5. PRECIFICAÇÃO DE ATIVOS

$\Rightarrow$ DADO O PREÇO DO ATIVO EM $t=0$, S_0, QUEREMOS OBTER UM MODELO QUE DESCREVA O PREÇO EM QUALQUER INSTANTE, $S(t)$, $0 \leq t \leq T$

$\Rightarrow$ $\{S(t), 0 \leq t \leq T\}$ É UM PROCESSO ESTOCÁSTICO, i.e., UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA PARA CADA t.

- MODELO DE TEMPO DISCRETO:

VARIAÇÃO NO PREÇO DE UM INVESTIMENTO SEM RISCO:

$$D(t+\delta t) = D(t) + r\,\delta t\, D(t)$$

ONDE r É A TAXA DE JUROS

NO CASO DE UM ATIVO COM RISCO, DEVEMOS ACRESCENTAR UM ELEMENTO ALEATÓRIO À EQUAÇÃO, PARA MODELAR A INCERTEZA.

$\Rightarrow$ 'FLUTUAÇÃO' ALEATÓRIA INDEPENDENTE PARA CADA INSTANTE.

CONSIDERANDO TEMPOS DISCRETOS:

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) + \mu\,\delta t\, S(t_i) + \sigma \sqrt{\delta t}\, Y_i\, S(t_i) \quad (1)$$

ONDE

$t_i = i\,\delta t$

$\mu \equiv$ 'DRIFT' OU TENDÊNCIA: PARÂMETRO CONSTANTE, CUJO PAPEL É SEMELHANTE AO DA TAXA DE JUROS

$\sigma \equiv$ VOLATILIDADE: PARÂMETRO NÃO-NEGATIVO QUE DETERMINA A FORÇA DAS FLUTUAÇÕES ALEATÓRIAS

$Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ SÃO VARIÁVEIS i.i.d. NORMAIS $N(0,1)$

OBSERVAÇÕES:

i) COMO A VARIÁVEL $N(0,1)$ É SIMÉTRICA EM TORNO DE ZERO, O FATOR DE FLUTUAÇÃO, $\sigma\sqrt{\delta t}\,Y_i$, TEM IGUAL PROBABILIDADE DE SER POSITIVO OU NEGATIVO.

ii) O FATOR $\sqrt{\delta t}$ É NECESSÁRIO PARA QUE A TRANSIÇÃO AO MODELO DE TEMPO CONTÍNUO SEJA PLAUSÍVEL.

iii) O MESMO MODELO CONTÍNUO RESULTA QUANDO EM VEZ DE VARIÁVEIS NORMAIS ESCOLHEMOS OS Y_i COMO i.i.d. DE MÉDIA ZERO E VARIÂNCIA UNITÁRIA.

iv) O MODELO ESTATÍSTICO NÃO MUDA SE σ É SUBSTITUÍDO POR $-\sigma$. VALORES TÍPICOS DA VOLATILIDADE ESTÃO ENTRE 0,05 E 0,5. VALORES TÍPICOS DO DRIFT ESTÃO ENTRE 0,01 E 0.1

v) A PARTIR DE (1) OBTEMOS QUE OS RETORNOS

$$\frac{S(t_{i+1}) - S(t_i)}{S(t_i)}$$

FORMAM UMA SEQUÊNCIA i.i.d. NORMAL.

- MODELO DE TEMPO CONTÍNUO:

$\Rightarrow$ DIVIDIMOS O INTERVALO $[0,t]$ EM L SUBINTERVALOS $i\delta t$, PARA $i = 1, 2, \ldots, L$, COM $L\delta t = t$.

PELA EQUAÇÃO (1):

$$S(t_{i+1}) = S(t_i)\left[1 + \mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}\,Y_i\right]$$

$$\therefore \quad S(t) = S_0 \prod_{i=0}^{L-1}\left[1 + \mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}\,Y_i\right], \quad S_0 = S(t=0)$$

ASSIM,

$$\log\left[\frac{S(t)}{S_0}\right] = \sum_{i=0}^{L-1} \log\left(1 + \mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}\,Y_i\right) \quad (2)$$

QUEREMOS OBTER O COMPORTAMENTO DE (2) NO LIMITE DE TEMPO CONTÍNUO, i.e., PARA $\delta t \to 0$.

PARA ε PEQUENO, TEMOS

$$\log(1+\varepsilon) \simeq \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2}$$

$$\therefore \log(1+\mu\delta t+\sigma\sqrt{\delta t}\,Y_i) \simeq \mu\delta t+\sigma\sqrt{\delta t}\,Y_i - \frac{1}{2}\left[\mu^2\delta t^2+\sigma^2\delta t\,Y_i^2+2\sigma\mu\,\delta t^{3/2}\,Y_i\right]$$

$\Rightarrow$ DESPREZANDO AS POTÊNCIAS DE δt IGUAIS OU SUPERIORES A $3/2$:

$$\log(1+\mu\delta t+\sigma\sqrt{\delta t}\,Y_i) \simeq \mu\delta t+\sigma\sqrt{\delta t}\,Y_i-\frac{1}{2}\sigma^2\delta t\,Y_i^2$$

PORTANTO,

$$\log\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) \simeq \sum_{i=0}^{L-1}\left(\mu\delta t+\sigma\sqrt{\delta t}\,Y_i-\frac{1}{2}\sigma^2\delta t\,Y_i^2\right)$$

$\Rightarrow$ COMO CADA Y_i É UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA, CADA PARCELA DO SOMATÓRIO TAMBÉM O SERÁ.

É FÁCIL MOSTRAR QUE

$$\begin{cases} E\left[\mu\delta t+\sigma\sqrt{\delta t}\,Y_i-\frac{1}{2}\sigma^2\delta t\,Y_i^2\right] = \mu\delta t-\frac{1}{2}\sigma^2\delta t \\ \mathrm{VAR}\left[\mu\delta t+\sigma\sqrt{\delta t}\,Y_i-\frac{1}{2}\sigma^2\delta t\,Y_i^2\right] = \sigma^2\delta t \quad \text{(ATÉ 1ª ORDEM EM } \delta t\text{)} \end{cases}$$

ASSIM, PELO TEOREMA DO LIMITE CENTRAL:

$\log\left(\frac{S(t)}{S_0}\right)$ TENDERÁ A UMA V.A. NORMAL COM

$$\begin{cases} \text{MÉDIA: } L\left(\mu\delta t-\frac{1}{2}\sigma^2\delta t\right) = \left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t \\ \text{VARIÂNCIA: } L\sigma^2\delta t = \sigma^2 t \end{cases}$$

PORTANTO,

$$\log\left(\frac{S(t)}{S_0}\right) \sim N\left((\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t, \sigma^2 t\right)$$

$$\sim \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\sqrt{t}\,N(0,1)$$

$$\therefore \quad \underline{S(t) = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}\,Z}}$$

ONDE $\underline{Z \sim N(0,1)}$

GENERALIZANDO,

$$\log\left(\frac{S(t_{i+1})}{S(t_i)}\right) \sim N\left((\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)(t_{i+1} - t_i), \sigma^2(t_{i+1} - t_i)\right)$$

$\Rightarrow$ A EVOLUÇÃO DO PREÇO DO ATIVO AO LONGO DE QUALQUER SEQUÊNCIA DE INSTANTES

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_M$$

É DADA POR

$$S(t_{i+1}) = S(t_i)\, e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i}\, Z_i}$$

ONDE $\{Z_i\} \equiv$ SEQUÊNCIA i.i.d. $N(0,1)$

OBSERVAÇÃO:

O <u>LOGARITMO</u> DA V.A. $S(t)$ É <u>NORMALMENTE DISTRIBUÍDO</u>

$\Rightarrow S(t)$ É UMA <u>VARIÁVEL LOGNORMAL</u>

A SUA DENSIDADE É

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi t}} \exp\left\{ \frac{-\left[\log\left(\frac{x}{S_0}\right) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t\right]^2}{2\sigma^2 t} \right\}, \quad x > 0$$

MOSTRA-SE QUE

$$E[S(t)] = S_0 e^{\mu t}$$

$$VAR[S(t)] = S_0^2 e^{2\mu t}\left(e^{\sigma^2 t} - 1\right)$$

MODELO DE PRECIFICAÇÃO DE ATIVOS:

$$S(t_{i+1}) = S(t_i)\, e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_{i+1}-t_i) + \sigma\sqrt{t_{i+1}-t_i}\, z_i}$$

com $z_i \sim N(0,1)$ i.i.d.

$\Rightarrow$ PARA SIMULAR A EVOLUÇÃO DO PREÇO DE UM ATIVO NO INTERVALO $[0,T]$, AO LONGO DE UMA SÉRIE DE INSTANTES

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_K = T \;, \quad t_i = i\delta t$$

GERAMOS A SEQUÊNCIA $\{S_i\}_{i=0}^{K}$, COMO

$$S_{i+1} = S_i\, e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_{i+1}-t_i) + \sigma\sqrt{t_{i+1}-t_i}\, \xi_i}$$

ONDE CADA ξ_i É OBTIDA COMO AMOSTRA DE UM GERADOR DE NÚMEROS PSEUDOALEATÓRIOS $N(0,1)$

- PROPRIEDADES DAS TRAJETÓRIAS GERADAS:

i) QUANDO $\delta t \to 0$ A TRAJETÓRIA TORNA-SE CONTÍNUA, MAS NÃO POSSUI TANGENTE DEFINIDA (DERIVADA) EM NENHUM PONTO

ii) QUANTO MAIOR A VOLATILIDADE σ, MAIS IRREGULAR É A TRAJETÓRIA.

iii) EMBORA AS TRAJETÓRIAS SEJAM IRREGULARES (QUEBRADAS), A SUA MÉDIA, $E[S(t)] = S_0\, e^{\mu t}$, É SUAVE.

iv) A ESTIMATIVA DA FUNÇÃO DENSIDADE, A PARTIR DE UMA SÉRIE DE TRAJETÓRIAS, TEM CARÁTER LOGNORMAL.

v) AS TRAJETÓRIAS SÃO AUTOSSIMILARES, i.e., OBSERVADAS EM DIFERENTES ESCALAS TEMPORAIS, ELAS EXIBEM CARACTERÍSTICAS SEMELHANTES.

– JUSTIFICATIVA PARA A AUTOSSIMILARIDADE:

CONSIDEREMOS DOIS INTERVALOS TEMPORAIS:

i) UM INTERVALO PEQUENO, δt

ii) UM INTERVALO MUITO PEQUENO, $\hat{\delta t} = \delta t / L$, ONDE L É UM INTEIRO GRANDE.

USANDO A EQUAÇÃO (1) COM $t_i = 0$ E $t_{i+1} = \hat{\delta t}$, NÓS OBTEMOS

$$S(\hat{\delta t}) - S_0 = S_0(\mu \hat{\delta t} + \sigma \sqrt{\hat{\delta t}}\, Y_0)$$

$$\sim S_0 N(\mu \hat{\delta t}, \sigma^2 \hat{\delta t}) \qquad (2)$$

DA MESMA FORMA, PARA $t_i = i\hat{\delta t}$ E $t_{i+1} = (i+1)\hat{\delta t}$:

$$S((i+1)\hat{\delta t}) - S(i\hat{\delta t}) = S(i\hat{\delta t})(\mu \hat{\delta t} + \sigma \sqrt{\hat{\delta t}}\, Y_i)$$

A PARTIR DAÍ RESULTA

$$S(\delta t) - S_0 = \sum_{i=0}^{L-1} S(i\hat{\delta t})(\mu \hat{\delta t} + \sigma \sqrt{\hat{\delta t}}\, Y_i)$$

$$\simeq S_0 \sum_{i=0}^{L-1} (\mu \hat{\delta t} + \sigma \sqrt{\hat{\delta t}}\, Y_i)$$

E USANDO O TEOREMA DO LIMITE CENTRAL:

$$S(\delta t) - S_0 \sim S_0 N(\mu L \hat{\delta t}, \sigma^2 L \hat{\delta t}) = S_0 N(\mu \delta t, \sigma^2 \delta t) \quad (3)$$

$\Rightarrow$ NO LIMITE CONTÍNUO ($\hat{\delta t}, \delta t \to 0$) AS RELAÇÕES (2) E (3) SÃO EQUIVALENTES

OBS.: APROXIMAR TODOS OS $S(i\hat{\delta t})$ POR S_0 SE JUSTIFICA, POIS

$$S(i\hat{\delta t}) = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) i\hat{\delta t} + \sigma \sqrt{i\hat{\delta t}}\, z}, \quad z \sim N(0,1)$$

$$\simeq S_0(1 + \sigma \sqrt{i\hat{\delta t}}\, z) \leq S_0(1 + \sigma \sqrt{\delta t}\, z) = S_0 + O(\sqrt{\delta t})$$

$\Rightarrow$ O ERRO INCORRIDO AO SUBSTITUIR $S(i\hat{\delta t})$ POR S_0 É DA ORDEM DE $\sqrt{\delta t}$.

- SOMA DOS QUADRADOS DOS RETORNOS:

DA EQUAÇÃO (1), NÓS OBTEMOS, PARA O RETORNO DO ATIVO

$$\frac{S(t_{i+1}) - S(t_i)}{S(t_i)} = \mu\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}\, Y_i \sim N(\mu\delta t, \sigma^2\delta t)$$

⇒ O RETORNO É UMA VARIÁVEL ALEATÓRIA NORMAL, $N(\mu\delta t, \sigma^2\delta t)$.

VAMOS CONSIDERAR AGORA O QUADRADO DO RETORNO.

⇒ MOSTRA-SE QUE O SEU VALOR ESPERADO E SUA VARIÂNCIA SÃO DADOS POR

$$E\left[\left(\frac{S(t_{i+1}) - S(t_i)}{S(t_i)}\right)^2\right] = \sigma^2\delta t + \text{POTÊNCIAS MAIS ALTAS DE } \delta t$$

$$\mathrm{Var}\left[\left(\frac{S(t_{i+1}) - S(t_i)}{S(t_i)}\right)^2\right] = 2\sigma^4\delta t^2 + \text{POTÊNCIAS MAIS ALTAS DE } \delta t$$

PORTANTO, PELO TEOREMA DO LIMITE CENTRAL,

$$\sum_{i=0}^{L-1}\left(\frac{S(t_{i+1}) - S(t_i)}{S(t_i)}\right)^2 \sim N(L\sigma^2\delta t, 2L\sigma^4\delta t^2) = N(\sigma^2 t, 2\sigma^4 t\delta t)$$

⇒ A VARIÂNCIA DA SOMA DOS RETORNOS QUADRADOS É PROPORCIONAL A δt, E PORTANTO ESSENCIALMENTE NULA.

⇒ EMBORA OS RETORNOS INDIVIDUAIS SEJAM IMPREVISÍVEIS, A SOMA DOS SEUS QUADRADOS É APROXIMADAMENTE CONSTANTE E IGUAL A $\sigma^2 t$.