– REDUÇÃO DE VARIÂNCIA:

MONTE CARLO ⇒ COMPUTACIONALMENTE CUSTOSO

USANDO A MÉDIA AMOSTRAL

$$a_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} X_i$$

PARA APROXIMAR O VALOR ESPERADO $E[X]$

⇒ O INTERVALO DE CONFIANÇA CAI COM $\sqrt{M}$

⇒ PARA QUE A PRECISÃO AUMENTE POR UM FATOR DE 10, SÃO NECESSÁRIAS 100 VEZES MAIS AMOSTRAS

MAS,

COMO O INTERVALO DE CONFIANÇA CRESCE COM $\sqrt{VAR[X]}$

⇒ PODEMOS SUBSTITUIR AS AMOSTRAS X_i POR AMOSTRAS DE OUTRA VARIÁVEL ALEATÓRIA, Y COM $E[Y] = E[X]$, MAS COM VARIÂNCIA MENOR

e.g., SE $VAR[Y] = R\, VAR[X]$, $R < 1$

⇒ MESMO INTERVALO DE CONFIANÇA COM UM NÚMERO DE AMOSTRAS REDUZIDO PELO FATOR R

COVARIÂNCIA:

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS INDEPENDENTES:

$\Rightarrow$ CONHECER O VALOR DE UMA DELAS NÃO INFORMA NADA SOBRE A PROBABILIDADE DE OCORRÊNCIA DOS POSSÍVEIS VALORES DA OUTRA:

$$\Rightarrow \begin{cases} E[XY] = E[X]E[Y] \\ VAR[X+Y] = VAR[X] + VAR[Y] \end{cases}$$

VARIÁVEIS ALEATÓRIAS NÃO-INDEPENDENTES:

$$\Rightarrow \begin{cases} E[XY] = E[X]E[Y] + COV[X,Y] \\ VAR[X+Y] = VAR[X] + VAR[Y] + 2\,COV(X,Y) \end{cases}$$

COVARIÂNCIA:

$$COV[X,Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

$\Rightarrow$ SE X E Y SÃO INDEPENDENTES, $COV[X,Y] = 0$

SE $X = Y$, $COV[X,Y] = COV[X,X] = VAR[X]$

SE $COV[X,Y] > 0$, X E Y TENDEM A SER MAIORES OU MENORES QUE SUAS MÉDIAS SIMULTANEAMENTE

SE $COV[X,Y] < 0$, X TENDE A SER MAIOR QUE A SUA MÉDIA QUANDO Y É MENOR QUE A SUA, E VICE-VERSA

EXEMPLO: LANÇAMENTO DE DUAS MOEDAS

⇒ ESPAÇO AMOSTRAL:

$$S = \{K_1 - K_2,\ K_1 - C_2,\ C_1 - K_2,\ C_1 - C_2\}$$

PROBABILIDADES:

$$\{1/4,\ 1/4,\ 1/4,\ 1/4\}$$

VAMOS CONSIDERAR AS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

$$X = \begin{cases} 1, & \text{SE } K_1 \\ 0, & \text{SE NÃO} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1, & \text{SE } K_1 - K_2 \\ 0, & \text{SE NÃO} \end{cases}$$

$$\Rightarrow X = \begin{cases} 1, & \text{SE } K_1 - K_2 \\ 1, & \text{SE } K_1 - C_2 \\ 0, & \text{SE } C_1 - K_2 \\ 0, & \text{SE } C_1 - C_2 \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 1, & \text{SE } K_1 - K_2 \\ 0, & \text{SE } K_1 - C_2 \\ 0, & \text{SE } C_1 - K_2 \\ 0, & \text{SE } C_1 - C_2 \end{cases}$$

⇒ X E Y NÃO SÃO INDEPENDENTES

e.g., SE $X = 0$, TEREMOS $Y = 0$

COM PROBABILIDADE 1

$$\mathrm{COV}[X,Y] = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$$= \frac{1}{8}$$

- Redução de variância com amostras antitéticas: 12.10

Se f e g são duas funções, ambas monotonicamente crescentes ou monotonicamente decrescentes, então

$$[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)] \geq 0 \ , \ \forall x,y$$

$\Rightarrow$ Sendo X uma variável aleatória qualquer,

$$\operatorname{cov}[f(X), g(X)] \geq 0$$

Então,

$$\operatorname{cov}[f(X), f(-X)] \leq 0$$

Desejamos estimar

$$I = E[f(X)] \ , \ \text{com } X \sim N(0,1)$$

$\Rightarrow$ Estimador Monte Carlo padrão:

$$I_M = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} f(X_i), \text{ com } X_i \sim N(0,1) \text{ i.i.d.}$$

$\Rightarrow$ Estimador M.C. antitético:

$$\hat{I}_M = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} \frac{f(X_i)+f(-X_i)}{2}, \text{ com } X_i \sim N(0,1) \text{ i.i.d.}$$

Como a densidade $N(0,1)$ é simétrica em relação à origem,

$$-X_i \sim N(0,1)$$

DEFININDO

$$\hat{Y}_i = \frac{f(X_i) + f(-X_i)}{2}$$

TEMOS

$$E[\hat{Y}_i] = \frac{1}{2}\Big(E[f(X_i)] + E[f(-X_i)]\Big) = E[f(X_i)]$$

$$\begin{aligned}
Var[\hat{Y}_i] &= \frac{1}{4} Var[f(X_i) + f(-X_i)] \\
&= \frac{1}{4}\Big\{Var[f(X_i)] + Var[f(-X_i)] + \\
&\qquad + 2\,Cov[f(X_i) f(-X_i)]\Big\} \\
&= \frac{1}{2}\Big\{Var[f(X_i)] + Cov[f(X_i) f(-X_i)]\Big\} \\
&\leq \frac{1}{2} Var[f(X_i)]
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ O INTERVALO DE CONFIANÇA DA ESTIMATIVA ANTITÉTICA SE REDUZ A MENOS DA METADE DO OBTIDO COM O MONTE CARLO PADRÃO

*NO CASO DE UMA FUNÇÃO DA VARIÁVEL UNIFORME, TEMOS

$$\hat{I}_M = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} \frac{f(U_i) + f(1-U_i)}{2}, \quad \text{com } U_i \sim U(0,1) \text{ i.i.d.}$$