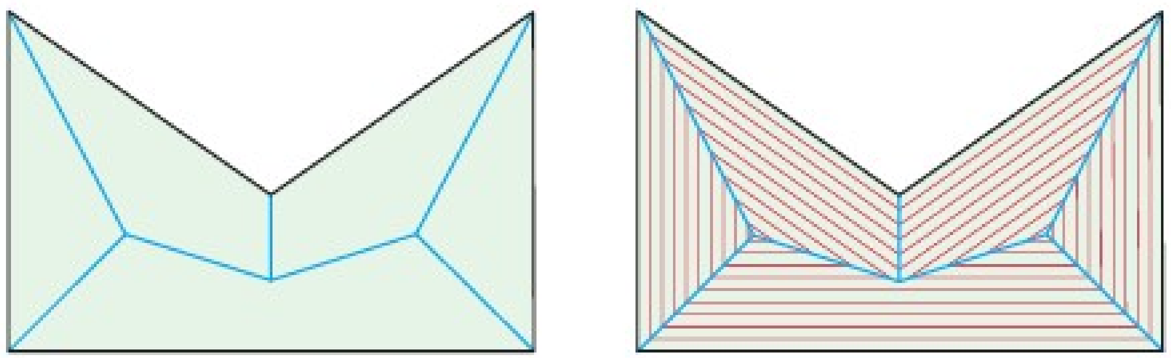


(a)

• Esqueletos retilíneos

- Os traços dos vértices que se movem formam bissetores de S(P)

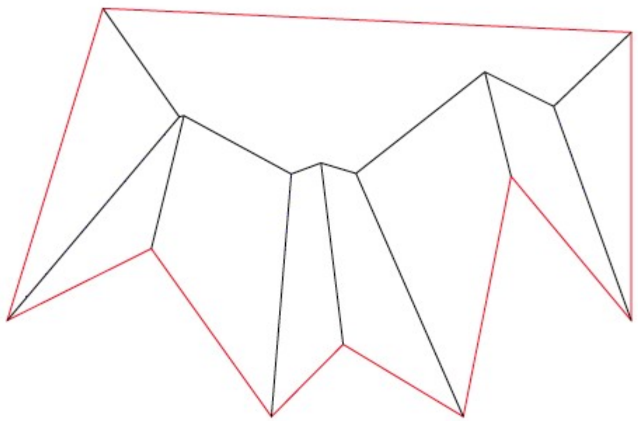
- Os instantes ou pontos onde os eventos ocorrem formam os nós de S(P)

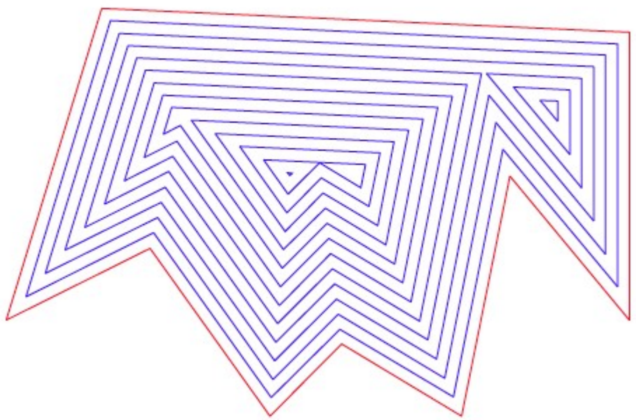


(a) (b)

• Esqueletos retilíneos

- Cada bissetor é definido por duas arestas e é um segmento da bissetriz do ângulo formado pelas duas arestas
- *Bissetores de contorno* são aqueles definidos por arestas consecutivas no polígono original
- *Bissetores internos* são definidos por arestas que são consecutivas nos offsets do polígono original





• Esqueletos retilíneos

- Os eventos (que são colisões entre arestas) ocorrem em um instante unicamente determinado pela distância Euclidiana entre as arestas transladadas que colidem e as retas que suportam as suas versões originais

- A distância é entre as retas que contém as arestas e não entre as arestas em si

- Tais distâncias definem uma ordem em que os eventos ocorrem

• Esqueletos retilíneos

- Como cada evento modifica potencialmente a topologia do polígono, não é possível prever todos os eventos de antemão

- A ocorrência de um evento diretamente afeta a ocorrência de um evento futuro

- A corretude de um algoritmo baseado na detecção dos eventos requer a correta ordenação de tais eventos

- Isso é feito normalmente via uma estrutura de prioridades

- **Esqueletos retilíneos**

  - Diferentemente do Eixo Medial, o Esqueleto particiona o polígono em *n* regiões, precisamente uma por aresta

  - Esta propriedade é interessante e é utilizada na arte do Origami

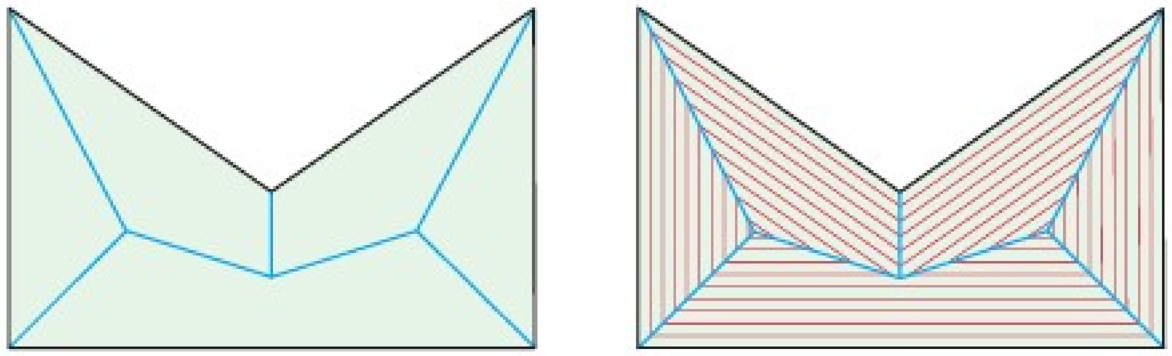
  - Uma outra característica é que o Esqueleto não é um diagrama de Voronoi porque não é definido em função da distância entre arestas mas entre as retas que contém as arestas

Esqueletos retilíneos x Eixos mediais

- Polígonos convexos: as estruturas são equivalentes
- Polígonos não convexos:
  - Esqueletos tem arestas sempre retilíneas, eixos mediais tem trechos formados por arcos de parábolas
  - Esqueletos possuem menos arestas que eixos mediais
  - Esqueletos não são diagramas de Voronoi

• Esqueletos retilíneos: algoritmos

- Os algoritmos para obtenção de esqueletos retilíneos são bem mais lentos que os para eixo medial
- A evolução das translações e o acompanhamento dos vértices reflexos tem impacto não local
- Isto impede o uso de técnicas de divisão-por-conquista e incrementais



(a) (b)

• Esqueletos retilíneos: algoritmos

- Na tabela abaixo seguem as complexidades de diferentes algoritmos encontrados na literatura

- *n* é o número de vértices no total e *r* é o número de vértices reflexos e *e* uma constante arbitrária positiva

Tempo	Espaço	Referência
$O(n^2 \log n)$	$O(n)$	[2]
$O(nr \log n)$	$O(nr)$	[1,5]
$O(n \log n + nr \log(n/r))$	$O(nr)$	[1,4,5]
$O(n \log n + nr + r^2 \log r)$	$O(n)$	[2,5]
$O(n \log n + nr)$	$O(n + r^2)$	[1,4,5]
$O(n^{1+e} + n^{8/11+e} r^{9/11+e})$	$O(n^{1+e} + n^{8/11+e} r^{9/11+e})$	[5]

• Esqueletos retilíneos: Algoritmo de Felkel

Algoritmo EsqueletoRetilíneo(P)
Entradas: Um polígono P
Saída: S(P)

1.Inicialização

  a. Computar os bissetores de contorno iniciais
  b. Calcular os eventos iniciais, colocando-os em uma fila de prioridades ordenadas pelos instantes em que ocorrem:
     SplitEvents para vértices reflexos
     EdgeEvents para todos os bissetores de contorno consecutivos que se intersectem

2.Propagação:

  Processar cada evento por vez gerando novos bissetores que por sua vez produzem novos EdgeEvents

• Esqueletos retilíneos x Eixos mediais

[1] Oswin Aichholzer, Franz Aurenhammer, David Alberts, and Bernd Gärtner, "A Novel Type of Skeleton for Polygons", Journal of Universal Computer Science 1(12), pp. 752-761, 1995.

[2] Oswin Aichholzer and Franz Aurenhammer, "Straight Skeletons for General Polygonal Figures in the Plane", Proc. 2nd Ann. Int. Conf. Computing and Combinatorics (COCOON '96), Lecture Notes in Computer Science 1090, Springer, pp. 117-126, 1996.

[3] Francis Chin, Jack Snoeyink, and Cao An Wang, "Finding the Medial Axis of a Simple Polygon in Linear Time", Proc. 6th Ann. Int. Symp. Algorithms and Computation (ISAAC 95) , Lecture Notes in Computer Science 1004, pp. 382-391, 1995.

[4] David Eppstein, "Fast hierarchical clustering and other applications of dynamic closest pairs", manuscript, July 1997.

[5] David Eppstein and Jeff Erickson, "Raising roofs, crashing cycles, and playing pool: applications of a data structure for finding pairwise interactions", manuscript, July 1997.

[6] Robert Lang, "A Computational Algorithm for Origami Design", Proc. 12th Ann. ACM Symp. Computational Geometry, pp. 98-105, 1996.

Eixo Medial e Esqueletos: Referências

•Satyan L. Devadoss, Joseph O'Rourke,
Discrete and Computational Geometry, Princeton University Press, 2011.

•http://compgeom.cs.uiuc.edu/~jeffe/open/skeleton.html

•http://www.cgal.org/UserWorkshop/2004/straight_skeleton.pdf

•As imagens utilizadas (excluindo as feitas pelo expositor) foram obtidas de:

- •Satyan L. Devadoss, Joseph O'Rourke,
  Discrete and Computational Geometry, Princeton University Press, 2011.

- •http://compgeom.cs.uiuc.edu/~jeffe/open/skeleton.html

- •http://www.cgal.org/UserWorkshop/2004/straight_skeleton.pdf