# 13. O MÉTODO BINOMIAL

⇒ PERMITE PRECIFICAR OPÇÕES NÃO EUROPEIAS PARA AS QUAIS NÃO EXISTEM FÓRMULAS ANALÍTICAS

⇒ UTILIZA UM MODELO DISCRETO PARA A VARIAÇÃO DO PREÇO DO ATIVO:

✱ CONSIDEREMOS O PREÇO DO ATIVO NOS INSTANTES DISCRETOS

$$t_i = i\,\delta t, \quad 0 \leq i \leq M$$

COM $\delta t = T/M$, ONDE $T \equiv$ VENCIMENTO DA OPÇÃO

ENTRE DOIS INSTANTES SUCESSIVOS QUAISQUER, ASSUMIMOS QUE AS POSSÍVEIS VARIAÇÕES DO PREÇO DO ATIVO SÃO DESCRITAS PELOS FATORES

$$\begin{cases} u \text{ (MOVIMENTO PARA CIMA), COM PROBABILIDADE } p \\ d \text{ (MOVIMENTO PARA BAIXO), COM PROBABILIDADE } (1-p) \end{cases}$$

e.g., SE EM $t=0$ O PREÇO DO ATIVO É $S_0$:

⇒ EM $t = t_1 \equiv \delta t$, OS POSSÍVEIS PREÇOS SERÃO

$$\begin{cases} uS_0, \text{ COM PROBABILIDADE } p \\ dS_0, \text{ COM PROBABILIDADE } (1-p) \end{cases}$$

⇒ EM $t = t_2 \equiv 2\delta t$, OS POSSÍVEIS PREÇOS SERÃO

$$\begin{cases} u^2 S_0, \text{ COM PROBABILIDADE } p^2 \\ ud\,S_0, \text{ COM PROBABILIDADE } 2p(1-p) \\ d^2 S_0, \text{ COM PROBABILIDADE } (1-p)^2 \end{cases}$$

⇒ EM GERAL, NO INSTANTE $t = t_i \equiv i\,\delta t$, EXISTEM $i+1$ POSSÍVEIS PREÇOS

$$S_m^i = d^{i-m} u^m S_0 \,, \quad 0 \le m \le i$$

QUE FORMAM UMA ÁRVORE RECOMBINANTE.

⇒ NO VENCIMENTO, $t = t_M = T$, TEREMOS $M+1$ POSSÍVEIS VALORES PARA O ATIVO, $S_m^M$, $0 \le m \le M$

O RETORNO DE UMA OPÇÃO EUROPEIA EM $t=T$ ('PAYOFF') SERÁ, PORTANTO,

$$V_m^M = \Lambda(S(T)) = \Lambda(S_m^M)\,, \quad 0 \le m \le M$$

ONDE $\Lambda$ É A FUNÇÃO RETORNO DA OPÇÃO.

* O NOSSO OBJETIVO É DETERMINAR O VALOR DA OPÇÃO NO INSTANTE $t=0$ : $V_0^0$

ISTO PODE SER CONSEGUIDO PERCORRENDO-SE A ÁRVORE BINOMIAL DA DIREITA PARA A ESQUERDA.

e.g., SUPONHAMOS QUE TODOS OS POSSÍVEIS VALORES DA OPÇÃO SEJAM CONHECIDOS EM $t = t_{i+1}$:

$$V_m^{i+1}\,, \quad 0 \le m \le i+1$$

⇒ CADA POSSÍVEL VALOR NO INSTANTE ANTERIOR $t = t_i$

$$V_m^i$$

SERÁ OBTIDO A PARTIR DOS VALORES

$$\begin{cases} V_{m+1}^{i+1}\,, & \text{COM PROBABILIDADE } p \\ V_m^{i+1}\,, & \text{COM PROBABILIDADE } (1-p) \end{cases}$$

ASSIM, O VALOR $V_m^i$ FICA DEFINIDO COMO A MÉDIA (VALOR ESPERADO) DESTES DOIS VALORES, CORRIGIDA PARA A INFLAÇÃO:

$$V_m^i = e^{-r\delta t}\left(p\, V_{m+1}^{i+1} + (1-p)\, V_m^{i+1}\right)$$

⇒ SEGUINDO ESTE PROCEDIMENTO PARA TODOS OS $i$ $(0 \le i \le M-1)$ E TODOS OS $m$ $(0 \le m \le i)$ OBTEMOS $V_0^0$.

⇒ O MÉTODO BINOMIAL CONSISTE NOS SEGUINTES PASSOS:

i) UMA VEZ ESCOLHIDOS OS PARÂMETROS

$$u,\ d,\ p \text{ E } M$$

CONSTRUÍMOS A ÁRVORE DOS PREÇOS DO ATIVO, SEGUNDO A RELAÇÃO

$$S_m^i = d^{i-m} u^m S_0 , \quad \begin{array}{l} 0 \le m \le i \\ 0 \le i \le M \end{array}$$

ii) OBTIDOS OS PREÇOS DO ATIVO EM $t = t_M = T$, OS VALORES CORRESPONDENTES DA OPÇÃO SÃO CALCULADOS COMO

$$V_m^M = \Lambda(S_m^M) , \quad 0 \le m \le M$$

iii) A RELAÇÃO RECURSIVA

$$V_m^i = e^{-r\delta t}\left(p\, V_{m+1}^{i+1} + (1-p)\, V_m^{i+1}\right) , \quad \begin{array}{l} 0 \le m \le i \\ 0 \le i \le M-1 \end{array}$$

É ENTÃO EMPREGADA PARA VOLTARMOS NA ÁRVORE BINOMIAL ATÉ O INSTANTE $t = t_0 = 0$, QUANDO OBTEMOS $V_0^0$.

$$V_0^0 \equiv \text{PREÇO DO LANÇAMENTO DA OPÇÃO}$$

- OBTENÇÃO DOS PARÂMETROS:

VAMOS DEFINIR A VARIÁVEL ALEATÓRIA $R_i$, ASSOCIADA AO MOVIMENTO DO PREÇO DO ATIVO ENTRE $t_{i-1}$ E $t_i$

$$R_i = \begin{cases} 1, \text{ se o movimento é } u \Rightarrow \text{Probabilidade } p \\ 0, \text{ se o movimento é } d \Rightarrow \text{Probabilidade } (1-p) \end{cases}$$

$\Rightarrow R_i$ É UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA DE BERNOULLI

$$\therefore E[R_i] = p, \quad VAR[R_i] = p(1-p)$$

APÓS $n$ INCREMENTOS TEMPORAIS, O PREÇO DO ATIVO TERÁ SOFRIDO

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} R_i \text{ movimentos } u \\ n - \sum_{i=1}^{n} R_i \text{ movimentos } d \end{cases}$$

$\Rightarrow$ NO INSTANTE $t = n\delta t$:

$$S(n\delta t) = S_0 \, u^{\left(\sum_{i=1}^{n} R_i\right)} d^{\left(n - \sum_{i=1}^{n} R_i\right)}$$

$$\therefore \frac{S(n\delta t)}{S_0} = d^n \left(\frac{u}{d}\right)^{\sum_{i=1}^{n} R_i}$$

$$\therefore \log\left[\frac{S(n\delta t)}{S_0}\right] = n \log d + \log\left(\frac{u}{d}\right) \sum_{i=1}^{n} R_i$$

MAS, PELO TEOREMA DO LIMITE CENTRAL, NÓS TEREMOS

$$\sum_{i=1}^{n} R_i \sim N\left(np, np(1-p)\right)$$

SE $n$ É GRANDE.

ASSIM,

$$\log\left[\frac{S(n\delta t)}{S_0}\right] \sim n\log d + \log\left(\frac{u}{d}\right) N(np, np(1-p))$$

$$(1)\ \begin{cases} E\left[\log\left(\frac{S(n\delta t)}{S_0}\right)\right] = n\left(\log d + p\log\left(\frac{u}{d}\right)\right) = n\left(p\log u + (1-p)\log d\right) \\ Var\left[\log\left(\frac{S(n\delta t)}{S_0}\right)\right] = np(1-p)\log^2\left(\frac{u}{d}\right) \end{cases}$$

⇒ PARA COMPATIBILIZAR ESTE RESULTADO COM O MODELO CONTÍNUO USADO EM BLACK & SCHOLES, i.e.,

$$\frac{S(t)}{S_0} = e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}\,z}, \quad z \sim N(0,1)$$

$$\therefore \log\left[\frac{S(t)}{S_0}\right] = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\sqrt{t}\,z$$

NÓS VAMOS IMPOR AS CONDIÇÕES

$$E\left[\log\left(\frac{S(n\delta t)}{S_0}\right)\right] = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)n\delta t$$

(COMO A SUPOSIÇÃO DE NEUTRALIDADE AO RISCO FOI USADA)

$$E \quad Var\left[\log\left(\frac{S(n\delta t)}{S_0}\right)\right] = \sigma^2 n\delta t$$

⇒ UTILIZANDO AS EQUAÇÕES (1), NÓS ENTÃO OBTEMOS

$$\begin{cases} p \log u + (1-p)\log d = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\delta t \\ \log\left(\frac{u}{d}\right) = \sigma \sqrt{\frac{\delta t}{p(1-p)}} \end{cases}$$

DEFININDO $\delta t = T/N$, RESULTAM DUAS EQUAÇÕES NAS TRÊS INCÓGNITAS $p$, $u$ E $d$.

⇒ SE ESCOLHEMOS $p = \frac{1}{2}$, OBTEMOS O RESULTADO

$$\begin{cases} u = e^{\sigma\sqrt{\delta t} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\delta t} \\ d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\delta t} \end{cases}$$

QUANDO $\delta t$ É PEQUENO (OU SEJA, $N$ É GRANDE) ISTO DEVE EQUIVALER À SOLUÇÃO DE B&S

EXPERIMENTALMENTE, VERIFICA-SE QUE:

i) O MÉTODO BINOMIAL REALMENTE CONVERGE PARA A SOLUÇÃO DE B&S QUANDO $N \to \infty$.

ii) A CONVERGÊNCIA NÃO É MONOTÔNICA

iii) NO CASO DA PRECIFICAÇÃO DE UMA PUT EUROPEIA, O ERRO

$$e_N = |V_0^0 - P(S_0, 0)|$$

SATISFAZ

$$e_N \leq K/N$$

ONDE $K$ É UMA CONSTANTE APROXIMADAMENTE IGUAL A 1.