Lógica Combinatória

Maurício Pires e Rodrigo Lugão

Instituto de Computação
Universidade Federal Fluminense - UFF

10 de Dezembro de 2016.

Sumário

- Motivações
- Conceitos
- CL$\geq$ e CL$=$
- CL e λ-cálculo
- Referências

Introdução

- Lógica combinatória é uma poderosa teoria lógica.
- Criada originalmente para ser uma versão reduzida da lógica de primeira ordem.
  - Problema da substituição.
  - Os fórmulas podem ser preparadas para eliminar as variáveis ligadas por meio dos combinadores.
- A conexão com o λ-cálculo sugere que este é um modelo suficientemente expressivo para representar funções recursivas e aritmética.
- Um arquétipo de sistemas de reescrita de termos.

Conceitos

- Termos - objetos de CL.
  - Variáveis e constantes são termos.
  - Se M e N são termos, (MN) também é um termo.

- Aplicação - nome da operação binária de conjugação dos termos. Denotada por justaposição, colocando os argumentos próximos.

- Em termos de CL é usual omitir os parênteses das associações à esquerda. Ex.: $xy(zr) = (xy)(zr)$

Conceitos

- Subtermos
  - M é subtermo de M.
  - Se M é um subtermo de N ou de P, então M também é subtermo de (NP).

- Seja **Z** é um combinador n-ário. Um termo na forma $\mathbf{Z}M_1 ... M_n$ é chamado de **redex**. O combinador **Z** é chamado de **header** do redex.

- Um termo é chamado de forma normal se, e somente se, ele não possui combinadores.

Combinadores

- K é constante no primeiro argumento e nulário no segundo.
- I é a identidade.
- C, T e V são permutadores.
- W e M são duplicadores.
- B é um associador.
- B' é um associador e permutador.
- S é um combinador de composição forte.
- Y é o operador de ponto fixo. (Para qualquer função x, Yx é o ponto fixo da função.)
- J é um associador e duplicador.

Axiomas

Os axiomas ajudam a determinar a aridade dos operadores.

- $\mathbf{S}xyz \triangleright xz(yz)$
- $\mathbf{B}xyz \triangleright x(yz)$
- $\mathbf{W}xy \triangleright xyy$
- $\mathbf{J}xyzv \triangleright xy(xvz)$
- $\mathbf{K}xy \triangleright x$
- $\mathbf{T}xy \triangleright yx$
- $\mathbf{M}x \triangleright xx$
- $\mathbf{B'}xyz \triangleright y(xz)$
- $\mathbf{I}x \triangleright x$
- $\mathbf{C}xyz \triangleright xzy$
- $\mathbf{Y}x \triangleright x(\mathbf{Y}x)$
- $\mathbf{V}xyz \triangleright zxy$

Base Combinatória

- Schönfinkel provou que os combinadores S e K são suficientes para descrever todos os combinadores de CL.

- O conjunto $\{S, K\}$ é chamado de base combinatória.

- Exemplo: $\mathbf{B} \equiv \mathbf{S}(\mathbf{KS})\mathbf{K}$

$$\mathbf{S}(\mathbf{KS})\mathbf{K}\mathrm{xyz} > \mathbf{KS}\mathrm{x}(\mathbf{K}\mathrm{x})\mathrm{yz} > \mathbf{S}(\mathbf{K}\mathrm{x})\mathrm{yz} > \mathbf{K}\mathrm{xz}(\mathrm{yz}) > \mathrm{x}(\mathrm{yz})$$

$CL_{\triangleright}$

- $\triangleright \equiv \geq$
- $CL_{\triangleright}$ é determinado por uma relação transitiva e reflexiva.
- A relação $\geq$ é chamada de redução fraca.
- Inclui apenas os combinadores S e K, uma vez que todos os demais podem ser descritos em função deles.

Cálculo Inequacional ($CL_{\triangleright}$)

- $M \triangleright M$
- $\mathbf{S}MNP \triangleright MP(NP)$
- $\mathbf{K}MN \triangleright M$
- $\dfrac{M \triangleright N \qquad N \triangleright P}{M \triangleright P}$
- $\dfrac{M \triangleright N}{MP \triangleright NP}$
- $\dfrac{M \triangleright N}{PM \triangleright PN}$

$CL_{=}$

- CL $\rightarrow$ funções.
- A execução de programas nos leva a um novo caminho além da redução: expansão.
- A igualdade entre funções é uma noção muito presente na matemática. Possui um análogo em CL.
- $CL_{=}$ é uma extensão de $CL_{\geq}$
- Fecho transitivo, reflexivo e simétrico de $CL_{\geq}$

Cálculo Equacional ($CL_=$)

- $M = M$
- $\mathbf{S}MNP = MP(NP)$
- $\mathbf{K}MN = M$
- $\dfrac{M = N \qquad N = P}{M = P}$
- $\dfrac{M = N}{MP = NP}$
- $\dfrac{M = N}{N = M}$
- $\dfrac{M = N}{PM = PN}$

λ-cálculo

- λ-termos:
  - x é uma variável $\rightarrow$ x é um λ-termo.
  - M e N são λ-termos $\rightarrow$ (MN) é um λ-termo.
  - M é um λ-termo e x, uma variável $\rightarrow$ $(\lambda x.M)$ é um λ-termo.
- Sucessão de abstratores: $\lambda x(\lambda y(\lambda z)) \equiv \lambda xyz$.
- O ponto (.) designa o final de uma lista de argumentos.
- Precedência à esquerda (similar a CL).

CL $\leftrightarrow$ λ-cálculo

Correspondence between λ and CL

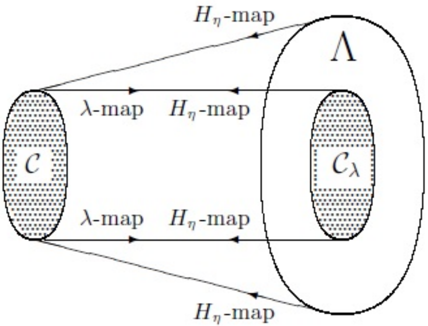

Fig. 9:1

CL $\rightarrow$ λ-cálculo

- Vamos usar a base combinatória $\{S, K, I\}$ para fazer o mapeamento.

- **Definição:** Se M é um λ-termo fechado, i.e., sem variáveis livres, então M é um combinador em Λ.

- Tendo em vista a definição acima, vamos expressar nossa base combinatória em Λ.

CL $\rightarrow$ λ-cálculo

- Base combinatória $\{S, K, I\}$.
- Dos axiomas, temos:
  - $\mathbf{S}xyz \triangleright xz(yz)$
  - $\mathbf{K}xy \triangleright x$
  - $\mathbf{I}x \triangleright x$
- **λ-map:**
  - $x_\lambda \equiv x$
  - $(XY)_\lambda \equiv X_\lambda Y_\lambda$
  - $\mathbf{S}xyz \equiv \lambda xyz.xz(yz)$
  - $\mathbf{K}xy \equiv \lambda xy.x$
  - $\mathbf{I}x \equiv \lambda x.x$

λ-cálculo $\rightarrow$ CL

Abstração: Para todo M, termo de CL, e para toda variável x, podemos definir um outro termo de CL, notado por $[x].M$, definido indutivamente de forma que:

- $[x].M \equiv \mathbf{K}M$ se $x \notin FV(M)$
- $[x].x \equiv \mathbf{I}$
- $[x].Ux \equiv U$ se $x \notin FV(U)$
- $[x].UV \equiv \mathbf{S}([x].U)([x].V)$ se não podemos aplicar nenhum dos dois primeiros itens.

Def.: Para todas as variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$, fazemos:

$$[x_1, ..., x_n].M \equiv [x_1].([x_2].(...([x_n].M)))$$

λ-cálculo $\rightarrow$ CL

Mapeamento H_η: Para cada λ-termo M podemos associa-lo a um termo de CL, chamado M_H, de forma que:

- $x_{H_\eta} \equiv x$
- $(MN)_{H_\eta} \equiv M_{H_\eta} N_{H_\eta}$ **(Aplicação)**
- $(\lambda x.M)_{H_\eta} \equiv [x]^\eta.M_{H_\eta}$ **(Abstração)**

- $S_{\lambda H} = (\lambda xyz.xz(yz))_H = [x, y, z]^\eta.xz(yz) = S$
- $K_{\lambda H} = (\lambda xy.x)_H = [x, y]^\eta.x = K$
- $I_{\lambda H} = (\lambda x.x)_H = [x]^\eta.x = I$

λ-cálculo $\rightarrow$ CL

Lema (Substituição): Para todos λ-termos M e N:

- $FV(M_{H_\eta}) = FV(M)$
- $([y/x]M)_{H_\eta} \equiv [y/x](M_{H_\eta})$ se y não ocorre em M.
- $([N/x]M)_{H_\eta} \equiv [N_{H_\eta}/x](M_{H_\eta})$

Prova: Veja no capítulo 9 de [2]

Referências

1 K. Bimbó, "Combinatory Logic", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2016 Edition), Edward N. Zalta (ed.), forthcoming URL = https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/logic-combinatory/.

2 J.R. Hindley e J.P. Seldin, Lambda-Calculus and Combinators, an Introduction, Cambridge University Press, 2008.

3 K. Bimbó, Combinatory Logic: Pure, Applied and Typed, CRC Press, 2012.