16. DIFERENÇAS FINITAS PARA BLACK & SCHOLES

EDP DE BLACK & SCHOLES:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

CONDIÇÕES FINAIS $(t=T)$:

$$C(S,T) = \max(S(T)-E, 0)$$
$$P(S,T) = \max(E-S(T), 0)$$

CONDIÇÕES DE CONTORNO (DOMÍNIO $S \in [0,\infty]$):

$$C(0,t) = 0, \quad C(\infty,t) = S \qquad 0 \le t \le T$$
$$P(0,t) = E e^{-r(T-t)}, \quad P(\infty,t) = 0$$

* POR CONVENIÊNCIA, FAZEMOS A MUDANÇA DE VARIÁVEL

$$t \to \tau = T - t \qquad (\tau \in [T,0])$$

DE MODO A TRABALHAR COM CONDIÇÕES INICIAIS, E NOS RESTRINGIMOS AO DOMÍNIO $S \in [0,L]$, L ALTO

$\Rightarrow$ EDP:

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rS\frac{\partial V}{\partial S} + rV = 0$$

COM
$$\begin{cases} C(S,0) = \max(S(0)-E, 0) \\ P(S,0) = \max(E-S(0), 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C(0,\tau) = 0, \quad C(L,\tau) = L \\ P(0,\tau) = E e^{-r\tau}, \quad P(L,\tau) = 0 \end{cases} \qquad T \le \tau \le 0$$

- DISCRETIZAÇÃO:

UTILIZANDO A DIFERENÇA CENTRAL TOTAL PARA $\frac{\partial V}{\partial S}$, OBTEMOS

FTCS:

$$\frac{V_j^{i+1} - V_j^i}{k} - \frac{1}{2}\sigma^2 (jh)^2 \frac{\left(V_{j+1}^i - 2V_j^i + V_{j-1}^i\right)}{h^2} -$$
$$- r jh \left(\frac{V_{j+1}^i - V_{j-1}^i}{2h}\right) + r V_j^i = 0$$

BTCS:

$$\frac{V_j^{i+1} - V_j^i}{k} - \frac{1}{2}\sigma^2 (jh)^2 \frac{\left(V_{j+1}^{i+1} - 2V_j^{i+1} + V_{j-1}^{i+1}\right)}{h^2} -$$
$$- r jh \left(\frac{V_{j+1}^{i+1} - V_{j-1}^{i+1}}{2h}\right) + r V_j^{i+1} = 0$$

⇒ COM A DEFINIÇÃO APROPRIADA DAS MATRIZES, OS DOIS MÉTODOS PODEM SER REEXPRESSOS NA FORMA VETORIAL:

i) FTCS:
$$\underset{\sim}{V}^{i+1} = F\underset{\sim}{V}^i + \underset{\sim}{p}^i$$

ii) BTCS:
$$B\underset{\sim}{V}^{i+1} = \underset{\sim}{V}^i + \underset{\sim}{q}^i$$

iii) CRANK-NICOLSON:
$$\frac{1}{2}(I+B)\underset{\sim}{V}^{i+1} = \frac{1}{2}(I+F)\underset{\sim}{V}^i + \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{p}^i + \underset{\sim}{q}^i\right)$$

- A EDP DE BLACK-SCHOLES E A EQUAÇÃO DO CALOR:

SE $V(S,t)$ SATISFAZ A EDP DE BLACK-SCHOLES,

ENTÃO PODEMOS ESCREVER

$$V(S,t) = e^{-ax-b\tau}\, u(x,\tau)$$

ONDE $u(x,\tau)$ SATISFAZ A EQUAÇÃO DO CALOR

COM

$$x = \log\left(\frac{S}{E}\right)$$

$$\tau = (T-t)\frac{\sigma^2}{2}$$

$$a = \frac{r}{\sigma^2} - \frac{1}{2}$$

$$b = \left(\frac{r}{\sigma^2} + \frac{1}{2}\right)^2$$