Geometria Computacional

Professor:

Anselmo Montenegro
www.ic.uff.br/~anselmo

Conteúdo:

- Polígonos

Roteiro

- Introdução
- Polígonos
- Teorema da Curva de Jordan
- Decomposição de polígonos
- Triangulações
- Estrutura combinatória de triangulações

Primitivas Geométricas: introdução

- Geometria Computacional é essencialmente discreta diferentemente da Modelagem Geométrica que lida com curvas e superfícies suaves

- O foco da GC está na representação discreta de objetos através da combinação de elementos simples e facilmente manipuláveis:

  - Pontos
  - Segmentos de retas
  - Polígonos 2D
  - Poliedros

Primitivas Geométricas: introdução

- Segundo Devadoss e O'Rourke, polígonos representam na geometria planar aquilo que os inteiros representam na computação numérica:
  - Um subconjunto discreto de um universo de possibilidades voltado para computação eficiente
- Triangulações fazem um papel em geometria discreta equivalente ao da fatorização em números primos sem, entretanto, garantir unicidade

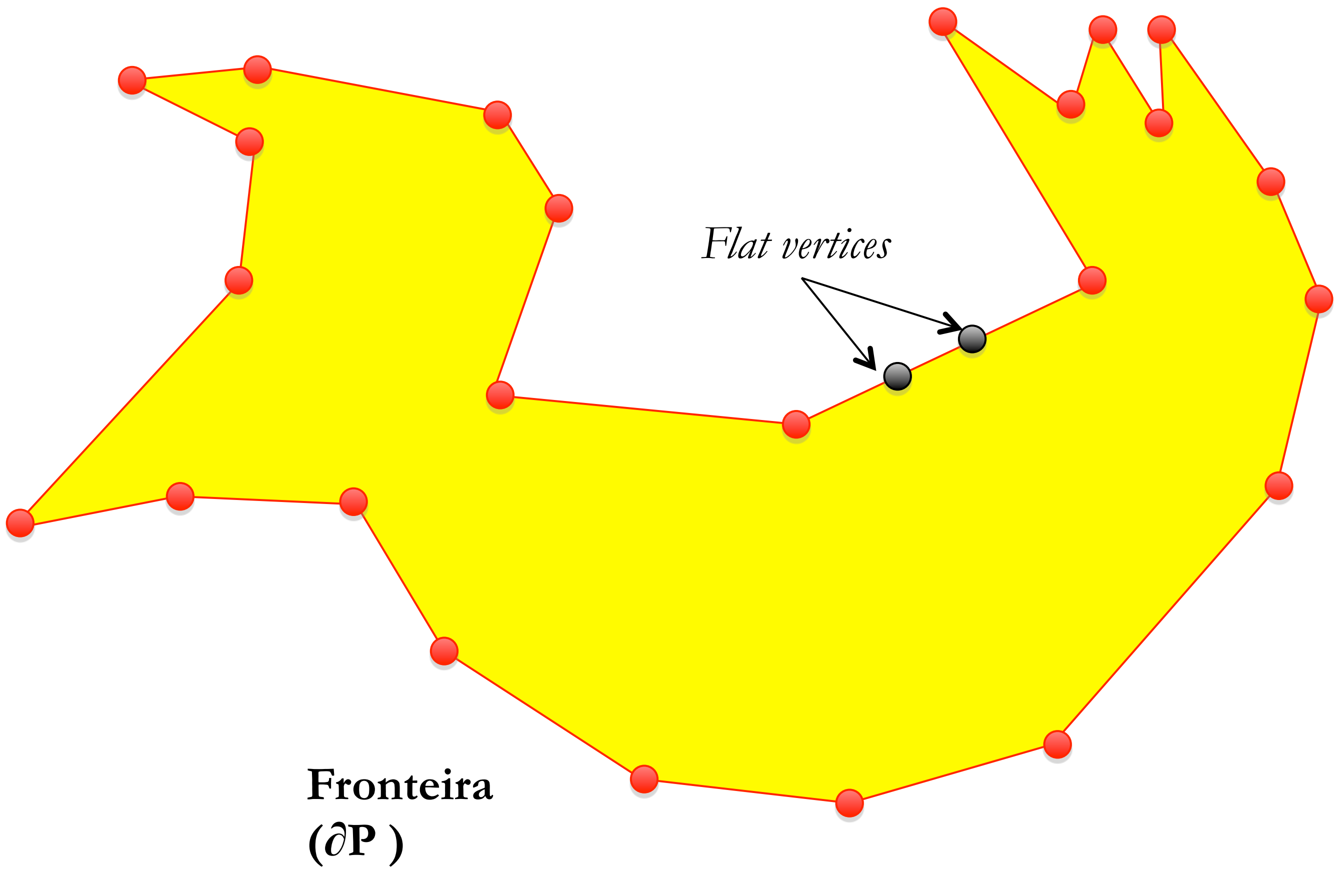
Primitivas Geométricas: polígonos

- Definição (Polígono) – um polígono *P* é uma região fechada do plano limitada por uma coleção finita de segmentos de reta, formando uma curva fechada sem auto-interseções

- Os segmentos de reta são denominados arestas

- Os pontos onde duas arestas são adjacentes são denominados vértices

Primitivas Geométricas: polígonos



Primitivas Geométricas: Curva de Jordan Poligonal

- *Teorema* 3.1 (Curva de Jordan Poligonal) – A fronteira ou bordo ∂P de um polígono P particiona o plano em duas partes: duas componentes abertas de $R^2 \backslash \partial P$, o interior limitado e o exterior ilimitado

- A prova do **Teorema da Curva de Jordan**, formulado e provado por Camille Jordan em 1982, é bastante complexa

- A prova para curvas poligonais é relativamente mais simples

Primitivas Geométricas: Curva de Jordan Poligonal

- *Esboço da prova* – seja *P* um polígono no plano. Escolha uma direção fixa no plano que não é uma aresta paralela de *P*

- Isso é sempre possível porque *P* tem um número finito de arestas. Então qualquer ponto *x* no plano que não pertença a ∂P cai em um dos dois conjuntos:

  1. O raio através de *x* nas direção fixada cruza ∂P em um número par de vezes: *x* é exterior.
  2. O raio através de *x* na direção fixada cruza ∂P em um número ímpar de vezes: *x* é interior.

Primitivas Geométricas: Curva de Jordan Poligonal

- *(continuação)* Todos os pontos em uma reta que não intersecta ∂P deve estar no mesmo conjunto. Logo os conjuntos pares e ímpar são conectados.

- Além disso, se existe um caminho entre pontos em diferentes conjuntos, então este caminho deve intersectar ∂P.

Primitivas Geométricas: Decomposição de polígonos

- Boa parte dos algoritmos normalmente requerem a decomposição de um polígono em partes mais simples. A base para tal decomposição está na noção de diagonal

- Definição (Diagonal de um polígono) – a diagonal de um polígono é um segmento de reta que conecta dos vértices de P, mantendo-se no interior de P, sem cruzar ∂P exceto em seus pontos extremos

- Duas diagonais são não-intersectantes se não compartilharem um ponto interior de P

Primitivas Geométricas: Triangulação

- A triangulação é um dos casos mais importantes de decomposição de um polígono

- Existem várias formas de se definir uma triangulação

- Uma definição puramente geométrica é dada abaixo:

- Definição (Triangulação) – Uma triangulação de um polígono *P* é a decomposição de *P* em triângulos por um conjunto maximal de diagonais que não se intersectam

Primitivas Geométricas: Triangulação

- Exercício: Encontre outra definição para triangulação
- Exercício: defina a noção matemática de um conjunto maximal e contraste com noção de conjunto minimal

Primitivas Geométricas: Triangulação

- Triangulações levam a várias questões:
  - Todo polígono possui uma triangulação?
  - Quantas diferentes triangulações tem um polígono *P*
  - Quantos triângulos possui uma triangulação de um polígono *P*?

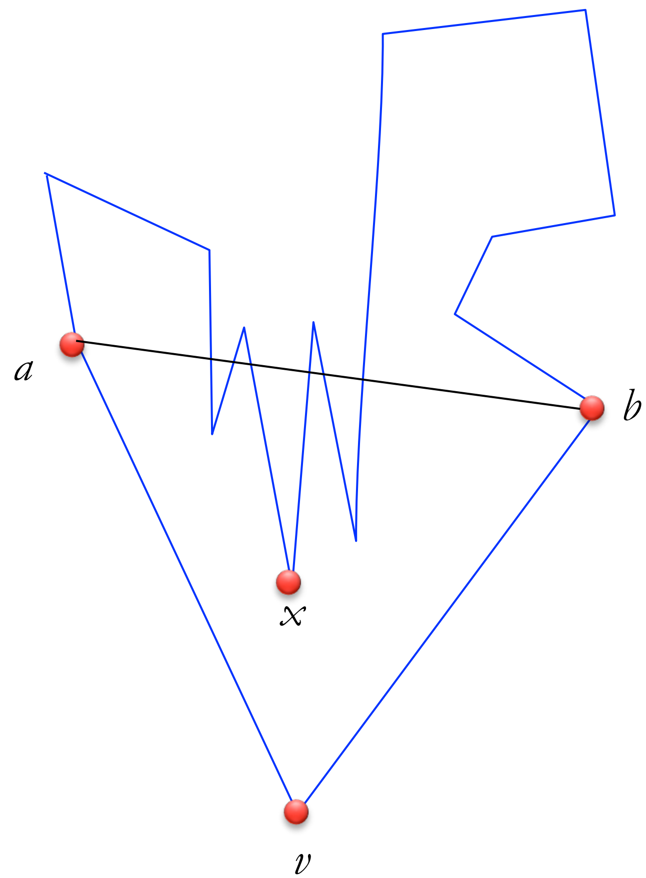
Primitivas Geométricas: Triangulação

- *Lema* 3.1 (Existência de uma diagonal) Todo polígono com mais que 3 vértices tem uma diagonal

- Vejamos a seguir uma prova por construção

Primitivas Geométricas: Triangulação

- Considere *v* o vértice mais inferior de *P* (sempre é possível encontrá-lo, por que?);
- Sejam *a* e *b* os dois vizinhos de *v* em ∂P
- Se o segmento ab for interno a P e não intersectar ∂P então *ab* é uma diagonal

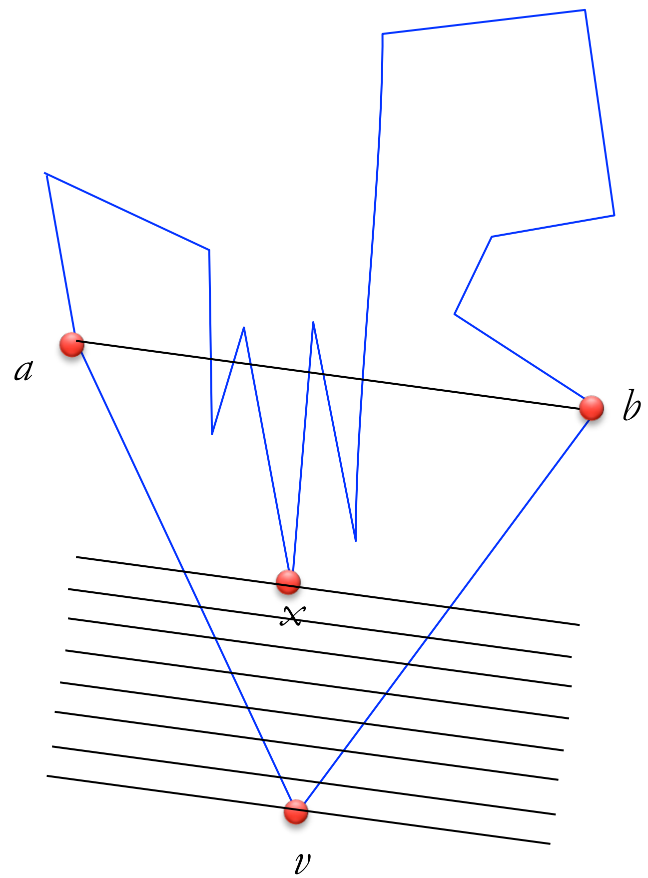


Primitivas Geométricas: Triangulação

- Caso contrário, se *P* possui mais que 3 vértices, existe pelo menos um vértice interior ao triângulo Δavb (por que?)

- Seja *l* uma reta paralela ao segmento *ab* passando por *v*

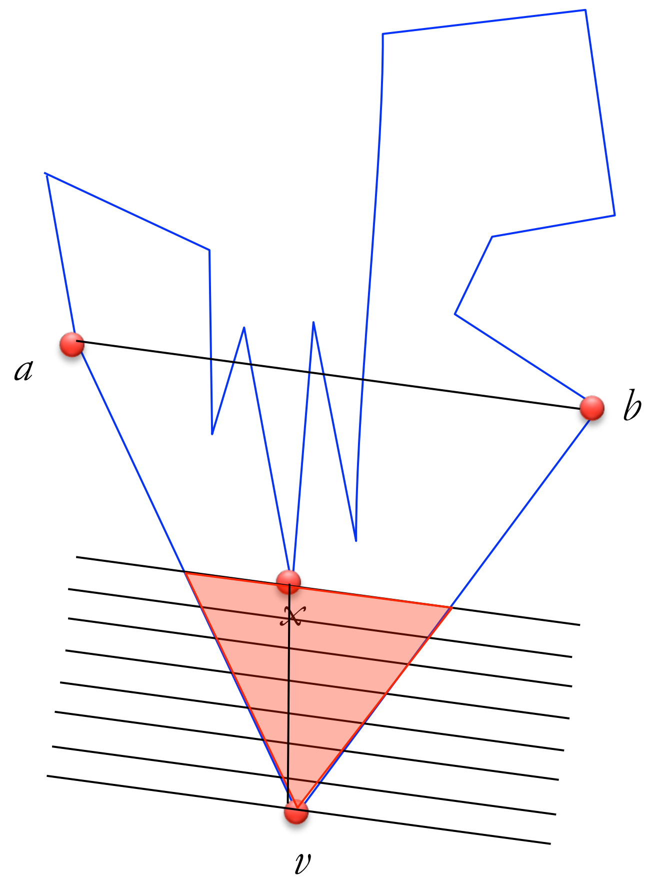
- Deslize *l* paralelamente a *ab* em direção a *v*, até que ela toque o primeiro vértice *x* interno a Δavb, distinto de *a*, *b* e *v*



Primitivas Geométricas: Triangulação

- A região sombreada do polígono abaixo de *l* e acima de *v* não contém vértices de *P* (por que?)

- Como *vx* não intersecta ∂P exceto em *v* e *x*, então *vx* é uma diagonal □



Primitivas Geométricas: Triangulação

- *Teorema* 3.2 (Existência de triangulação) Todo polígono tem uma triangulação

- Prova(por indução) – Caso base (n=3): P é um triângulo. Hipótese indutiva (n>3): assuma que o teorema é verdadeiro para para todos os polígonos com menos que n vértices.

- Usando o Lema 3.1, encontre uma diagonal que corte P em dois polígonos P_1 e P_2. Como P_1 e P_2 tem menos que n vértices ambos podem ser triangulados pela hipótese indutiva.

- Pelo Teorema da Curva de Jordan Poligonal, os triângulos de P_1 e P_2 não possuem sobreposição, logo P também possui uma triângulação □

Primitivas Geométricas: Triangulação

- Exercício: como base no Teorema 3.2, escreva um algoritmo para triangulação de polígonos no plano.

Primitivas Geométricas: Estrutura Combinatória de Triangulações

- Todo polígono possui pelo menos uma triangulação

- Mostraremos agora que todas as triangulações de um polígono tem o mesmo número de triângulos

- Teorema 3.3 (*Número de triângulos em uma triangulação*) – Toda triangulação de um polígono P com n vértices possui n-2 triângulos e n-3 diagonais

Primitivas Geométricas: Estrutura Combinatória de Triangulações

- Prova (por indução) – Caso base(n=3): 1 triângulo e 0 diagonais. Hipótese indutiva(n>3): assuma que o teorema é verdade para todos os polígonos P com menos que n vértices

- Escolha uma diagonal d que corta P em dois polígonos P_1 e P_2 com n_1 e n_2 vértices, respectivamente. Sabemos que $n_1+n_2 = n+2$, porque a e b aparecem tanto em P_1 quanto em P_2

- A hipótese indutiva implica que P_1 possui n_1-2 triângulos e P_2 possui n_2-2 triângulos. Logo P possui: $n_1-2+n_2-2 = (n_1+n_2)-4 = n+2-4 = n-2$

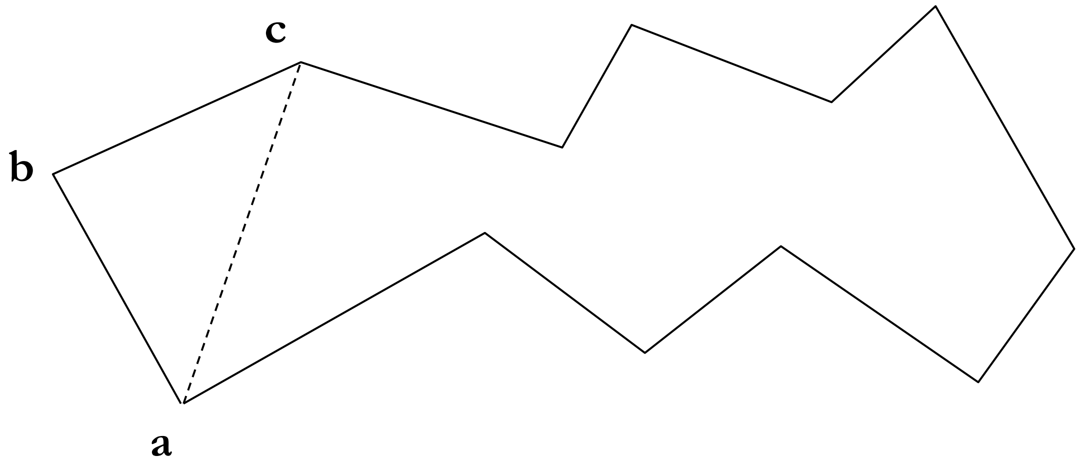
- Da mesma forma, P possui $(n_1-3)+(n_2-3)+1$ diagonais (por que?) □

Primitivas Geométricas: Estrutura Combinatória de Triangulações

- Muitas provas e algoritmos requerem a identificação de triângulos especiais em uma triangulação para iniciar o processo de indução ou recursão

- A noção de triângulo orelha é um destes triângulos especiais

- Três vértices consecutivos *a*,*b* e *c* formam uma orelha em uma triangulação *T* se ac for uma diagonal de *T*



Primitivas Geométricas: Estrutura Combinatória de Triangulações

- Princípio da casa de pombos (*Pigeonhole principle*) – princípio formulado pelo matemático alemão Dirichlet (1805-1859)

Suponha que exista k casinhas de pombos e n pombos tal que $k<n$. Então, pelo menos uma casinha receberá pelo menos 2 pombos.

- Na solução de problemas, os pombos são os números ou objetos e as casinhas as propriedades que os objetos devem satisfazer

Primitivas Geométricas: Estrutura Combinatória de Triangulações

- Teorema 3.4 (Existência de triângulos orelhas) - todo polígono com mais de 3 vértices tem pelo menos duas orelhas
- Prova – considere qualquer triangulação de um polígono P com *n*>3 vértices. Pelo Teorema 3.2 a triangulação particiona *P* em n-2 triângulos.
- Cada triângulo cobre no máximo 2 arestas de ∂P. Como existem n arestas no bordo de P mas somente *n-2* triângulos então, pelo *Pigeonhole Principle*, existem pelo menos 2 triângulos contendo duas arestas de P. Estas são as orelhas.

Primitivas Geométricas: Estrutura Combinatória de Triangulações

- Lema (3.1) Uma diagonal existe para qualquer par de dois vértices adjacentes de um polígono *P* se e somente se *P* é um polígono convexo

- Prova (por contradição)

  $\Rightarrow$ Assuma que P não é convexo. Como P não é convexo existe pelo menos uma sequência de vértices a,b,c tal que b é reflexo. Então o segmento ac é parcialmente exterior a P e portanto não é uma diagonal.

  $\Leftarrow$ Assuma que P é convexo e que existe um par de vértices que não forma uma diagonal. Seja σ o menor caminho conectando a para b, totalmente dentro de P. σ não pode ser um segmento de reta dentro de P, c.c. seria uma diagonal. Portanto P deve ser uma cadeia de segmentos de reta. Cada quina da cadeia poligonal vira em um ângulo reflexo, caso contrário não seria mais uma cadeia de comprimento mínimo.

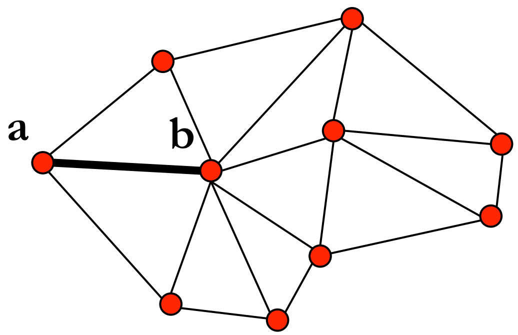
Primitivas Geométricas: Estrutura Combinatória de Triangulações

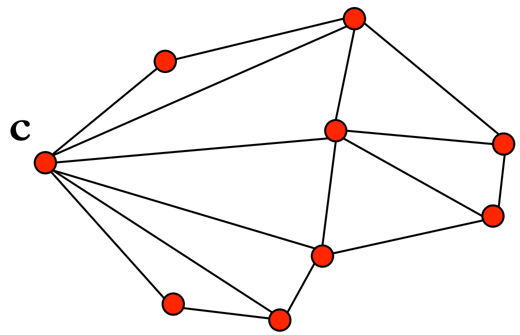
•Teorema 3.5 (*Número de triangulações de um polígono convexo*)
O número de triangulações de um polígono com n+2 vértices e dado pelo número de Catalan :

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Primitivas Geométricas: Estrutura Combinatória de Triangulações

- Prova:
- Seja P_{n+2} um polígono, com n+2 vértices rotulados de 1 a n+2 no sentido anti-horário. Denominamos T_{n+2} o conjunto de triangulações de P_{n+2} onde T_{n+2} possui t_{n+2} elementos.
- Seja ϕ um mapeamento de T_{n+2} em T_{n+1} obtido pela contração da aresta {1,n+2} de P_{n+2}
- Contração de uma aresta *ab* consiste em encolher a aresta até um ponto *c*, tal que *c* seja incidente a todas as arestas e diagonais incidentes a *a* e *b*





Primitivas Geométricas: Estrutura Combinatória de Triangulações

- Prova (continuação):

- O número de triangulações de T_{n+2} que são mapeadas em T é igual ao grau do vértice 1 em T, onde $T=T_{n+1}$

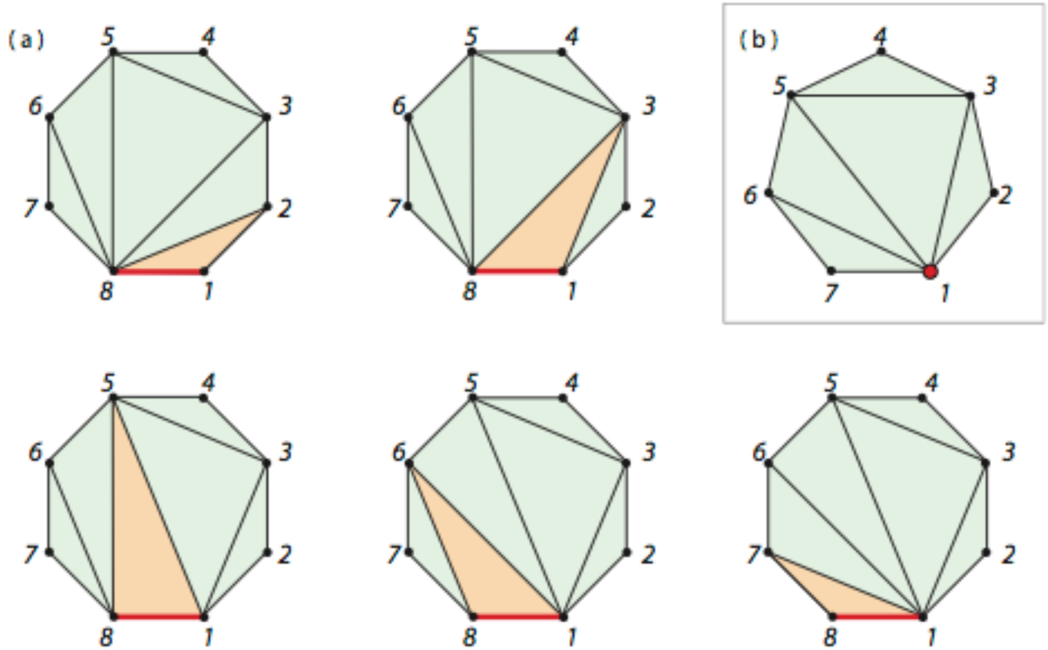


Figura obtida de Devadoss & O'Rourke

Primitivas Geométricas: Estrutura Combinatória de Triangulações

- Exercício: número de triangulações de T_{n+2} que são mapeadas em T é igual ao grau do vértice 1 em T, onde $T=T_{n+1}$

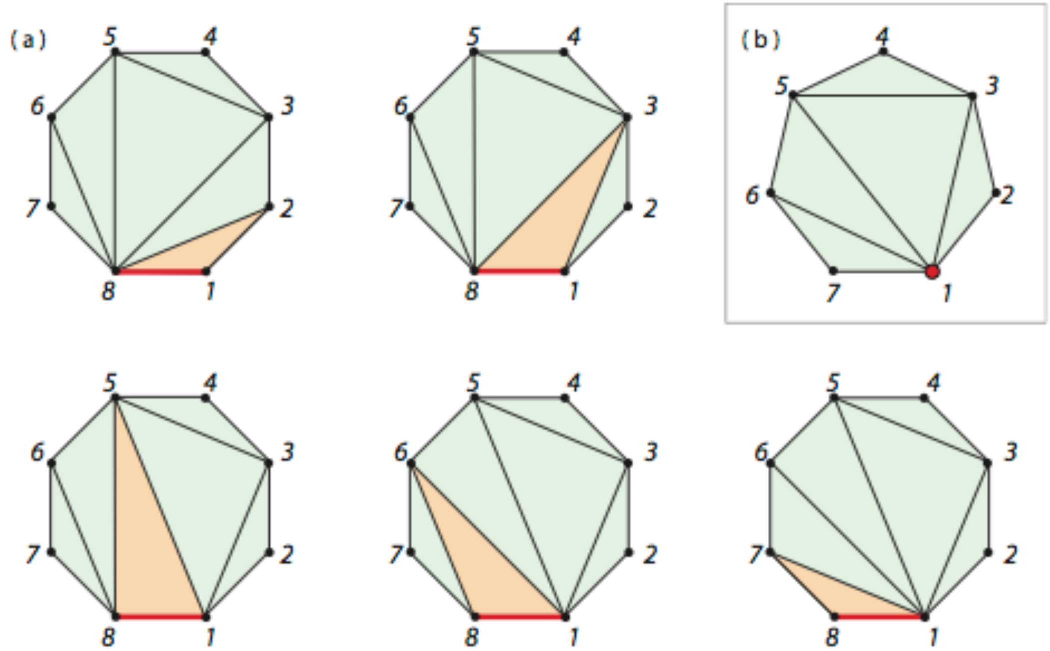


Figura obtida de Devadoss & O'Rourke

Primitivas Geométricas: Estrutura Combinatória de Triangulações

$$t_{n+2} = \sum_{T \in T_{n+1}} \text{grau do vértice 1 de T}$$

Como o polígono é convexo, isso é válido para todos os vértices.

$$\begin{aligned}(n+1)\cdot t_{n+2} &= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{T \in T_{n+1}} \text{grau do vértice } i \text{ de T} \\ &= \sum_{T \in T_{n+1}} \sum_{i=1}^{n+1} \text{grau do vértice } i \text{ de T} \\ &= 2(2n-1)\cdot t_{n+1}\end{aligned}$$

Exercício: mostre o último passo do desenvolvimento acima

$$\begin{aligned}t_{n+2} &= \frac{2(2n-1)}{n+1}\cdot t_{n+1} = 2^n \cdot \frac{2(2n-1)}{n+1}\cdot\frac{2n-3}{n}\cdots\frac{3}{3}\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}\end{aligned}$$

Primitivas Geométricas: Estrutura Combinatória de Triangulações

- Para polígonos não convexos o teorema acima não é válido porque qualquer movimentação dos vértices altera o número de triângulos na triangulação (Por que?)

- Teorema 3.6(*Número de triangulações de um polígono*) - O número de triangulações de um polígono *P* está entre 1 e C_n

- Prova (ver Devadoss & O' Rourke)

Referências: outras

- **Satyan L. Devadoss, Joseph O'Rourke, *Discrete and Computational Geometry*, Princeton University Press, 2011.**