12. O MÉTODO DE MONTE CARLO

SEJA X UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA CUJO VALOR ESPERADO, $E[X]=a$, E VARIÂNCIA, $Var[X]=b^2$, NÃO SÃO CONHECIDOS, MAS CUJAS AMOSTRAS INDEPENDENTES PODEM SER OBTIDAS.

$\Rightarrow$ DESEJAMOS OBTER ESTIMATIVAS PARA a E b

- ABORDAGEM DE MONTE CARLO:

A MÉDIA AMOSTRAL,

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

E A VARIÂNCIA AMOSTRAL,

$$b_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_n)^2$$

SÃO VARIÁVEIS ALEATÓRIAS QUE FORNECEM ESTIMATIVAS NÃO-TENDENCIOSAS PARA a E b.

$\Rightarrow$ ISTO SIGNIFICA QUE O VALOR ESPERADO DE a_n É a, E O VALOR ESPERADO DE b_n^2 É b^2.

SE O NÚMERO DE AMOSTRAS, n, É GRANDE, PELO TEOREMA DO LIMITE CENTRAL, VALE APROXIMADAMENTE

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \sim N(na, nb^2)$$

E, PORTANTO,

$$a_n - a \sim N\left(0, \frac{b^2}{n}\right)$$

COMO, PARA UMA V.A. NORMAL Y QUALQUER, VALE

$$\Pr\left[\mu - 1{,}96\sigma \leq Y \leq \mu + 1{,}96\sigma\right] = 0{,}95$$

OBTEMOS, APROXIMADAMENTE,

$$\Pr\left[\frac{-1{,}96\,b}{\sqrt{n}} \leq a - a_n \leq \frac{1{,}96\,b}{\sqrt{n}}\right] = 0{,}95$$

OU SEJA,

$$\Pr\left[a_n - \frac{1{,}96\,b}{\sqrt{n}} \leq a \leq a_n + \frac{1{,}96\,b}{\sqrt{n}}\right] = 0{,}95$$

SUBSTITUINDO O DESVIO-PADRÃO b POR SUA ESTIMATIVA b_n, A APROXIMAÇÃO SE TORNA

$$\Pr\left[a_n - \frac{1{,}96\,b_n}{\sqrt{n}} \leq a \leq a_n + \frac{1{,}96\,b_n}{\sqrt{n}}\right] = 0{,}95$$

$\Rightarrow$ O INTERVALO

$$\left[a_n - \frac{1{,}96}{\sqrt{n}}b_n,\ a_n + \frac{1{,}96}{\sqrt{n}}b_n\right]$$

É APROXIMADAMENTE UM INTERVALO DE CONFIANÇA 95% PARA O VALOR EXATO DA MÉDIA DA VARIÁVEL ALEATÓRIA X

$\Rightarrow$ 95% DAS VEZES O VALOR EXATO a SE ENCONTRARÁ DENTRO DESTE INTERVALO.

OBSERVAÇÕES:

i) O INTERVALO DE CONFIANÇA DECRESCE COM O INVERSO DA RAIZ QUADRADA DO NÚMERO DE AMOSTRAS

=> UMA REDUÇÃO NO 'ERRO' DA ESTIMATIVA POR UM FATOR DE 10 REQUER UM NÚMERO DE AMOSTRAS 100 VEZES MAIOR. ISTO DIFICULTA A OBTENÇÃO DE UMA PRECISÃO ELEVADA COM O MÉTODO DE M.C.

ii) O INTERVALO DE CONFIANÇA CRESCE PROPORCIONALMENTE AO DESVIO-PADRÃO DA VARIÁVEL X, O QUE TORNA INTERESSANTE TRANSFORMAR O PROBLEMA DA ESTIMAÇÃO DE E[X] NUM OUTRO DE ESTIMAÇÃO DO VALOR ESPERADO DE UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA Y COM A MESMA MÉDIA QUE X, MAS UMA VARIÂNCIA MENOR.

AS ABORDAGENS PARA ISTO SE CHAMAM DE TÉCNICAS DE REDUÇÃO DE VARIÂNCIA.

– Monte Carlo para precificação de opções:

Usando a abordagem de neutralidade ao risco, o valor de uma opção europeia em seu lançamento pode ser obtida como

$$e^{-rT} E[\Lambda(S(T))]$$

onde Λ é a função retorno da opção, e onde $S(T)$ é o valor do ativo no vencimento, considerando $\mu = r$:

$$S(T) = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T} Z}, \quad Z \sim N(0,1)$$

$\Rightarrow$ Precisamos computar o valor esperado da V.A.

$$e^{-rT} \Lambda(S(T))$$

$\Rightarrow$ Computamos M amostras $\xi_i \sim N(0,1)$

Fazemos $S_i = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}\xi_i}$

e $V_i = e^{-rT} \Lambda(S_i)$

Computamos $a_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} V_i$

$$b_M^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^{M} (V_i - a_M)^2$$

- MONTE CARLO PARA ESTIMAÇÃO DAS GREGAS:

O MÉTODO DE M.C. TAMBÉM PODE SER UTILIZADO PARA APROXIMAR DERIVADAS PARCIAIS.

e.g., SEJA $V(S,t)$ O VALOR DE UMA OPÇÃO EUROPEIA

$\Rightarrow$ ATÉ 1ª ORDEM EM h, NÓS TEMOS

$$\frac{\partial V(S,t)}{\partial S} \simeq \frac{V(S+h,t) - V(S,t)}{h}$$

$\Rightarrow$ ISTO FORNECE UMA APROXIMAÇÃO PARA A DELTA DA OPÇÃO, COM BASE EM DOIS VALORES OBTIDOS PARA PREÇOS LIGEIRAMENTE DISTINTOS DO ATIVO.

* ASSUMINDO QUE OS VALORES DA OPÇÃO SÃO CALCULADOS PELA ABORDAGEM DA NEUTRALIDADE AO RISCO, NÓS PODEMOS ESTIMAR A DELTA COMO

$$\frac{\partial V(S,t)}{\partial t} \simeq \frac{e^{-rT}}{h}\left\{E\left[\Lambda(S(T)), \text{PARA } S(0)=S_0\right] - E\left[\Lambda(S(T)), \text{PARA } S(0)=S_0+h\right]\right\}$$

$$\simeq \frac{e^{-rT}}{h} E\left[\left(\Lambda(S(T))\Big|_{S_0} - \Lambda(S(T))\Big|_{S_0+h}\right)\right]$$

$\Rightarrow$ SE NÓS USARMOS AS MESMAS AMOSTRAS PARA O CÔMPUTO DAS DUAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS, $\Lambda(S(T))\big|_{S_0}$ E $\Lambda(S(T))\big|_{S_0+h}$ A DIFERENÇA ENTRE ELAS DEVE SE TORNAR PEQUENA, QUANDO h É PEQUENO.

ISTO DEVE ASSEGURAR A PRECISÃO DA ESTIMATIVA DA DERIVADA.

⇒ PRECISAMOS COMPUTAR O VALOR ESPERADO DA V.A.

$$\left(\Lambda(S(T))\big|_{S_0} - \Lambda(S(T))\big|_{S_0+h} \right)$$

⇒ COMPUTAMOS M AMOSTRAS $\xi_i \sim N(0,1)$

FAZEMOS $S_i = S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}\xi_i}$,

$$S_i^h = (S_0+h) e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}\xi_i}$$

E $\Delta_i = \dfrac{e^{-rT}}{h}\left(\Lambda(S_i) - \Lambda(S_i^h)\right)$

COMPUTAMOS

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta_i$$

$$b_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (\Delta_i - a_n)^2$$