15. DIFERENÇAS FINITAS

EM GERAL AS EDPs ASSOCIADAS À PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES EXÓTICAS NÃO ADMITEM SOLUÇÃO ANALÍTICA

* O MÉTODO MAIS POPULAR PARA A OBTENÇÃO DE APROXIMAÇÕES DA SOLUÇÃO É O DAS DIFERENÇAS FINITAS

– OPERADORES DE DIFERENÇAS FINITAS:

APROXIMAÇÃO PARA A DERIVADA DE UMA FUNÇÃO SUAVE, $y(x)$:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} \simeq \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

PARA h PEQUENO

$\Rightarrow$ DISCRETIZANDO O DOMÍNIO DA FUNÇÃO NUMA GRADE OU MALHA : $y(mh) \equiv y_m$

$$\therefore \; y'_m = \frac{y_{m+1} - y_m}{h}$$

$$\therefore \; \Delta \equiv y_{m+1} - y_m = h y'_m$$

$\Delta = y_{m+1} - y_m$ É O OPERADOR DE DIFERENÇA FINITA PROGRESSIVO

TAMBÉM PODEMOS DEFINIR

$\nabla \equiv y_m - y_{m-1}$: OPERADOR DE DIF. FINITA REGRESSIVO

$\delta \equiv y_{m+\frac{1}{2}} - y_{m-\frac{1}{2}}$: OPERADOR DE DIF. FINITA MÉDIO CENTRAL

$\Delta_0 \equiv \frac{1}{2}(y_{m+1} - y_{m-1})$: OPERADOR DE DIF. FINITA CENTRAL COMPLETO

$\delta^2 \equiv y_{m+1} - 2y_m + y_{m-1}$: OPERADOR DE DIF. FINITA CENTRAL DE 2ª ORDEM

$E \equiv y_{m+1}$: OPERADOR DE DESLOCAMENTO

$\mu \equiv \frac{1}{2}(y_{m+\frac{1}{2}} + y_{m-\frac{1}{2}})$: OPERADOR DE MÉDIA

- EQUAÇÃO DO CALOR:

EDP: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\quad 0 \leq x \leq L$, $\quad 0 \leq t \leq T$

CONDIÇÃO INICIAL: $u(x,0) = g(x)$ (i)

CONDIÇÕES DE CONTORNO: $u(0,t) = a(t)$, $u(L,t) = b(t)$ (ii)

$\Rightarrow$ $u(x,t)$ DÁ A TEMPERATURA, NO INSTANTE t, DO PONTO x EM UMA BARRA FINA DE METAL COM PERFIL INICIAL DE TEMPERATURA DADO POR (i), QUANDO AS EXTREMIDADES SÃO AQUECIDAS DE ACORDO COM (ii)

- EXEMPLO DE SOLUÇÃO:

$$\text{SE } L=\pi,\quad g(x)=\operatorname{sen} x,\quad a(t)=b(t)=0$$

$$\Rightarrow u(x,t)=e^{-t}\operatorname{sen}(x)$$

* COMO VEREMOS A EDP DE BLACK & SCHOLES PODE SER MAPEADA EM UMA EQUAÇÃO DO CALOR

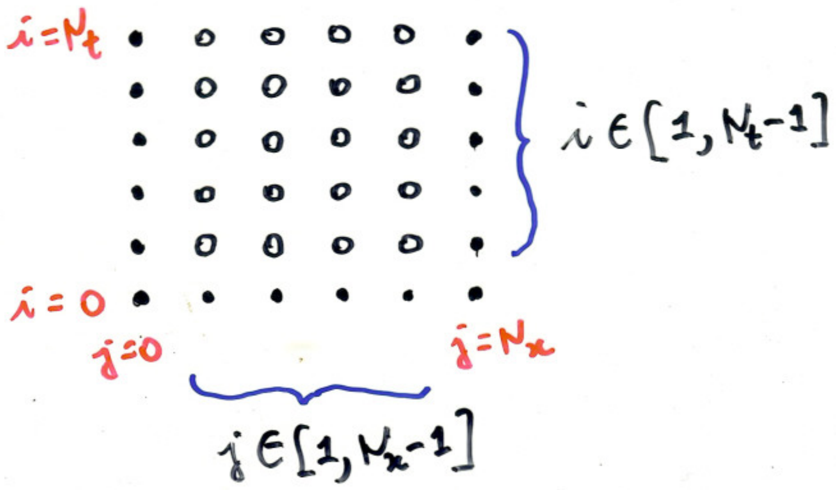
- SOLUÇÃO APROXIMADA PARA A EQUAÇÃO DO CALOR:

$\Rightarrow$ DISCRETIZAÇÃO: COMPUTAMOS A SOLUÇÃO APENAS EM UM CONJUNTO DISCRETO DE PONTOS

- DIVIDIMOS O EIXO x EM N_x+1 PONTOS IGUALMENTE ESPAÇADOS: $\{jh\}_{j=0}^{N_x}$ COM $h=L/N_x$

- DIVIDIMOS O EIXO t EM N_t+1 PONTOS IGUALMENTE ESPAÇADOS: $\{ik\}_{i=0}^{N_t}$ COM $k=T/N_t$

$\Rightarrow$ GRADE: (jh, ik)



- • = VALORES DETERMINADOS PELAS CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNO

⇒ PROCURAMOS OS VALORES APROXIMADOS

$$U_j^i \simeq u(jh, ik) \qquad \begin{matrix} 1 \leq j \leq N_x - 1 \\ 1 \leq i \leq N_t - 1 \end{matrix}$$

COM

$$\begin{cases} U_0^{i+1} = a((i+1)k), \ \forall i \\ U_{N_x}^{i+1} = b((i+1)k), \ \forall i \end{cases}$$

$$U_j^0 = g(jh), \ \forall j$$

- APROXIMAÇÃO FTCS (TEMPO PROGRESSIVO, ESPAÇO CENTRAL)

⇒ APROXIMAMOS:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} \text{ COMO } k^{-1}\Delta_t & \text{(DIFERENÇA PROGRESSIVA ESCALADA)} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \text{ COMO } h^{-2}\delta_x^2 & \text{(DIFERENÇA CENTRAL ESCALADA DE 2ª ORDEM)} \end{cases}$$

⇒ A EDP SE TORNA

$$k^{-1}\Delta_t U_j^i - h^{-2}\delta_x^2 U_j^i = 0$$

$$\therefore \frac{U_j^{i+1} - U_j^i}{k} - \left[\frac{U_{j+1}^i - 2U_j^i + U_{j-1}^i}{h^2}\right] = 0$$

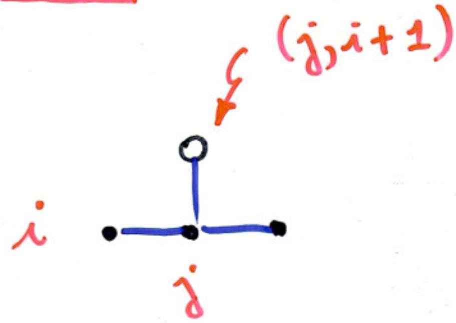
$$\therefore U_j^{i+1} = \nu U_{j+1}^i + (1 - 2\nu) U_j^i + \nu U_{j-1}^i$$

ONDE $\nu = \dfrac{k}{h^2} \equiv$ RAZÃO DA GRADE

$$U_j^{i+1} = \nu U_{j+1}^i + (1-2\nu) U_j^i + \nu U_{j-1}^i$$

$\Rightarrow$ CONHECENDO OS VALORES NO TEMPO i, OBTEMOS EXPLICITAMENTE OS VALORES NO TEMPO $i+1$.

- STENCIL PARA O FTCS:



- FORMA VETORIAL:

$$\underset{\sim}{U}^{i+1} = F\underset{\sim}{U}^i + \underset{\sim}{p}^i \qquad 0 \le i \le N_t - 1$$

COM

$$F = \begin{pmatrix} 1-2\nu & \nu & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \nu & 1-2\nu & \nu & 0 & \cdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & 1-2\nu & & \nu \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \nu & 1-2\nu \end{pmatrix} \quad (N_x-1 \times N_x-1)$$

$$\underset{\sim}{U}^i = \begin{pmatrix} U_1^i \\ U_2^i \\ \vdots \\ U_{N_x-1}^i \end{pmatrix} \qquad \underset{\sim}{p}^i = \begin{pmatrix} \nu a(ik) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \nu b(ik) \end{pmatrix} \quad (1 \times N_x - 1)$$

USANDO

$$\underset{\sim}{U}^0 = \begin{pmatrix} g(h) \\ g(2h) \\ \vdots \\ g((N_x-1)h) \end{pmatrix} \quad (1 \times N_x - 1)$$

* FTCS REQUER $k \ll h$ ($\Rightarrow \nu$ PEQUENO) PARA NÃO SE TORNAR INSTÁVEL.

PARA EVITAR ESTA RESTRIÇÃO, OBTENDO IGUAL PRECISÃO, PODE-SE USAR O BTCS, QUE, CONTUDO, É COMPUTACIONALMENTE MAIS CUSTOSO.

- APROXIMAÇÃO BTCS (TEMPO REGRESSIVO, ESPAÇO CENTRAL)

$\Rightarrow$ APROXIMAMOS $\frac{\partial}{\partial t}$ COMO $k^{-1}\nabla_t$ (DIFERENÇA REGRESSIVA ESCALADA)

$\Rightarrow$ A EDP SE TORNA

$$k^{-1}\nabla_t U_j^i - h^{-2}\delta_x^2 U_j^i = 0$$

$$\therefore \frac{U_j^i - U_j^{i-1}}{k} - \left[\frac{U_{j+1}^i - 2U_j^i + U_{j-1}^i}{h^2}\right] = 0$$

E INCREMENTANDO O ÍNDICE TEMPORAL DE UMA UNIDADE.

$$U_j^{i+1} = U_j^i + \nu\left(U_{j+1}^{i+1} - 2U_j^{i+1} + U_{j-1}^{i+1}\right)$$

$\Rightarrow$ BTCS NÃO FORNECE EXPLICITAMENTE A SOLUÇÃO NO TEMPO $i+1$ A PARTIR DAQUELA NO TEMPO i.

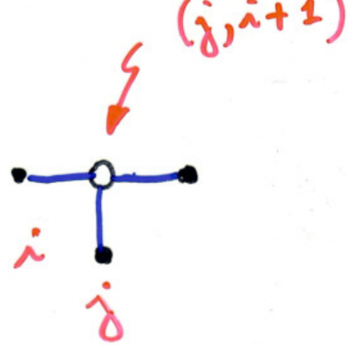
$\Rightarrow$ ELA REQUER A RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR:

$$B\underset{\sim}{U}^{i+1} = \underset{\sim}{U}^i + \underset{\sim}{q}^i \qquad 0 \le i \le N_t - 1$$

Com

$$B = \begin{pmatrix} 1+2\nu & -\nu & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -\nu & 1+2\nu & -\nu & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & -\nu & 1+2\nu & -\nu \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\nu & 1+2\nu \end{pmatrix} \qquad \underset{\sim}{q}^{i} = \begin{pmatrix} \nu a((i+1)h) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \nu b((i+1)h) \end{pmatrix}$$

- STENCIL PARA O BTCS:



- APROXIMAÇÃO DE CRANK-NICOLSON:

⇒ PROPORCIONA MAIOR PRECISÃO TEMPORAL

PODE SER OBTIDO PELA MÉDIA DE FTCS E BTCS:

$$\frac{1}{2}(I+B)\underset{\sim}{U}^{i+1} = \frac{1}{2}(I+F)\underset{\sim}{U}^{i} + \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{p}^{i} + \underset{\sim}{q}^{i}\right)$$

ONDE I É A MATRIZ IDENTIDADE

⇒ MÉTODO IMPLÍCITO COMO BTCS

STENCIL: