

IC/UFF - Análise e Síntese de Algoritmos - 2013/1 - Segunda Prova

Questão 1: Considere um tabuleiro $n \times n$ onde cada casa possui um custo associado $c(i, j)$ (inteiro positivo), onde o índice i indica a linha e o índice j a coluna. (A linha 1 é a primeira de baixo para cima, e a coluna 1 é a mais à esquerda.) Um caminho neste tabuleiro consiste de uma sequência de casas $(1, j_1), (2, j_2), \dots, (r, j_r)$ tais que, para cada valor de $k \in \{1, \dots, r-1\}$, vale que $j_{k+1} \in \{j_k - 1, j_k, j_k + 1\}$. Em outras palavras, os caminhos sempre partem da primeira linha e vão subindo linha a linha, sendo que a próxima casa está na mesma coluna ou em uma mesma diagonal que a casa anterior. Exemplo: iniciando na casa $(1, 3)$, a próxima casa do caminho pode ser $(2, 2)$, $(2, 3)$ ou $(2, 4)$.

- (a) (1,0) Seja $q(i, j)$ o custo mínimo de um caminho que parte da primeira linha e chega à casa (i, j) . Escreva equações de recorrência para determinar $q(i, j)$. (Obs: o custo de um caminho é a soma dos custos das casas que compõem o caminho.)
- (b) (2,0) Escreva um algoritmo de programação dinâmica que determine o custo mínimo de um caminho que parte da primeira linha e chega à linha n . Determine sua complexidade.
- (c) (2,0) Escreva um algoritmo de *backtracking* que enumera todos os possíveis caminhos que partem da primeira linha e chegam à linha n . Determine sua complexidade.

Questão 2: Considere o problema CAMINHO LONGO EM GRAFOS, assim definido:

Entrada: Um grafo G e um inteiro positivo k .

Questão: Existe em G um caminho com pelo menos k arestas?

- (a) (1,0) Escreva a versão de otimização do problema acima.
- (b) (1,0) Mostre que o problema CAMINHO LONGO EM GRAFOS pertence à classe NP.
- (c) (1,0) Mostre uma redução polinomial do problema CAMINHO HAMILTONIANO para o problema CAMINHO LONGO EM GRAFOS.

CAMINHO HAMILTONIANO

Entrada: Um grafo G .

Questão: Existe em G um caminho que passa por todos os vértices?

- (d) (1,0) Dê a definição de “problema NP-completo”.
- (e) (1,0) Sabe-se que o problema CAMINHO HAMILTONIANO é NP-completo. Pergunta-se: o problema CAMINHO LONGO EM GRAFOS é NP-completo? Por que?