

**Primeira Prova - 11/07/07**

Em cada questão abaixo, prove ou refute a afirmação dada.  
Cada questão vale 1,5.

1. É possível visitar todas as casas de um tabuleiro  $4 \times 4$  com movimentos de cavalo, sem passar duas vezes pela mesma casa e voltando à casa inicial.

Falso. Represente cada casa do tabuleiro por um vértice  $v_{ij}$  onde  $i$  é a linha e  $j$  é a coluna da casa representada,  $1 \leq i, j \leq 4$ . Ligue dois vértices por aresta se há um movimento de cavalo entre as casas correspondentes. (Por exemplo,  $v_{11}$  e  $v_{23}$  são adjacentes.) A pergunta então se resume a saber se o grafo  $G$  obtido desta forma é hamiltoniano. Seja  $S = \{v_{22}, v_{23}, v_{32}, v_{33}\}$ . Então vale  $|S| = 4 < \omega(G - S) = 6$ . Isto viola a condição necessária para  $G$  ser hamiltoniano.

2. Se  $G$  satisfaz  $\delta(G) \geq n - 2$ , então  $\kappa(G) = \delta(G)$ .

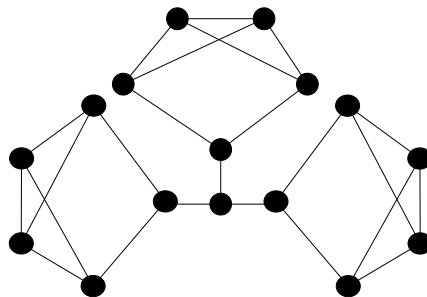
Verdadeiro. Se  $\delta(G) = n - 1$ , então  $G$  é completo, logo  $\kappa(G) = \delta(G)$  por definição. Se  $\delta(G) = n - 2$ , a remoção de  $n - 3$  vértices não desconecta o grafo, pois os três vértices restantes formam um grafo  $G'$  com  $\delta(G') = 1$ ; logo  $\kappa(G) = n - 2 = \delta(G)$ . Em qualquer caso, vale a afirmação.

3. Se  $G$  é um grafo conexo e  $f$  é uma aresta que pertence a toda árvore geradora de  $G$ , então  $f$  é uma ponte.

Verdadeiro. Se  $f$  não fosse uma ponte, pertenceria a um ciclo, e então  $G - f$  seria conexo. Isto é, existiria uma árvore geradora  $T$  de  $G - f$  que também seria uma árvore geradora de  $G$ . E, é claro,  $T$  não conteria  $f$ , uma contradição.

4. Todo grafo 3-regular possui um emparelhamento perfeito.

Falso. Um contra-exemplo é o grafo  $G$  abaixo.



5. Qualquer conjunto de 7 arestas no grafo  $K_{3,3}$  é um conjunto desconectante, mas não um corte.

Verdadeiro. Se estas 7 arestas formassem um corte, teríamos dois casos. No primeiro, após remover as 7 arestas, sobram duas arestas isoladas e dois vértices isolados; ambas as pontas de uma aresta

isolada  $f$  pertencem a  $S$ , e um dos vértices isolados também pertence a  $S$ , sendo que ele é ligado a uma das pontas de  $f$  por uma aresta do corte (absurdo). No segundo, após remover as 7 arestas, sobram um caminho de duas arestas e três vértices isolados; analogamente, os três vértices do caminho pertencem a  $S$  e um dos vértices isolados também, outro absurdo.

6. Se  $G$  é euleriano, então todo bloco de  $G$  é um grafo euleriano.

Verdadeiro. Basta provar que em cada bloco de  $G$ , todos os vértices têm grau par. Se  $G$  tem um só bloco, a afirmativa é trivialmente verdadeira. Se  $G$  tem mais de um bloco, seja  $B$  um bloco de  $G$  conectado a  $G$  por uma única articulação  $v$ . Considere o grafo  $G'$  obtido de  $G$  pela remoção de  $B$  (mas mantendo a articulação  $v$ ). É claro que  $d_G(v) = d_{G'}(v) + d_B(v)$ . Em  $G'$  todos os vértices têm grau par, com a possível exceção de  $v$ . Mas  $v$  não pode ser o único vértice de grau ímpar em  $G'$ . Logo,  $d_{G'}(v)$  é par. Isto implica que  $G'$  é euleriano e tem um bloco a menos do que  $G$ . Logo, por indução, todo bloco de  $G'$  (que também é bloco de  $G$ ) é um grafo euleriano. Além do mais,  $d_B(v) = d_G(v) - d_{G'}(v)$ . Logo,  $d_B(v)$  é par, donde concluímos que  $B$  também é um grafo euleriano.

7. Existe um grafo desconexo  $G$  com  $\delta(G) \geq n/2$ .

Falso. Sendo  $G$  desconexo, uma de suas componentes deve ter  $n' \leq n/2$  vértices. O grau de todo vértice nesta componente é estritamente menor do que  $n/2$ .