2. INTRODUÇÃO À PRECIFICAÇÃO DE OPÇÕES

- ALGUNS RESULTADOS SOBRE OPÇÕES INDEPENDEM DE UM MODELO PARA O COMPORTAMENTO DO VALOR DO ATIVO ASSOCIADO.

DEFINIÇÕES:

- TAXA DE JUROS:

UM INVESTIMENTO SEM RISCO, CAPITALIZADO CONTINUAMENTE À TAXA DE JUROS r, TEM VALOR EXPONENCIALMENTE CRESCENTE:

$$D(t) = D_0 e^{rt}, \quad \text{ONDE } D_0 \equiv \text{VALOR INVESTIDO EM } t=0$$
$$D(t) \equiv \text{VALOR NO INSTANTE } t$$

OBS.: NA REALIDADE, A TAXA DE JUROS VARIA COM O TEMPO E COSTUMA DEPENDER DO VALOR INVESTIDO, MAS ASSUMIREMOS QUE r É CONSTANTE E ASSUME O MESMO VALOR TANTO PARA INVESTIMENTO QUANTO PARA EMPRÉSTIMOS.

O TEMPO SERÁ MEDIDO EM ANOS, PORTANTO r É A TAXA DE JUROS ANUAL.

VALOR DO DINHEIRO NO TEMPO:

\$100 NO INSTANTE $t=0$ EQUIVALE A \$$100e^{rt}$ INSTANTE t.

\$100 NO INSTANTE t EQUIVALE A \$$100e^{-rt}$ NO INSTANTE $t=0$.

=> ISTO SE CHAMA 'DESCONTAR PELA INFLAÇÃO, OU PELOS JUROS'!

– VENDA A DESCOBERTO: 'SHORT SELLING'

* UM PORTFOLIO REPRESENTA QUALQUER COMBINAÇÃO DE ATIVOS, OPÇÕES, DINHEIRO (INVESTIDO EM BANCO)

* VAMOS ASSUMIR QUE UM PORTFOLIO POSSA POSSUIR QUANTIDADES NEGATIVAS DESTES INSTRUMENTOS.

– UM VALOR NEGATIVO EM DINHEIRO SIGNIFICA QUE AQUELA QUANTIA FOI TOMADA EM EMPRÉSTIMO NUM BANCO.

– UMA QUANTIDADE NEGATIVA DE ATIVOS OU OPÇÕES SIGNIFICA QUE FOI REALIZADA UMA VENDA A DESCOBERTO.

i.e., FOI FEITA A VENDA DE UM ITEM QUE NÃO SE POSSUI, MAS FOI OBTIDO POR EMPRÉSTIMO DE UMA TERCEIRA PESSOA, PARA DEVOLVÊ-LO DEPOIS.

VAMOS ASSUMIR QUE ISTO SEJA POSSÍVEL A QUALQUER MOMENTO E SEM CUSTO, E QUE O 'SHORT SELLER' PODE DECIDIR QUANDO COMPRAR O ITEM PARA DEVOLVÊ-LO AO SEU DONO.

EXEMPLO: SEJA $S(t)$ O VALOR DE UM ATIVO NO INSTANTE t.
SE NÓS VENDEMOS O ATIVO A DESCOBERTO EM t_1 E O COMPRAMOS DE VOLTA EM t_2, ENTÃO

– EM $t=t_1$, NÓS GANHAMOS $S(t_1)$

– EM $t=t_2$, NÓS PAGAMOS $S(t_2)$

$\Rightarrow$ SE O GANHO INICIAL É INVESTIDO À TAXA r, O LUCRO/PERDA EM $t=t_2$ SERÁ

$$e^{r(t_2-t_1)}S(t_1)-S(t_2)$$

- ARBITRAGEM:

PRINCÍPIO DA NÃO-ARBITRAGEM:

NÃO EXISTE A OPORTUNIDADE DE SE OBTER UM LUCRO SEM RISCO QUE SEJA MAIOR DO QUE O OBTIDO COM OS JUROS DE UM DEPÓSITO BANCÁRIO.

JUSTIFICAÇÃO:

SUPONHAMOS QUE A ARBITRAGEM SEJA POSSÍVEL

=> EXISTE UM PORTFÓLIO QUE GARANTE LUCRO SEM RISCO SUPERIOR AO OBTIDO COM O DEPÓSITO BANCÁRIO

NESTE CASO, OS INVESTIDORES PODEM TOMAR DINHEIRO EMPRESTADO NO BANCO E USÁ-LO PARA MONTAR O TAL PORTFÓLIO.

=> É ÓBVIO QUE RAPIDAMENTE OS MECANISMOS DE OFERTA E PROCURA IRÃO FAZER A TAXA DE JUROS AUMENTAR E/OU O RETORNO DO PORTFÓLIO CAIR

ALÉM DISSO, O MERCADO SOFRE PERMANENTE ESCRUTÍNIO DOS 'ARBITRAGEURS', QUE BUSCAM EXPLORAR SITUAÇÕES DE DESEQUILÍBRIO PASSAGEIRO

- PARIDADE PUT-CALL

=> RELAÇÃO ENTRE OS VALORES DE UMA OPÇÃO DE COMPRA E DE UMA OPÇÃO DE VENDA, AMBAS COM O MESMO PREÇO DE EXERCÍCIO E O MESMO VENCIMENTO.

PELA PARIDADE, SABENDO-SE O VALOR DE UMA CALL OBTÉM-SE IMEDIATAMENTE O VALOR DA PUT CORRESPONDENTE, E VICE-VERSA.

CONSIDEREMOS DOIS PORTFÓLIOS:

Π_A: UMA CALL MAIS Ee^{-rT} EM DINHEIRO

Π_B: UMA PUT MAIS UMA UNIDADE DO ATIVO

NO VENCIMENTO:

VALOR DE Π_A: $\max(S(T)-E,0)+E = \max(S(T),E)$

VALOR DE Π_B: $\max(E-S(T),0)+S(T) = \max(S(T),E)$

COMO EM $t=T$, Π_A E Π_B TÊM O MESMO VALOR, ELES DEVEM TER O MESMO VALOR EM $t=0$.

$$\Rightarrow C + Ee^{-rT} = P + S \quad \text{(PARIDADE PUT-CALL)}$$

(AQUI C, P E S DENOTAM VALORES EM $t=0$)

OBSERVAÇÕES:

i) A PARIDADE PUT-CALL INDEPENDE DE QUALQUER MODELO PARA O VALOR DO ATIVO.

ii) O FATO DE QUE DOIS PORTFÓLIOS, TENDO O MESMO VALOR NUM CERTO INSTANTE, DEVEM TER O MESMO VALOR SEMPRE, DECORRE DO PRINCÍPIO DA NÃO-ARBITRAGEM.

- POR EXEMPLO, SE $\Pi_A > \Pi_B$ EM $t=0$, PODE-SE VENDER Π_A (VENDER A CALL E TOMAR O DINHEIRO EMPRESTADO) E COMPRAR Π_B (COMPRAR UMA PUT E UMA UNIDADE DO ATIVO).

  ASSIM SE OBTÉM O GANHO INSTANTÂNEO $\Pi_A - \Pi_B$, EM $t=0$, JÁ QUE SE SABE QUE, EM $t=T$, Π_B DARÁ O MESMO RETORNO QUE Π_A.

- LIMITES PARA O VALOR DA OPÇÃO:

CONSIDEREMOS OS PORTFÓLIOS

Π_A: UMA CALL MAIS Ee^{-rT} EM DINHEIRO

$\hat{\Pi}_B$: UMA UNIDADE DO ATIVO

NO VENCIMENTO:

VALOR DE Π_A: $\max(S(T), E)$

VALOR DE $\hat{\Pi}_B$: $S(T) \leq$ VALOR DE Π_A

$\Rightarrow$ PELO PRINCÍPIO DA NÃO-ARBITRAGEM, $\hat{\Pi}_B$ DEVE TER VALOR NÃO SUPERIOR AO DE Π_A, EM $t=0$.

ASSIM, $S \leq C + Ee^{-rT}$

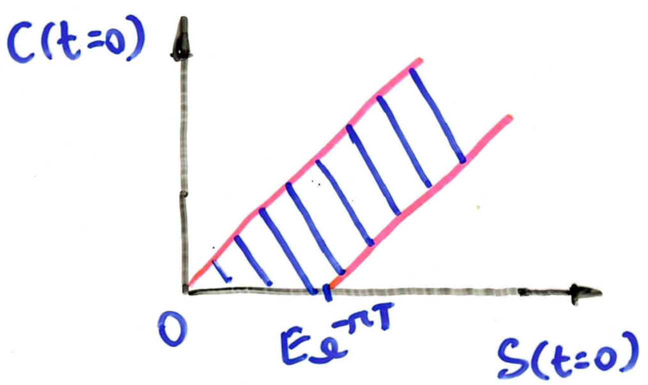
$\therefore C \geq S - Ee^{-rT}$

E COMO A OPÇÃO NÃO PODE ASSUMIR VALORES NEGATIVOS,

$C \geq \max(S - Ee^{-rT}, 0)$ (LIMITE INFERIOR PARA C)

- POR OUTRO LADO, EM $t=0$ O VALOR DA OPÇÃO NÃO PODE SER MAIOR QUE O VALOR DO ATIVO, PORQUE $S - Ee^{-rT} \leq S$.

ASSIM, $C \leq S$ (LIMITE SUPERIOR PARA C)



$\max(S - Ee^{-rT}, 0) \leq C \leq S$

USANDO A PARIDADE PUT-CALL:

$$C + Ee^{-rT} = P + S$$

NÓS OBTEMOS

$$\max(Ee^{-rT} - S, 0) \leq P \leq Ee^{-rT}$$

- OBSERVAÇÃO:

É POSSÍVEL MOSTRAR QUE O VALOR DE UMA CALL EM $t=0$ É UMA FUNÇÃO NÃO-DECRESCENTE DA DATA DE VENCIMENTO T.

MAS NÃO EXISTE UM RESULTADO EQUIVALENTE PARA A PUT.