14. VOLATILIDADE HISTÓRICA

⇒ ESTIMAÇÃO DA VOLATILIDADE A PARTIR DO COMPORTAMENTO PRÉVIO DO ATIVO:

DADO UM MODELO PARA O PREÇO DO ATIVO, DEPENDENTE DE σ, E OBSERVANDO-SE O REGISTRO HISTÓRICO DOS PREÇOS ATÉ O PRESENTE, TENTAMOS OBTER O VALOR σ^* QUE EXPLICA OS DADOS A PARTIR DO MODELO.

– ESTIMATIVAS DO TIPO MONTE CARLO:

SUPOMOS QUE O REGISTRO DOS PREÇOS DO ATIVO, $S(t_i)$, ESTÁ DISPONÍVEL EM INSTANTES IGUALMENTE ESPAÇADOS, $t_i = i\Delta t$

⇒ DEFINIMOS AS RAZÕES LOGARÍTMICAS

$$U_i = \log \frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}$$

O NOSSO MODELO PARA O PREÇO DO ATIVO É

$$S(t_i) = S(t_{i-1})\, e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_i - t_{i-1}) + \sigma\sqrt{t_i - t_{i-1}}\, Z_{i-1}}$$

$$\text{COM } Z_{i-1} \sim N(0,1)$$

⇒ OS U_i SÃO VARIÁVEIS ALEATÓRIAS NORMAIS i.i.d., DE MÉDIA $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t$ E VARIÂNCIA $\sigma^2\Delta t$.

⇒ OBTER AS RAZÕES LOGARÍTMICAS EQUIVALE A AMOSTRAR UMA DISTRIBUIÇÃO $N((\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t, \sigma^2\Delta t)$

⇒ UMA ABORDAGEM MONTE CARLO PODE SER EMPREGADA

SUPONHAMOS QUE O INSTANTE PRESENTE É $t = t_m$, E QUE ESTÃO DISPONÍVEIS OS $n+1$ VALORES MAIS RECENTES DO ATIVO:

$$\{ S(t_{m-n}), S(t_{m-n+1}), \ldots, S(t_{m-1}), S(t_m) \}$$

⇒ PODEMOS CONSTRUIR AS RAZÕES LOGARÍTMICAS

$$\{ U_m, U_{m-1}, \ldots, U_{m-n+1} \}$$

CUJA MÉDIA AMOSTRAL E VARIÂNCIA AMOSTRAL SÃO DADAS POR

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} U_{m+1-i} \\ b_n^2 = \dfrac{1}{n-1} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (U_{m+1-i} - a_n)^2 \end{cases}$$

⇒ PODEMOS ESTIMAR O PARÂMETRO σ COMPARANDO a_n OU b_n^2 COM OS VALORES EXATOS FORNECIDOS PELO MODELO PARA A MÉDIA, $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t$, E A VARIÂNCIA, $\sigma^2 \Delta t$.

NA PRÁTICA, A ESTIMATIVA COM BASE NA VARIÂNCIA É MAIS CONFIÁVEL, E NOS FORNECE

$$\sigma^* = \frac{b_n}{\sqrt{\Delta t}} = \sqrt{\frac{1}{\Delta t}\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(U_{m+1-i} - a_n)^2\right]} \quad (1)$$

E USANDO A EXPRESSÃO PARA a_n:

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{1}{\Delta t}\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} U_{m+1-i}^2 - \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n} U_{m+1-i}\right)^2\right]}$$

* A SEGUINTE SIMPLIFICAÇÃO RESULTA EM UMA ESTIMATIVA MAIS CONFIÁVEL:

COMO SE DEMONSTRA (ABAIXO) QUE A MÉDIA AMOSTRAL É UMA V.A. NORMAL COM MÉDIA E VARIÂNCIA PEQUENAS, É RAZOÁVEL SUBSTITUÍ-LA POR ZERO NA EQUAÇÃO (1), O QUE RESULTA EM

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{1}{\Delta t}\,\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} U^2_{m+1-i}} \qquad (2)$$

DEMONSTRAÇÃO:

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_{m+1-i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log\left[\frac{S(t_{m+1-i})}{S(t_{m-i})}\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\log S(t_{m+1-i}) - \log S(t_{m-i})\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\log S(t_m) - \log S(t_{m-n})\right]$$

$$= \frac{1}{n}\log\frac{S(t_m)}{S(t_{m-n})}$$

COMO $\log\dfrac{S(t_m)}{S(t_{m-n})} \sim N\left((\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)n\Delta t,\ \sigma^2 n\Delta t\right)$

TEMOS $a_n \sim N\left((\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)\Delta t,\ \sigma^2\dfrac{\Delta t}{n}\right)$

$\Rightarrow$ a_n É NORMAL COM MÉDIA E VARIÂNCIA PEQUENAS

- OUTRAS ESTIMATIVAS DE VOLATILIDADE:

*PELO MÉTODO DA MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA, OBTÉM-SE UMA ESTIMATIVA PARECIDA COM A DA EQUAÇÃO (2):

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{1}{\Delta t}\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} U_{m+1-i}^2} \qquad (3)$$

=> ISTO PODE SER REESCRITO COMO

$$\Delta t\,\sigma^{*2} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} U_{m+1-i}^2$$

E SE SE DESEJA ATRIBUIR MAIOR PESO AOS INSTANTES MAIS RECENTES, PODE-SE UTILIZAR A VARIANTE

$$\Delta t\,\sigma^{*2} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i U_{m+1-i}^2$$

$$\text{com} \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1 \quad \text{e} \quad \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_m > 0$$

POR EXEMPLO:

USANDO $\alpha_{i+1} = w\alpha_i$, PARA $0 < w < 1$, OBTEMOS

$$\Delta t\,\sigma^{*2} = \frac{\sum_{i=1}^{m} w^i U_{m+1-i}^2}{\sum_{i=1}^{m} w^i} \qquad (4)$$

$w = 0{,}94$ É UM VALOR COMUMENTE EMPREGADO

* SE UMA NOVA ESTIMATIVA DE VOLATILIDADE É REQUERIDA A CADA INSTANTE, PODE-SE EMPREGAR UMA ABORDAGEM DE MÉDIA MÓVEL:

$$\Delta t \sigma^{*2}_{n+1} = w \Delta t \sigma^{*2}_{n} + (1-w) U^2_{n+1} \qquad (5)$$

ONDE

$\Delta t \sigma^{*}_{n}$ É A ESTIMATIVA DE $\Delta t \sigma^2$ COMPUTADA EM $t = t_n$, COM BASE NOS VALORES $\{U_{n+1-i}\}_{i=1}^{M}$.

E ONDE w É UM FATOR DE PONDERAÇÃO, $0 < w < 1$.

=> PARA $t > t_n$, OS DADOS DA SÉRIE TEMPORAL, DE t_n PARA TRÁS, NÃO PRECISAM MAIS SER CONSIDERADOS.

ESTA ABORDAGEM SE CHAMA EWMA ('EXPONENTIALLY WEIGHTED MOVING AVERAGE')

OBSERVAÇÃO: O MODELO DE B&S ASSUME UMA VOLATILIDADE CONSTANTE, EMBORA SE VERIFIQUE EMPIRICAMENTE QUE σ VARIA COM O TEMPO.