2. REVISÃO DE PROBABILIDADE

- VARIÁVEIS ALEATÓRIAS, PROBABILIDADES E MÉDIA:

EXPERIMENTO ALEATÓRIO:

e.g., LANÇAMENTO DE UM DADO HONESTO

$\Rightarrow$ CADA UM DOS RESULTADOS NO CONJUNTO

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

É EQUIPROVÁVEL

i.e., CADA POSSÍVEL RESULTADO TEM PROBABILIDADE 1/6, DE OCORRER

GENERALIZANDO: VARIÁVEL ALEATÓRIA DISCRETA, X, ASSUMINDO POSSÍVEIS VALORES NO CONJUNTO

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$$

CADA POSSÍVEL RESULTADO x_i OCORRENDO COM PROBABILIDADE p_i,

$$P_R[X = x_i] = p_i$$

COM $0 \leq p_i \leq 1$ E $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$

A MÉDIA OU VALOR ESPERADO DA V.A. DISCRETA X É DADA POR

$$E[X] = \sum_{i=1}^{m} x_i p_i$$

Variável Aleatória Contínua:

$\Rightarrow$ X assume possíveis valores num subconjunto dos reais

$\Rightarrow$ Existe uma função densidade de probabilidade

$$f(x) \geq 0, \quad \forall x$$

tal que a probabilidade de X assumir valores no intervalo $[a,b]$ é dada por

$$P_r[a \leq X \leq b] = \int_a^b f(x)\,dx$$

com

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

Dada a função densidade $f(x)$, a função distribuição da variável aleatória é definida como

$$F(x) = P_r[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f(s)\,ds$$

A média ou valor esperado da v.a. contínua X é dada por

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$$

(desde que a integral exista)

EXEMPLOS:

i) Variável Aleatória de Bernoulli:

$$X = \begin{cases} 1, & \text{com probabilidade } p \\ 0, & \text{com probabilidade } 1-p \end{cases}$$

Valor esperado:

$$E[X] = 1 \times p + 0 \times (1-p) = p$$

ii) Variável Aleatória Uniforme sobre $[\alpha, \beta]$: $X \sim U(\alpha, \beta)$

Função densidade:

$$f(x) = \begin{cases} (\beta-\alpha)^{-1}, & \text{se } \alpha < x < \beta \\ 0, & \text{se não} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Dados dois valores, x_1 e x_2, com $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$, a probabilidade de X assumir valores em $[x_1, x_2]$ é dada pelo tamanho relativo deste intervalo:

$$\frac{x_2 - x_1}{\beta - \alpha}$$

Valor esperado:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{1}{\beta-\alpha} \int_{\alpha}^{\beta} x\, dx = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

OBSERVAÇÕES:

i) SE X É UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA, QUALQUER FUNÇÃO DE X SERÁ TAMBÉM UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA.

ii) SE X E Y SÃO VARIÁVEIS ALEATÓRIAS, QUALQUER COMBINAÇÃO DAS DUAS SERÁ TAMBÉM UMA V.A.

AS SEGUINTES RELAÇÕES VALEM:

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y]$$

$$E[\alpha X] = \alpha E[X], \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$E[h(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x)\, dx$$

, ONDE $h(x)$ É QUALQUER FUNÇÃO REAL.

iii) INDEPENDÊNCIA:

SE AS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS X E Y SÃO INDEPENDENTES, ENTÃO

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

E TAMBÉM

$$E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]\,E[h(Y)]$$

ONDE $g(x)$ E $h(y)$ SÃO FUNÇÕES REAIS.

- SEQUÊNCIAS DE VARIÁVEIS INDEPENDENTES E IDENTICAMENTE DISTRIBUÍDAS:

AS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS $X_1, X_2, \dots, X_n$ SÃO i.i.d., SE

i) NO CASO DISCRETO, TODAS AS X_i TÊM O MESMO ESPAÇO AMOSTRAL

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

E O MESMO CONJUNTO DE PROBABILIDADES

$$\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$$

NO CASO CONTÍNUO, TODAS AS X_i TÊM A MESMA FUNÇÃO DENSIDADE.

ii) CONHECER OS VALORES DE QUALQUER SUBCONJUNTO DAS X_i NÃO NOS INFORMA NADA SOBRE OS VALORES DAS DEMAIS.

$\Rightarrow$ SE O CONJUNTO $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ É i.i.d., AS SUAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS, TOMADAS DUAS A DUAS, SÃO INDEPENDENTES:

$$E[X_i X_j] = E[X_i]E[X_j], \quad \forall i \neq j$$

- VARIÂNCIA:

ENQUANTO A MÉDIA INFORMA O 'VALOR TÍPICO' OU 'ESPERADO' DA VARIÁVEL ALEATÓRIA, A VARIÂNCIA INFORMA A AMPLITUDE DA SUA DISPERSÃO EM TORNO DA MÉDIA

$$VAR[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E^2[X]$$

COMO A VARIÂNCIA É UMA MEDIDA QUADRÁTICA,

$$VAR[\alpha X] = \alpha^2 VAR[X]$$

EXEMPLOS:

i) PARA A V.A. DE BERNOULLI:

$$VAR[X] = E[(X - E[X])^2] = (1-p)^2 p + (0-p)^2 (1-p)$$
$$= p - p^2$$

$\Rightarrow$ DESVIO PADRÃO:

$$STD(X) = \sqrt{VAR[X]} = \sqrt{p - p^2}$$

ii) PARA A V.A. UNIFORME, $X \sim U(\alpha, \beta)$:

$$E[X^2] = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} x^2 dx = \frac{1}{3(\beta - \alpha)} [\beta^3 - \alpha^3] =$$

$$= \frac{1}{3(\beta - \alpha)} [(\beta - \alpha)(\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2)] = (\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2)/3$$

$$\therefore \; VAR[X] = E[X^2] - E^2[X] = \frac{\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2}{3} - \frac{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}{4} =$$

$$= \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}$$

$\Rightarrow$ DESVIO PADRÃO:

$$STD(X) = \sqrt{VAR[X]} = \frac{\beta - \alpha}{2\sqrt{3}}$$

- VARIÁVEL ALEATÓRIA NORMAL:

V.A. NORMAL PADRÃO: $X \sim N(0,1)$

$\Rightarrow$ FUNÇÃO DENSIDADE:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\therefore E[X] = 0, \quad Var[X] = 1$$

$\Rightarrow$ FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO:

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{s^2}{2}} ds$$

V.A. NORMAL GERAL: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\Rightarrow$ FUNÇÃO DENSIDADE:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\therefore E[X] = \mu, \quad Var[X] = \sigma^2$$

PROPRIEDADES DA V.A. NORMAL:

i) SE $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, ENTÃO $\frac{(X-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$

ii) SE $Y \sim N(0,1)$, ENTÃO $\sigma Y + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$

iii) SE $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ E X_1 E X_2 SÃO INDEPENDENTES,

ENTÃO $X_1 + X_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$

– O TEOREMA DO LIMITE CENTRAL:

⇒ A SOMA DE UM NÚMERO GRANDE DE VARIÁVEIS ALEATÓRIAS i.i.d. QUAISQUER É APROXIMADAMENTE UMA V.A. NORMAL.

SEJA $X_1, X_2, X_3, \dots$, UMA SEQUÊNCIA DE VARIÁVEIS i.i.d. COM MÉDIA μ E VARIÂNCIA σ^2.

SEJA $$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

⇒ PELO TEOREMA DO LIMITE CENTRAL, SE n É GRANDE, S_n SE COMPORTA COMO UMA VARIÁVEL $N(n\mu, n\sigma^2)$

OU SEJA,

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \text{ É APROXIMADAMENTE } N(0,1)$$

NO SENTIDO DE QUE

$$P_r\left[\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\right] \xrightarrow{n\to\infty} N(x)$$

(i.e., CONVERGÊNCIA EM DISTRIBUIÇÃO)

IMPORTÂNCIA DO TEOREMA:

MUITOS SISTEMAS REAIS ESTÃO SUBMETIDOS A UMA GAMA DE INFLUÊNCIAS EXTERNAS QUE PODEM SER APROXIMADAS POR VARIÁVEIS ALEATÓRIAS i.i.d.

O EFEITO RESULTANTE DESSAS INFLUÊNCIAS PODE PORTANTO SER MODELADO POR UMA ÚNICA V.A. NORMAL COM VALORES APROPRIADOS DE MÉDIA E VARIÂNCIA.

⇒ RESULTA DAÍ A IMPORTÂNCIA DA V.A. NORMAL EM CAMPOS TÃO VARIADOS DE APLICAÇÃO