Geometria Computacional

Professor:

Anselmo Montenegro
www.ic.uff.br/~anselmo

Conteúdo: Aula 2

- Primitivas Geométricas

Roteiro

- Introdução
- Operações primitivas
  - Distâncias
  - Ângulos
  - Ângulos orientados
  - Áreas
  - Áreas orientadas
  - Áreas de polígonos

Primitivas Geométricas: introdução

- Todos os algoritmos são baseados em construções elementares

- Tais construções são baseadas em um número fixo de operações ainda mais elementares sobre reais

- Construções elementares podem ser incorporadas ao conjunto de operações elementares sem alterar a análise de complexidade assintótica dos algoritmos

Primitivas Geométricas: introdução

- Exemplos de construções elementares:
  - Distâncias
  - Ângulos
  - Ângulos orientados
  - Áreas
  - Áreas orientadas
  - Interseção de segmentos (aula 5)
  - Coordenadas baricêntricas (aula 5)
  - Localização ponto-polígono (aula 5)
  - Círculos mínimos (aula 5)

Primitivas Geométricas: introdução

- As construções operam sobre objetos geométricos
- Tais objetos são representados por coordenadas euclidianas dos pontos que as definem
- Muitas das técnicas se baseiam em Geometria Analítica
- São baseadas em operações com vetores usando os conceitos de norma euclidiana e produto interno

Primitivas Geométricas: operações primitivas

- Dados dois vetores *x* e *y* do R^n e λ um escalar definimos as seguintes operações primitivas

  - Soma vetorial – somavetorial(x,y) = $x + y$
  - Multiplicação escalar – multescalar(λ,x) = λx
  - Produto escalar – prodescalar(x,y) = $x \cdot y = \sum_{i=1..,n} x_i y_i$
  - Norma – norma(x) = ||x||= $\sqrt{\sum_{i=1..,n} x_i x_i}$

Primitivas Geométricas: operações primitivas

- Uma métrica em um conjunto X é uma função $d : X \times X \rightarrow R$ satisfazendo:

    1. d (x,y) $\geq$0, (não negatividade)
    2. d (x,y) =0, se e somente se identidade dos indiscerníveis)
    3. d(x,y)=d(y,x)
    4. d (x,z) $\leq$d(x,y)+d(y,z), (desigualdade triangular)

- Um espaço métrico é um par ordenado (M,d), onde M é conjunto e d e é um métrica

Primitivas Geométricas: operações primitivas

- Dado um espaço vetorial *V* em um corpo K, uma norma é uma função $p : V \to R$ que satisfaz

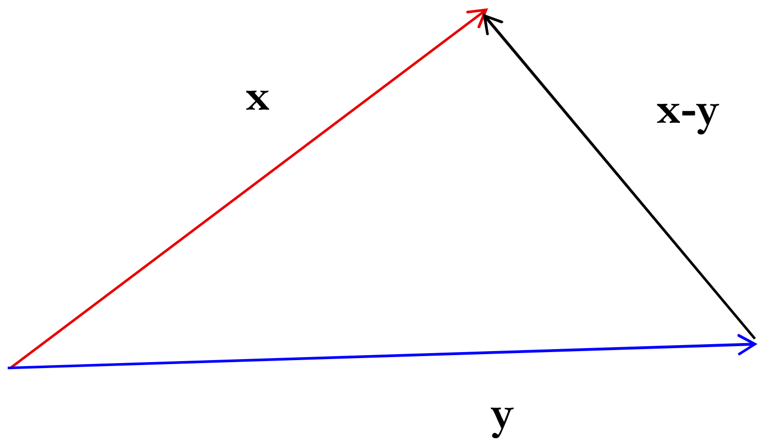
  1. p (au) =|a|p(u), a um escalar, (não negatividade)
  2. p(u) =0, se e somente se u=**0**
  3. p (u+v) ≤ p(u) + p(v), (desigualdade triangular)

- Seminorma: somente 1 e 2 são satisfeitas

- Prove que: p(**0**) =0 e que p(v) ≥0

Primitivas Geométricas: distâncias

- Dados dois vetores *x* e *y* do R^n
  - Distância(x,y) = norma(x-y)



Primitivas Geométricas: distâncias

- Ângulo entre dois vetores *x* e *y*

$$\text{ângulo}(x,y) = \arccos\left(\frac{x.y}{\|x\|\|y\|}\right)$$

- Motivada pela identidade

$$x.y = \|x\|\|y\|\cos\theta$$

onde *x* e *y* são vetores do R^2 ou R^3 e $\theta \in [0,\pi]$
é ângulo formado por eles no sentido comum da geometria

Primitivas Geométricas: ângulos

- Ângulo entre dois vetores *x* e *y*

$$\text{ângulo}(x,y) = \arccos\left(\frac{x.y}{\|x\|\|y\|}\right)$$

- Motivada pela identidade

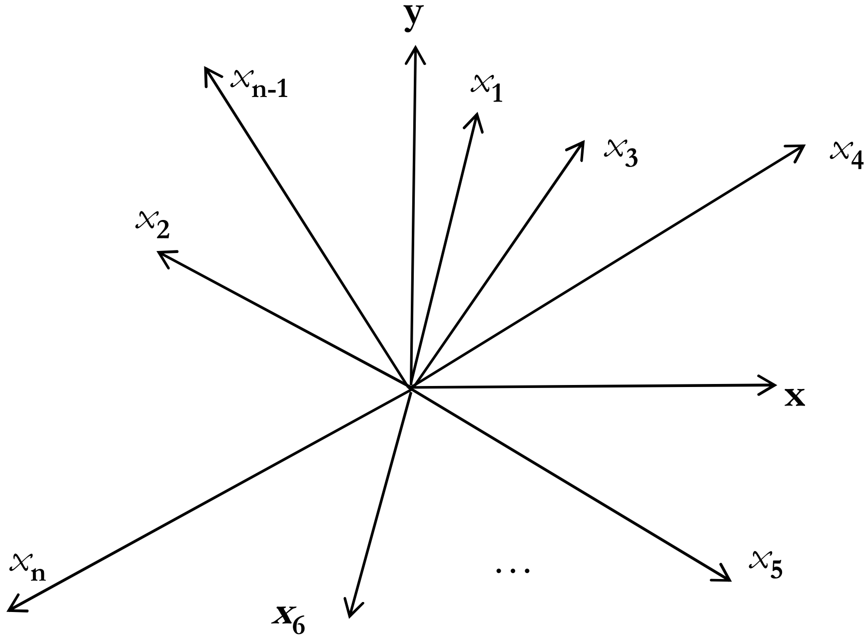
$$x.y = \|x\|\|y\|\cos\theta$$

onde *x* e *y* são vetores do R^2 ou R^3 e $\theta \in [0,\pi]$

é ângulo formado por eles no sentido comum da geometria

Primitivas Geométricas: ângulos orientados

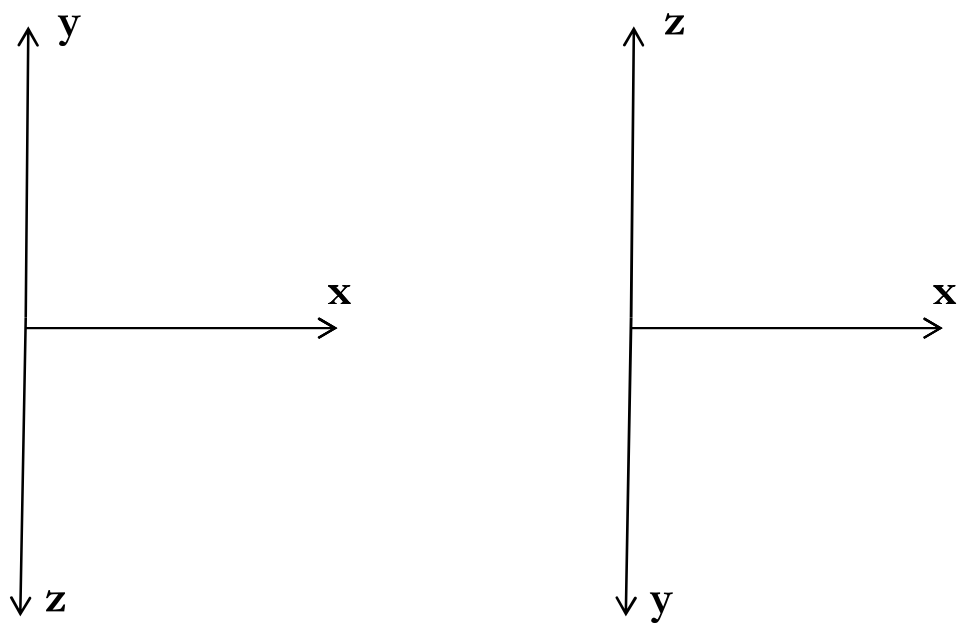
- Considere o seguinte problema: dados *n* vetores $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R^2$ ordená-los angularmente no sentido anti-horário



Resp: $\{x_4, x_3, x_1, x_{n-1}, x_2, x_n, x_6, \ldots, x_5\}$

Primitivas Geométricas: ângulos orientados

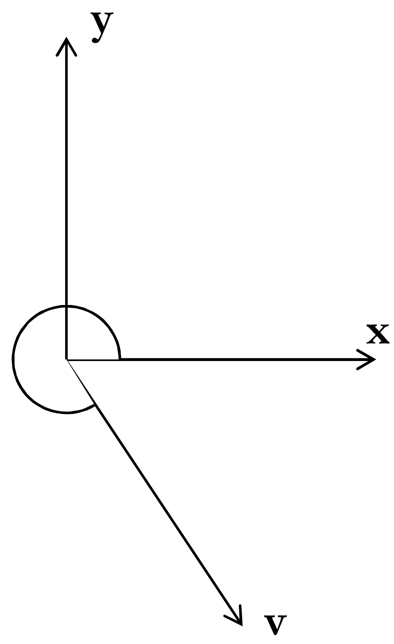
- O conceito de ângulo é incapaz de distinguir orientações pois ângulo(x,y) é uma função simétrica



- ângulo(x,y), ângulo(x,z) e ângulo(y,z) são indistinguíveis nas duas configurações

Primitivas Geométricas: ângulos orientados

- Ângulo orientado: comprimento do arco correspondente no círculo unitário, orientado no sentido anti-horário e tomado a partir do eixo horizontal.



Primitivas Geométricas: ângulos orientados

- Considerando o vetor unitário x = (1,0) temos a seguinte operação:

$$\hat{a}nguloorientado(x,v)=\begin{cases}\hat{a}ngulo(x,v), v_y \geq 0\\ -\hat{a}ngulo(x,v), v_y < 0\end{cases}$$

$$\hat{a}nguloorientado(x,v) \in (-\pi,\pi)$$

Primitivas Geométricas: pseudo-ângulos

- A operação para determinação de ângulos utiliza a função arcoseno que, a princípio, não está dentro do conjunto de operações que não altera a complexidade assintótica

- Atualmente este fato pode ser ignorado devido a tais operações serem realizadas em *hardware* em tempo constante

- Uma alternativa é definir medidas de pseudo-ângulos baseadas em uma funções monótonas do cosseno do ângulo calculado como

$$\cos\theta = \frac{x.y}{\|x\|\|y\|}$$

Primitivas Geométricas: pseudo-ângulos

- Possíveis formas de se calcular o pseudo-ângulo

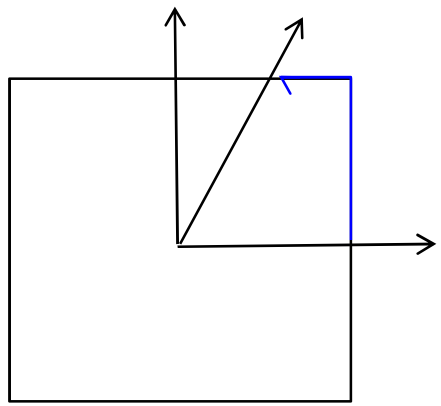
$$pseudoangulo(x, y) = 1 - \frac{x.y}{\|x\|\|y\|}$$

$$pseudoangulo(x, y) \in (0, 2)$$

- Exercício: mostre que a função acima é uma função monótona crescente de θ para $0 \leq \theta \leq \pi$

Primitivas Geométricas: pseudo-ângulos

- Exercício: mostre que e possível definir o pseudo–ângulo trocando o círculo unitário por uma curva contínua que seja o gráfico de uma função em coordenadas polares



- Mostre que o pseudo-ângulo definido no exercício anterior pode ser calculado usando 3 comparações, uma soma e uma subdivisão

- Defina anguloorientado(x,y) com base na operação pseudoangulo(x,y)

Primitivas Geométricas: orientações por produto vetorial

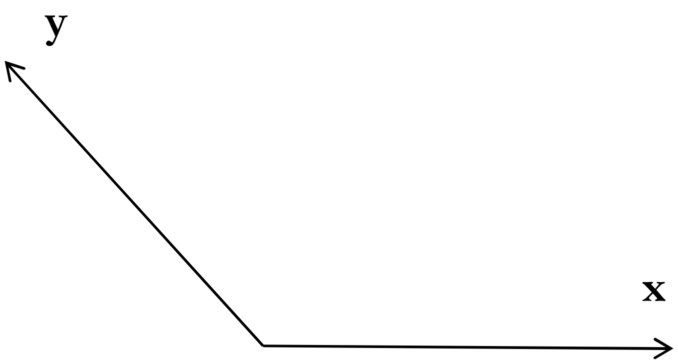
- É possível definir orientação relativa de vetores no R^2 e R^3 através de produtos vetoriais
- Produto vetorial: $\times : R^3 x R^3 \rightarrow R^3$
- $x \times y$: $(x_1,x_2,x_3) \times (y_1,y_2,y_3) = (x_2x_3 - x_3y_2,\ x_3y_1 - x_1y_3,\ x_1y_2 - x_2y_1)$
- O resultado é um vetor $x \times y$ ortogonal a x e y simultaneamente e com mesma orientação do triedro formado pelos eixos cartesianos

Primitivas Geométricas: orientações por produto vetorial

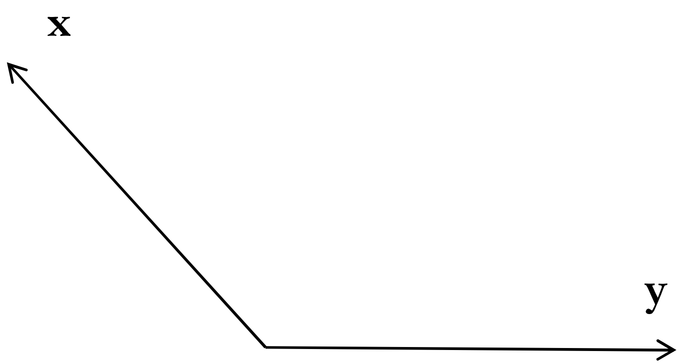
- Como usar o produto vetorial para definir orientações no R^2?
- Vetores $(x_1,x_2)\in R^2$ podem ser identificados com vetores $(x_1,x_2,0)\in R^3$
- Deste modo podemos definir a operação $\times:R^2 x R^2 \rightarrow R$ dada pelo escalar $(x_1y_2-x_2y_1)$

Primitivas Geométricas: orientações por produto vetorial

- O sinal positivo ou negativo do produto $x \times y$ indica se o ângulo orientado de x para y é positivo ou negativo, ou se y está à esquerda ou à direita de x



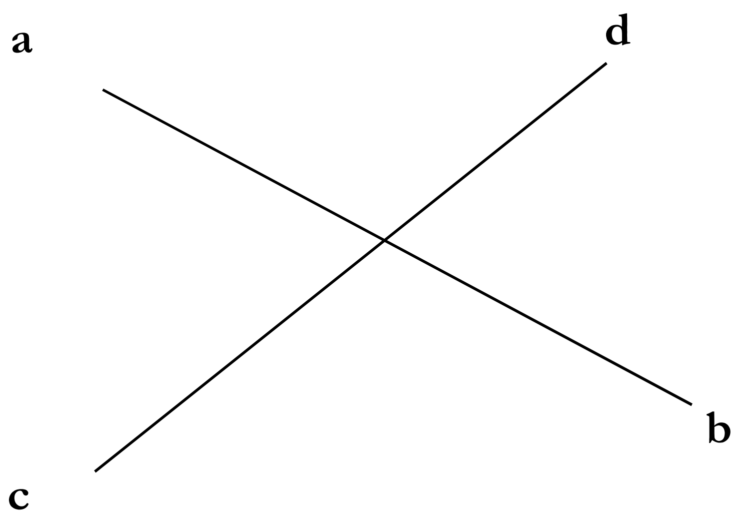
$x \times y > 0$



$x \times y < 0$

Primitivas Geométricas: orientações por produto vetorial

- Exercício: dados dois segmentos abertos *ab* e *cd* no plano, determinar se eles se interceptam. Que tipo de problema geométrico é este?



Primitivas Geométricas: áreas orientadas

- O valor absoluto do produto vetorial de dois vetores ***x*** e ***y*** no R^3 está associado à área do paralelogramo por eles definido como

$$\|x \times y\| = \|x\| \|y\| sen(\theta)$$

- No R^2, o valor da operação equivalente ao produto vetorial é igual a área orientada do paralelogramo por eles definido, que pode ser positiva ou negativa.

- Exercício: explique a relação acima.

Primitivas Geométricas: áreas de triângulos

- Teorema 2.1 (área de um triângulo) – sejam p_1, p_2 e p_3 pontos do R^2 ou R^3. Considere a expressão

$$S = \frac{1}{2}(op_1 \times op_2 + op_2 \times op_3 + op_3 \times op_1)$$

- Pode-se afirmar que:

(a) Em R^3, S é um vetor normal ao plano $p_1p_2p_3$ de norma igual a área de $p_1p_2p_3$ e orientado positivamente

(b) No R^2, S é um escalar igual à área orientada de $p_1p_2p_3$. S é positivo se $p_1p_2p_3$ estão no sentido anti-horário, nessa ordem

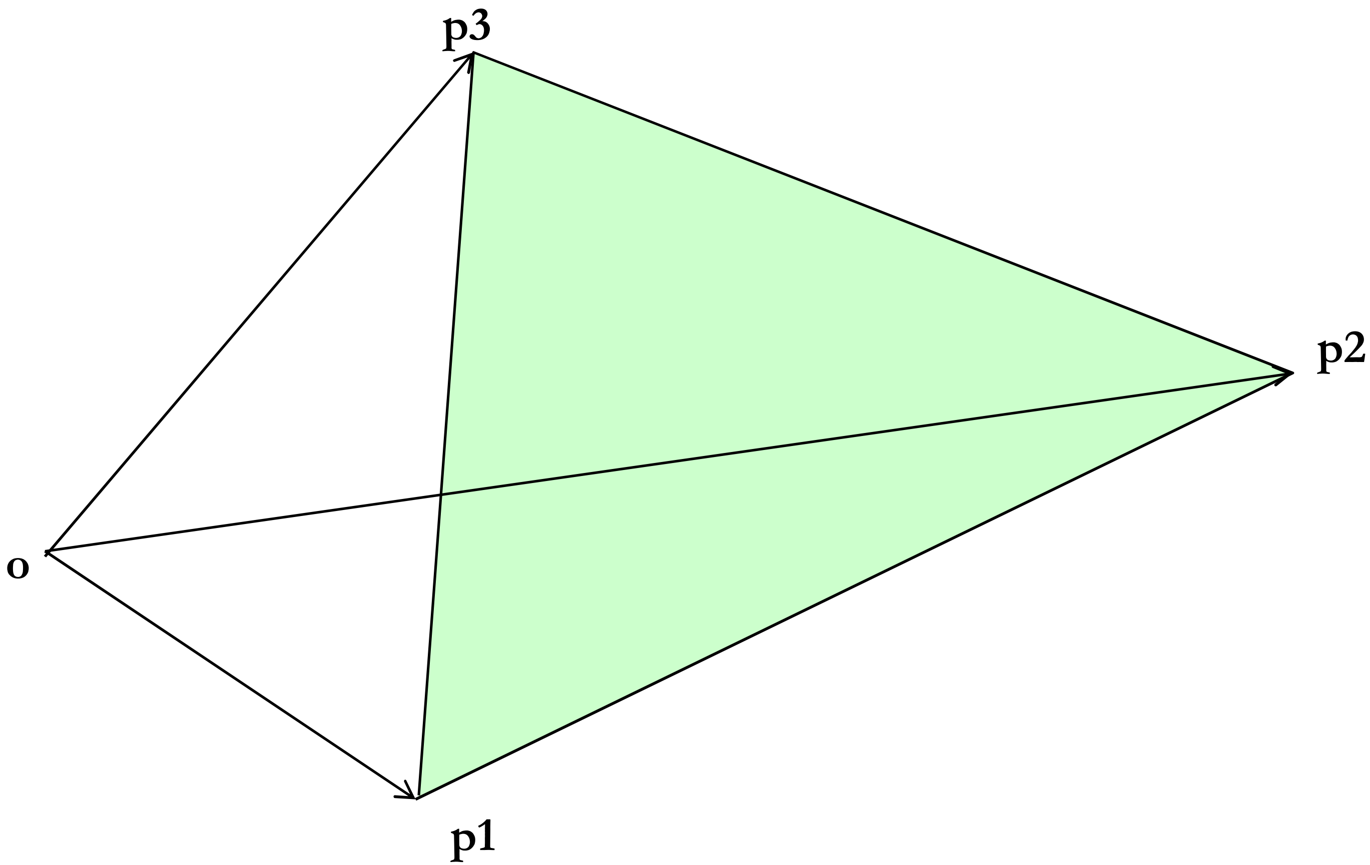
Primitivas Geométricas: áreas de triângulos

- Prova:

$$
\begin{aligned}
p_1p_2 \times p_1p_3 &= (op_2 - op_1) \times (\mathrm{op}_3 - \mathrm{op}_1) \\
&= op_2 \times op_3 - op_2 \times op_1 - op_1 \times op_3 + op_1 \times op_1 \\
&= op_1 \times op_2 + op_2 \times op_3 + op_3 \times op_1
\end{aligned}
$$

- Logo $S = ½(p_1p_2 \times p_1p_3)$ o que verifica (a) e (b)

Primitivas Geométricas: áreas de triângulos



Primitivas Geométricas: áreas de triângulos

- No R^2, fazendo O = (0,0) temos:

$$S = \tfrac{1}{2}(p_1 x p_2 + p_2 x p_3 + p_3 x p_1)$$

Primitivas Geométricas: áreas de poligonos

- Teorema 2.2 (Área de um polígono simples) – sejam p_1, $p_{2,\ldots,}$ p_n , (n≥3), a lista de vértices que define um polígono plano simples do R^2 ou R^3. Considere a expressão, onde o é um ponto arbitrário:

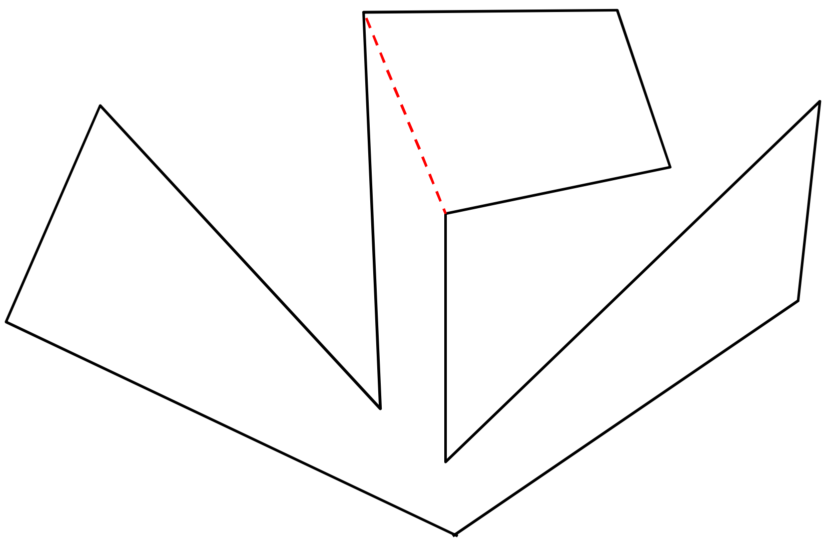
$$S = \frac{1}{2}(op_1 \times op_2 + op_2 \times op_3 + \ldots + op_n \times op_1)$$

(a) No R^3, S é um vetor normal ao plano $p_1p_2 \ldots p_n$ de norma igual a área de $p_1p_2p_3$ e orientado positivamente

(b) No R^2, S é um escalar de valor igual à área orientada de $p_1p_2 \ldots p_n$. S é positivo se $p_1p_{2.} \ldots p_n$ estão no sentido anti-horário, nessa ordem

Primitivas Geométricas: áreas de poligonos

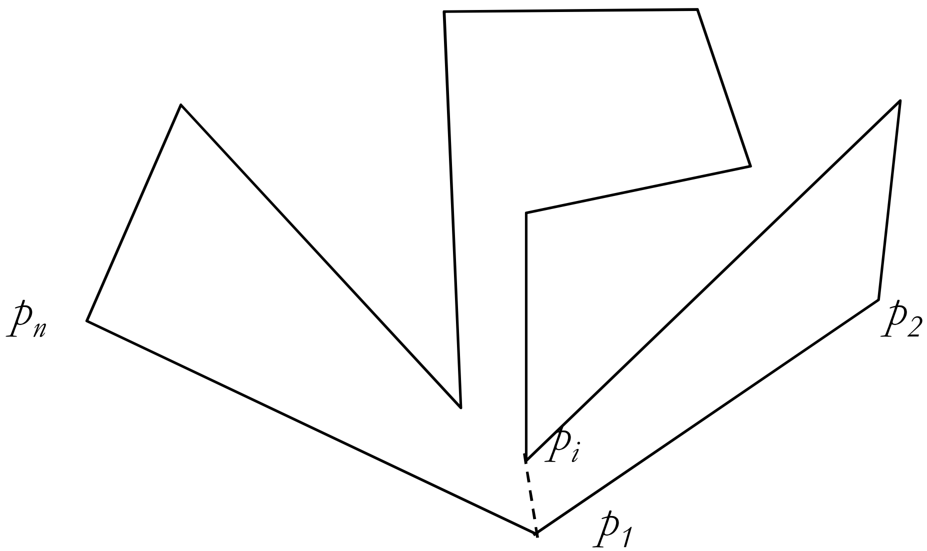
- Lema 2.1: Todo polígono simples P possui uma diagonal completamente contida em seu interior



- Provaremos tal lema posteriormente

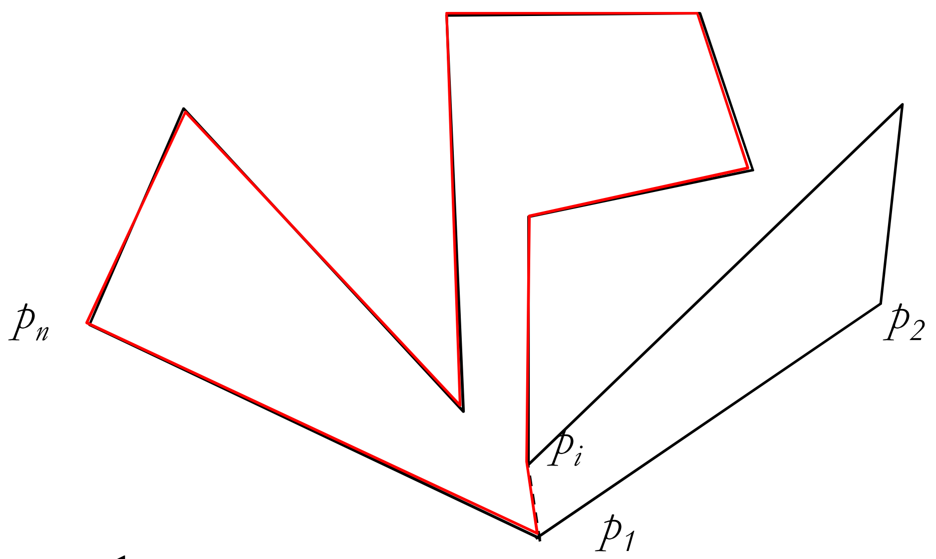
Primitivas Geométricas: áreas de poligonos

- Prova do Teorema 2.2 (por indução):
  - Caso base - pelo teorema 2.1, o resultado é válido para n=3.
  - Hipótese Indutiva - suponhamos que o resultado seja válido para polígonos com menos de n vértices e consideremos um polígono de n vértices $p_1 p_2 ... p_n$
  - Pelo Lema 2.1, $p_1 p_2 ... p_n$ admite uma diagonal, sem perda de generalidade, denominada $p_1 p_i$



Primitivas Geométricas: áreas de poligonos

- A diagonal p_1p_i define dois novos polígonos $p_1p_2 \ldots p_i$ e $p_ip_2 \ldots p_n$ com menos de n vértices cada um com áreas S' e S''



$$S' = \frac{1}{2}(op_1 \times op_2 + op_2 \times op_3 + \ldots + op_i \times op_1)$$

$$S'' = \frac{1}{2}(op_1 \times op_i + op_i \times op_{i+1} + \ldots + op_n \times op_1)$$

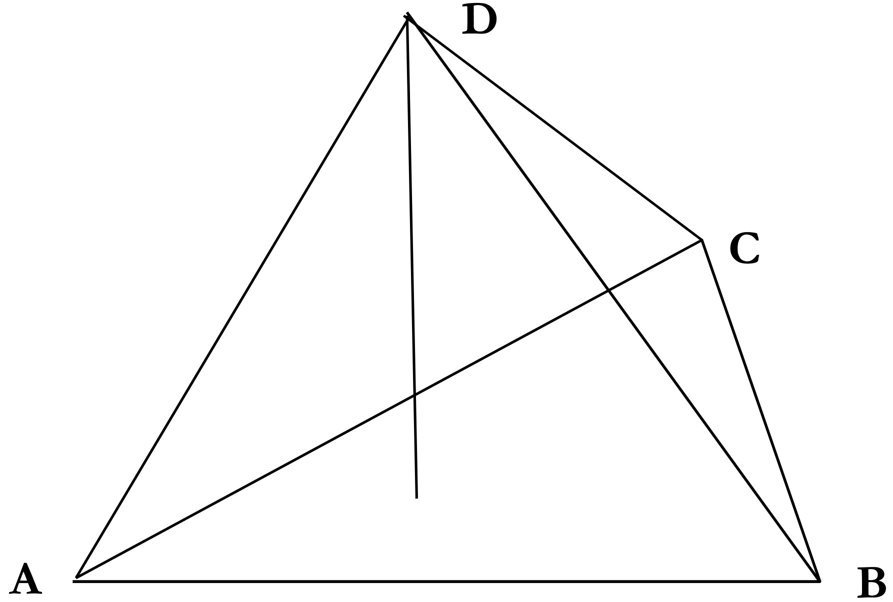
Primitivas Geométricas: áreas de poligonos

- Como S’ e S’’ são dois vetores de mesma direção e sentido podemos somá-los resultando em

$$S' + S'' = \frac{1}{2}(op_1 \times op_2 + op_2 \times op_3 + \ldots + op_i \times op_1)$$
$$+ \frac{1}{2}(op_1 \times op_i + op_i \times op_{i+1} + \ldots + op_n \times op_1)$$
$$= \frac{1}{2}(op_1 \times op_2 + op_2 \times op_3 + \ldots + op_n \times op_1)$$

que é a área de de $p_1 p_2 \ldots p_n$ o que verifica o resultado □

Primitivas Geométricas: volumes de tetraedros



$$V = \frac{1}{6} AD.(AB \times AC)$$

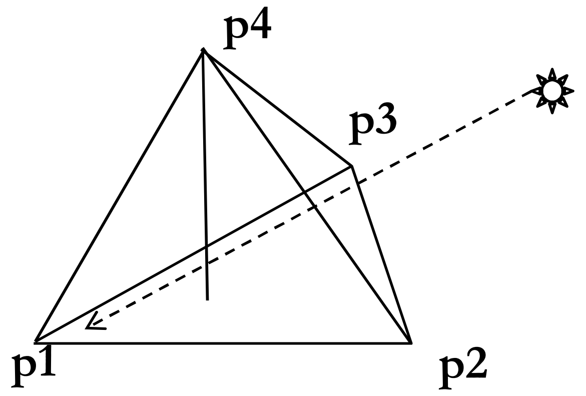
$$V = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} x_A & y_A & z_A & 1 \\ x_B & y_B & z_B & 1 \\ x_C & y_C & z_C & 1 \\ x_D & y_D & z_D & 1 \end{vmatrix}$$

Primitivas Geométricas: volumes de tetraedros

- Teorema 2.3 (Volume de um tetraedro) – sejam p_1, p_2, p_3 e p_4 , (n≥3), vértices que define um tetraedro. Considere a expressão, onde o é um ponto arbitrário:

$$V_T = \frac{1}{6}(op_1.(op_2 \times op_3 + op_3 \times op_4 + op_4 \times op_2))$$

(a) No R^3, V_T é um vetor de norma igual ao volume $p_1p_2p_3p_4$, positiva se p2p3p4 é orientado no sentido antihorário quando visto de fora do tetraedro e olhando para p_1



Primitivas Geométricas: volumes de tetraedros

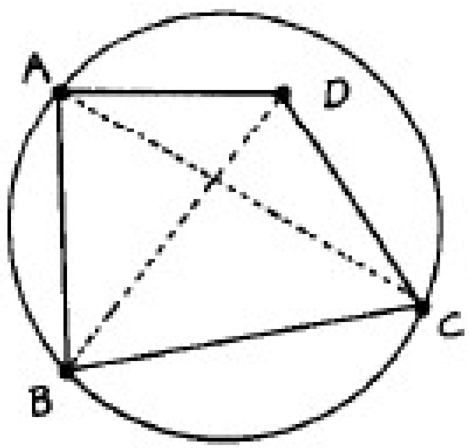
- Teorema 2.4 (Volume de um poliedro) – sejam p_1, $p_{2,\ldots,}$ p_n , (n≥3), a lista de vértices que define um poliedro P.
- Seja a expressão abaixo que determina o volume do tetraedro
- Considere a expressão, onde o é um ponto arbitrário:

$$V = \frac{1}{6}(V_T(op1\,p2\,p3) + V_T(op2\,p4\,p3) + \cdots + V_T(op_{n-1}\,p_n\,p_0))$$

(a) No R^3, V é um vetor de norma igual ao volume de $p_1p_2p_3 \ldots pn$ se o é um ponto arbitrário, e $p_ip_jp_k$ são as faces do poliedro orientadas no sentido antihorário em relação a **o** (slide anterior) e $op_ip_jp_k$ é um tetraedro

Primitivas Geométricas: teste do ponto pertencente a um círculo

- Dado um círculo passando pelos vértices de um triângulo ABC, determinar se D é interior ao círculo



Primitivas Geométricas: teste do ponto pertencente a um círculo

- Dado um círculo passando por ABC, determinar se D é interior ao círculo

LEMMA 8.1. *The test Incircle(A, B, C, D) is equivalent to*

$$\mathscr{D}(A, B, C, D) = \begin{vmatrix} x_A & y_A & x_A^2 + y_A^2 & 1 \\ x_B & y_B & x_B^2 + y_B^2 & 1 \\ x_C & y_C & x_C^2 + y_C^2 & 1 \\ x_D & y_D & x_D^2 + y_D^2 & 1 \end{vmatrix} > 0.$$

Primitivas Geométricas: teste do ponto pertencente a um círculo

- Prova: Considere o mapeamento $\lambda : (x, y) \mapsto (x, y, x^2 + y^2)$
  A, B, C e D são cocirculares se e somente se λ(A), λ(B), λ(C) e λ(D) são coplanares.

  $\Rightarrow$Suponha A, B, C e D são cocirculares. Se A, B, C e D forem colineares D(A,B,C,D)=0. Mas D(A,B,C,D) é o volume do tetraedro determinado por λ(A), λ(B), λ(C) e λ(D), logo A, B, C e D são coplanares. Considere o caso geral. Seja (p,q) o centro do círculo de raio r que passa por ABC. Então:

$$(x_A - p)^2 + (y_A - q)^2 = r^2$$
$$(x_B - p)^2 + (y_B - q)^2 = r^2$$
$$(x_C - p)^2 + (y_C - q)^2 = r^2$$
$$(x_D - p)^2 + (y_D - q)^2 = r^2$$

Primitivas Geométricas: teste do ponto pertencente a um círculo

⇒ (continuação) O que significa que

$$-2px_A - 2qy_A + 1.(x_A^2 + y_A^2) + (p^2 + q^2 + r^2) = 0$$
$$-2px_B - 2qy_B + 1.(x_B^2 + y_B^2) + (p^2 + q^2 + r^2) = 0$$
$$-2px_C - 2qy_C + 1.(x_C^2 + y_C^2) + (p^2 + q^2 + r^2) = 0$$
$$-2px_D - 2qy_D + 1.(x_D^2 + y_D^2) + (p^2 + q^2 + r^2) = 0$$

- Logo, existe uma dependência entre as colunas do determinante que é igual a zero e consequentemente λ(A), λ(B), λ(C) e λ(D) são coplanares

Primitivas Geométricas: teste do ponto pertencente a um círculo

$\Leftarrow$Suponha λ(A), λ(B), λ(C) e λ(D) são coplanares. Se A, B, C e D são colineares o resultado é imediato. Suponha A, B, C não são colineares. Seja novamente (p,q) o centro do círculo de raio r. Então A, B, C satisfazem

$$-2px_A - 2qy_A + 1.(x_A^2 + y_A^2) + (p^2 + q^2 + r^2) = 0$$
$$-2px_B - 2qy_B + 1.(x_B^2 + y_B^2) + (p^2 + q^2 + r^2) = 0$$
$$-2px_C - 2qy_C + 1.(x_C^2 + y_C^2) + (p^2 + q^2 + r^2) = 0$$

Primitivas Geométricas: teste do ponto pertencente a um círculo

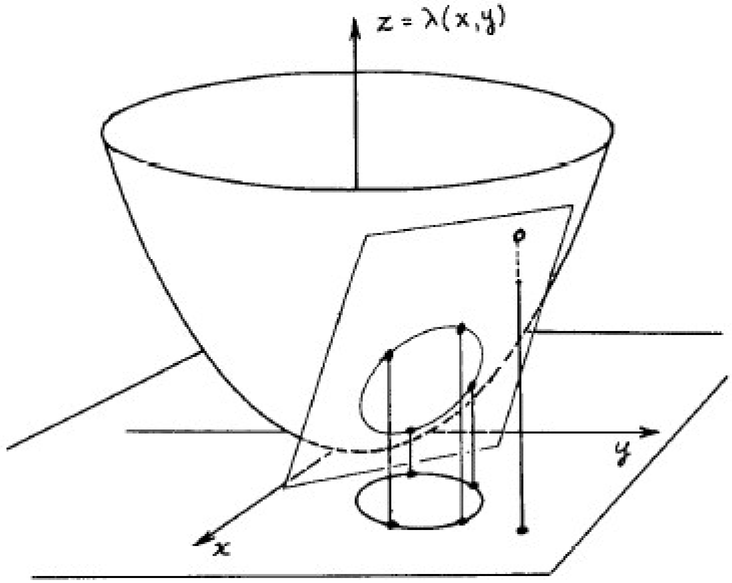
$\Leftarrow$Logo as 3 linhas de D(A,B,C,D) correspondentes a A,B e C são linearmente independentes. Porém, as quatro simultaneamente são linearmente dependentes, pois o determinante é nulo. Logo D satisfaz

$$-2px_D - 2qy_D + 1.(x_D^2 + y_D^2) + (p^2 + q^2 + r^2) = 0$$

e está no círculo que circunscreve ABC.

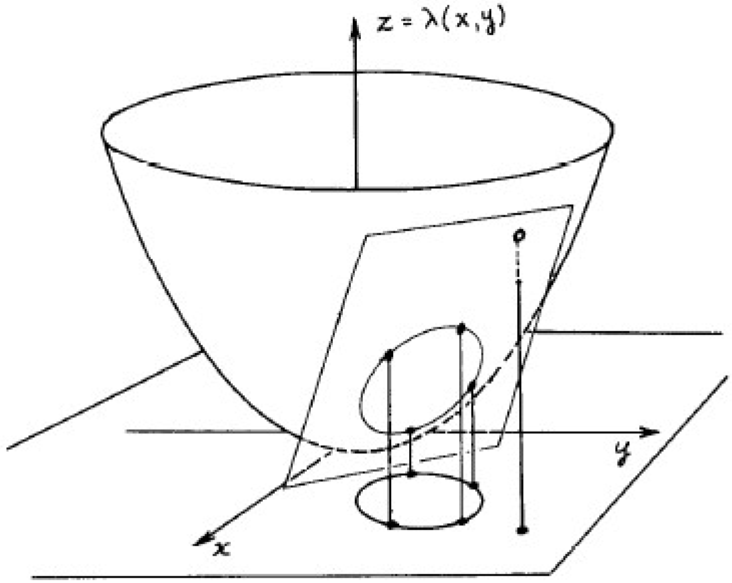
Primitivas Geométricas: teste do ponto pertencente a um círculo

O resultado mostra que seções planares do paraboloide de revolução projetam-se em círculos no plano xy.



Primitivas Geométricas: teste do ponto pertencente a um círculo

Como o paraboloide é convexo na direção positiva de z. A parte do paraboloide abaixo do plano projeta-se no interior do círcuo e a parte superior fora do círculo.



Primitivas Geométricas: referências

- P. C. P. Carvalho e L. H. de Figueiredo, *Introdução à Geometria Computational*, 18° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1991.

- *Notas de aula* do Prof. Luiz Henrique Figueiredo – IMPA.