11. Volatilidade Implícita

As fórmulas de B&S dependem da volatilidade do ativo, σ, que não pode ser observada diretamente.

Uma abordagem para a estimação da volatilidade consiste em obtê-la a partir dos valores das opções quotadas no mercado:

⇒ Observado o valor de uma opção, e conhecendo-se os demais parâmetros — S, t, E, r, T — obtemos a volatilidade σ que corresponde àquele valor.

⇒ Obtido σ, podemos usar as fórmulas de B&S para precificar outras opções baseadas no mesmo ativo.

* Como a estimativa é obtida a partir da volatilidade subjacente ao valor de mercado da opção, ela é chamada de volatilidade implícita.

- Valor da opção como função da volatilidade:

Consideramos uma call europeia:

$$\begin{cases} C(S,t) = S N(d_1) - E e^{-r(T-t)} N(d_2) \\ d_{1,2} = \left[\log(S/E) + (r \pm \sigma^2/2)(T-t)\right] / \sigma\sqrt{T-t} \end{cases}$$

Assumimos que E, r e T são conhecidos, assim como o valor do ativo no instante t.

⇒ TRATAREMOS O VALOR DA OPÇÃO COMO FUNÇÃO DE σ, APENAS: $C = C(\sigma)$

⇒ DADA UMA COTAÇÃO DE MERCADO, C^*, PARA O VALOR DA OPÇÃO, DESEJAMOS OBTER A VOLATILIDADE IMPLÍCITA, $\sigma = \sigma^*$ QUE CORRESPONDA ÀQUELA COTAÇÃO: $C(\sigma^*) = C^*$

i.e., PRECISAMOS RESOLVER A EQUAÇÃO

$$F(\sigma) = C(\sigma) - C^* = 0, \quad \sigma \in [0, \infty)$$

⇒ COMO A FUNÇÃO $F(\sigma)$ É NÃO-LINEAR, PRECISAREMOS EMPREGAR MÉTODOS NUMÉRICOS PARA A OBTENÇÃO DE σ^*.

– COMPORTAMENTO LIMITE DE $C(\sigma)$:

i) PARA $\sigma \to \infty$:

$$\begin{cases} d_1 \to \infty, & N(d_1) \to 1 \\ d_2 \to -\infty, & N(-d_2) \to 0 \end{cases}$$

$$\therefore \lim_{\sigma \to \infty} C(\sigma) = S \quad (1)$$

ii) PARA $\sigma \to 0$:

$$d_{1,2} \to \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\log\left(\frac{S}{E}\right) + r(T-t)\right]$$

(σ^2 TENDE A ZERO MAIS RÁPIDO QUE σ)

Caso 1: $S - E e^{-r(T-t)} > 0$

$$\therefore \frac{S}{E} > e^{-r(T-t)}$$

$$\therefore \log\left(\frac{S}{E}\right) > -r(T-t)$$

$$\therefore \log\left(\frac{S}{E}\right) + r(T-t) > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d_1 \to \infty, & N(d_1) \to 1 \\ d_2 \to \infty, & N(d_2) \to 1 \end{cases}$$

$$\therefore \lim_{\sigma \to 0} C(\sigma) = S - E e^{-r(T-t)}$$

Caso 2: $S - E e^{-r(T-t)} < 0$

$$\therefore \log\left(\frac{S}{E}\right) + r(T-t) < 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d_1 \to -\infty, & N(d_1) \to 0 \\ d_2 \to -\infty, & N(d_2) \to 0 \end{cases}$$

$$\therefore \lim_{\sigma \to 0} C(\sigma) = 0$$

Caso 3: $S - E e^{-r(T-t)} = 0$

$$\therefore \log\left(\frac{S}{E}\right) + r(T-t) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d_1 \to 0, & N(d_1) \to 1/2 \\ d_2 \to 0, & N(d_2) \to 1/2 \end{cases}$$

$$\therefore \lim_{\sigma \to 0} C(\sigma) = \frac{1}{2}\left(S - E e^{-r(T-t)}\right) = 0$$

⇒ SUMARIANDO OS TRÊS CASOS:

$$\lim_{\sigma \to 0} C(\sigma) = \max\left(S - E e^{-r(T-t)}, 0\right) \quad (2)$$

* COMO

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma} = S\sqrt{T-t}\, N'(d_1) > 0 \quad \text{(VEGA)}$$

E COMO C É CONTÍNUA, OS POSSÍVEIS VALORES DE $C(\sigma)$ DEVEM SE ENCONTRAR NO INTERVALO DEFINIDO POR (1) E (2).

⇒ DA MESMA FORMA, A VOLATILIDADE IMPLÍCITA DEVE SER TAL QUE $C^* = C(\sigma^*)$ SATISFAÇA

$$\max\left(S - E e^{-r(T-t)}, 0\right) \le C^* < S$$

(ESTA É UMA RELAÇÃO QUE REFLETE A HIPÓTESE DE NÃO-ARBITRAGEM, COMO NÓS JÁ VIMOS ANTES)

⇒ COMO $C(\sigma)$ CRESCE MONOTONICAMENTE COM σ, SE A SOLUÇÃO DE $F(\sigma) \equiv C(\sigma) - C^* = 0$ EXISTIR, ELA SERÁ ÚNICA.

- SOLUÇÃO NUMÉRICA:

APLICANDO-SE O MÉTODO DE NEWTON

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - F(\sigma_n) / F'(\sigma_n)$$

COM

$$\sigma_0 = \hat{\sigma} = \sqrt{2\left|\frac{\log(S/E) + r(T-t)}{T-t}\right|}$$

OBTÉM-SE CONVERGÊNCIA QUADRÁTICA.

OBSERVAÇÕES:

i) $\hat{\sigma}$ é o valor de σ que maximiza $\frac{\partial C}{\partial \sigma} \equiv$ vega.

ii) Em geral se verifica que a volatilidade implícita estimada varia com os parâmetros da opção, como o preço de exercício.

Isto significa que a fórmula de B&S não descreve perfeitamente o valor da opção estabelecido pelo mercado, o que se deve ao fato de que a teoria de B&S se baseia em uma série de suposições simplificadoras.

De qualquer modo, os insights fornecidos por B&S continuam a ser apreciados pelo mercado.