10. NEUTRALIDADE AO RISCO

DEFINIÇÃO: FUNÇÃO RETORNO DE UMA OPÇÃO

$$\Lambda(x) = \begin{cases} \max(x-E,0), & \text{PARA UMA CALL} \\ \max(E-x,0), & \text{PARA UMA PUT} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ O RETORNO DA OPÇÃO NO VENCIMENTO ('PAYOFF') É $\Lambda(S(T))$

COMO

$$S(T) = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}Z}, \quad Z \sim N(0,1)$$

$\Lambda(S(T))$ É UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA

* ANTES DE BLACK & SCHOLES, O VALOR ESPERADO DO PAYOFF, DESCONTADO PARA A INFLAÇÃO, i.e.,

$$e^{-rT} E[\Lambda(S(T))]$$

ERA UTILIZADO COMO ESTIMATIVA PARA O PREÇO DA OPÇÃO NO SEU LANÇAMENTO.

* DE FORMA MAIS GERAL, O VALOR ESPERADO DO RETORNO, ADEQUADAMENTE DESCONTADO PARA A INFLAÇÃO, PODE SER UTILIZADO COMO ESTIMATIVA DO VALOR DA OPÇÃO NO INSTANTE t, QUANDO O PREÇO DO ATIVO É S.

ISTO É,

$$W(S,t) = e^{-r(T-t)} E[\Lambda(S(T))]$$

⇒ USANDO A FUNÇÃO DENSIDADE PARA $S(t)$,

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{ \frac{-\log\left[(x/S_0) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t\right]^2}{2\sigma^2 t} \right\}$$

OBTEMOS

$$W(S,t) = e^{-r(T-t)} \int_0^\infty \frac{\Lambda(x)}{x\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \exp\left\{ \frac{-\left[\log\left(\frac{x}{S}\right) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)} \right\} dx$$

(ONDE UTILIZAMOS $S(T) = S(t)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}\,Z}$, $Z \sim N(0,1)$)

⇒ A ESTIMATIVA PARA O VALOR DA OPÇÃO NO LANÇAMENTO SERIA $W(S_0, 0)$.

OBSERVAÇÕES:

i) A ESTIMATIVA $W(S,t)$ NÃO CONSIDERA UMA ESTRATÉGIA DE ELIMINAÇÃO DE RISCO VIA HEDGING, NEM FAZ REFERÊNCIA AO PRINCÍPIO DA NÃO-ARBITRAGEM.

⇒ ELA NÃO INFORMA O PREÇO JUSTO DA OPÇÃO. PODE SER ÚTIL APENAS QUANDO SE COMPRAM OU LANÇAM 'OPÇÕES NUAS' (PORÉM, VER ADIANTE)

ii) EM CONTRASTE COM AS FÓRMULAS DE B&S, A ESTIMATIVA $W(S,t)$ DEPENDE DO PARÂMETRO μ.

PODE-SE MOSTRAR QUE $W(S,t)$ SATISFAZ A E.D.P. E AS CONDIÇÕES FINAL E DE CONTORNO DE B&S, QUANDO $\mu = r$.

⇒ $W(S,t)$ REPRODUZ O VALOR DE B&S, QUANDO $\mu = r$.

⇒ Nós podemos obter o valor justo de uma opção (i.e., B&S), assumindo que a tendência μ é igual à taxa de juros livre de risco, r, e computando o valor esperado do retorno, descontado para a inflação.

⇒ O problema de precificar uma opção pode ser abordado como o cômputo de um valor esperado.

iii) A suposição de que $\mu = r$ é conhecida como 'neutralidade ao risco'.

Um investidor neutro ao risco considera que um investimento sem risco, com retorno garantido r, é equivalente a um investimento de risco, com retorno esperado de r.

iv) Num mundo de risco neutro, todos os ativos teriam a mesma taxa de valorização, $\mu = r$, e portanto

$$E[S(t)] = S_0 e^{rt} \therefore e^{-rt} E[S(t)] = S_0$$

⇒ O valor esperado do ativo, descontado para a inflação, permanece igual a S_0.

Um processo como este, em que o futuro valor esperado é dado pelo valor corrente, se chama de martingal.

As fórmulas de B&S podem ser obtidas a partir da teoria dos martingais.