6. BLACK-SCHOLES

QUEREMOS UMA FUNÇÃO $V(S,t)$ QUE NOS INFORME O VALOR DA OPÇÃO PARA QUALQUER PREÇO DO ATIVO, $S \geq 0$, EM QUALQUER INSTANTE $0 \leq t \leq T$.

$\Rightarrow$ $V(S_0, 0)$ SERÁ O PREÇO DA OPÇÃO NO SEU LANÇAMENTO, $t=0$.

ASSUMIMOS QUE $V(S,t)$ EXISTA E SEJA DIFERENCIÁVEL COM RELAÇÃO A S E A t, EMBORA $S(t)$ NÃO SEJA UMA FUNÇÃO DIFERENCIÁVEL.

$\Rightarrow$ A FUNÇÃO $V(S,t)$ VAI SATISFAZER A EDP DE BLACK-SCHOLES

- SOMA DOS INCREMENTOS QUADRADOS DO PREÇO DO ATIVO:

CONSIDERAMOS DUAS ESCALAS TEMPORAIS:

- UMA ESCALA PEQUENA, DEFINIDA POR Δt.
- UMA ESCALA MUITO PEQUENA, DEFINIDA POR $\delta t = \frac{\Delta t}{L}$, ONDE L É UM INTEIRO GRANDE.

ASSUMIMOS UM INSTANTE QUALQUER, $t \in [0,T]$, E UM PREÇO QUALQUER PARA O ATIVO, $S(t) \geq 0$.

DADO UM INTERVALO $[t, t+\Delta t]$, VAMOS QUEBRÁ-LO EM SUBINTERVALOS MENORES, IGUALMENTE ESPAÇADOS, DE COMPRIMENTO δt:

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], \ldots, [t_{L-1}, t_L]$$

COM $t_0 = t$, $t_L = t + \Delta t$

$$t_i = t + i\delta t$$

SEJA

$$\delta S_i = S(t_{i+1}) - S(t_i)$$

A VARIAÇÃO DO PREÇO DO ATIVO EM UM SUBINTERVALO δt.

$\Rightarrow$ VAMOS MOSTRAR QUE A SOMA DOS INCREMENTOS QUADRADOS

$$\sum_{i=0}^{L-1} \delta S_i^2$$

É APROXIMADAMENTE PROPORCIONAL A $S^2(t)$, COM FATOR DE PROPORCIONALIDADE CONSTANTE.

DEMONSTRAÇÃO:

SEGUNDO O MODELO DISCRETO PARA O PREÇO DO ATIVO:

$$\delta S_i = S(t_i)\left(\mu \delta t + \sigma \sqrt{\delta t}\, Y_i\right)$$

COM $Y_i \sim N(0,1)$ i.i.d.

PORTANTO,

$$\sum_{i=0}^{L-1} \delta S_i^2 = \sum_{i=0}^{L-1} S^2(t_i)\left(\mu^2 \delta t^2 + 2\mu\sigma \delta t^{3/2} Y_i + \sigma^2 \delta t Y_i^2\right)$$

$$\simeq S^2(t) \sum_{i=0}^{L-1} \left(\mu^2 \delta t^2 + 2\mu\sigma \delta t^{3/2} Y_i + \sigma^2 \delta t Y_i^2\right)$$

O VALOR ESPERADO E A VARIÂNCIA DE CADA PARCELA NO SOMATÓRIO SÃO DADOS POR:

$$E[\cdot] = \mu^2 \delta t^2 + 2\mu\sigma \delta t^{3/2} E[Y_i] + \sigma^2 \delta t E[Y_i^2] \simeq \sigma^2 \delta t$$

$$\mathrm{Var}[\cdot] = (2\mu\sigma \delta t^{3/2})^2 \mathrm{Var}[Y_i] + (\sigma^2 \delta t)^2 \mathrm{Var}[Y_i^2]$$

$$\simeq 2\sigma^4 \delta t^2$$

$\Rightarrow$ PELO TEOREMA DO LIMITE CENTRAL:

$$\sum_{i=0}^{L-1} \delta S_i^2 \sim S^2(t) N(\sigma^2 L\delta t, 2\sigma^4 L \delta t^2) = S^2(t) N(\sigma^2 \Delta t, 2\sigma^4 \Delta t \delta t)$$

E COMO δt É DIMINUTO, A VARIÂNCIA ACIMA PODE SER DESPREZADA,

$$\sum_{i=0}^{L-1} \delta S_i^2 \simeq S^2(t) \sigma^2 \Delta t$$

- HEDGING:

PORTFÓLIO EQUIVALENTE:

$\Rightarrow$ VAMOS MONTAR UM PORTFÓLIO COMPOSTO POR DINHEIRO E PELO ATIVO ASSOCIADO À OPÇÃO, E QUE TENHA O MESMO RISCO QUE ESTA EM CADA INSTANTE.

SEJA $D \equiv D(S,t)$ O VALOR EM DINHEIRO (DEPÓSITO EM BANCO)

$A \equiv A(S,t)$ O NÚMERO DE UNIDADES DO ATIVO

$\Rightarrow$ VALOR DO PORTFÓLIO EM CADA INSTANTE:

$$\tilde{\Pi}(S,t) = A(S,t) S + D(S,t)$$

$\Rightarrow$ PRECISAMOS DETERMINAR $A(S,t)$ E $D(S,t)$, DE MODO QUE O PORTFÓLIO TENHA O MESMO RISCO QUE A OPÇÃO.

NOTAÇÃO: VALORES COMPUTADOS NO TEMPO DISCRETO t_i TERÃO O SUBSCRITO i: $V_i = V(S_i, t_i)$, $\tilde{\Pi}_i = \tilde{\Pi}(S_i, t_i)$, $S_i = S(t_i)$

VALORES COMPUTADOS NO TEMPO CONTÍNUO t NÃO TERÃO SUBSCRITO:

$$V = V(S,t),\ \tilde{\Pi} = \tilde{\Pi}(S,t),\ S = S(t)$$

O SÍMBOLO δ DENOTA DIFERENÇAS NUM INTERVALO δt:

$$\delta S_i = S(t_{i+1}) - S(t_i),\ \delta V_i = V(S_{i+1}, t_{i+1}) - V(S_i, t_i)$$

* VAMOS ASSUMIR QUE O NÚMERO DE UNIDADES DO ATIVO NÃO VARIA NUM INTERVALO DE DURAÇÃO δt

⇒ A VARIAÇÃO DO VALOR DO PORTFÓLIO NESTE PERÍODO RESULTA APENAS

i) DA FLUTUAÇÃO DO PREÇO DO ATIVO:

⇒ VARIAÇÃO δS_i ALTERA O VALOR DO PORTFÓLIO EM $A_i \delta S_i$

ii) DO RENDIMENTO DO DEPÓSITO EM DINHEIRO:

⇒ NO INTERVALO δt O RENDIMENTO $r D_i \delta t$ É ADICIONADO AO PORTFÓLIO

PORTANTO,

$$\delta \Pi_i = A_i \delta S_i + r D_i \delta t \qquad (1)$$

* POR OUTRO LADO, NO INTERVALO δt A VARIAÇÃO NO VALOR DA OPÇÃO PODE SER EXPRESSA COMO

$$\delta V_i \simeq \frac{\partial V_i}{\partial t} \delta t + \frac{\partial V_i}{\partial S} \delta S_i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_i}{\partial S^2} \delta S_i^2 \qquad (2)$$

ONDE EMPREGAMOS UMA SÉRIE DE TAYLOR DE 1ª ORDEM EM δt, E DE ORDEM DOIS EM δS_i, PORQUE δS_i^2 É PROPORCIONAL A δt.

PORTANTO, SUBTRAINDO (2) DE (1):

$$\delta V_i - \delta \Pi_i \equiv \delta (V - \Pi)_i \simeq \left(\frac{\partial V_i}{\partial t} - r D_i \right) \delta t + \left(\frac{\partial V_i}{\partial S} - A_i \right) \delta S_i +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_i}{\partial S^2} \delta S_i^2$$

* PARA OBTER A VARIAÇÃO DO PORTFÓLIO $(V-\Pi)$ ENTRE t E $t+\Delta t$, NÓS SOMAMOS OS $\delta(V-\Pi)_i$, DE $i=0$ A $i=L-1$:

$$\Delta(V-\Pi)=\sum_{i=0}^{L-1}\delta(V-\Pi)_i \simeq \sum_{i=0}^{L-1}\left\{\left(\frac{\partial V_i}{\partial t}-rD_i\right)\delta t+\left(\frac{\partial V_i}{\partial S}-A_i\right)\delta S_i + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_i}{\partial S^2}\delta S_i^2\right\}$$

DESPREZANDO A VARIAÇÃO DE $\frac{\partial V_i}{\partial t}$, $\frac{\partial V_i}{\partial S}$, A_i E D_i ENTRE t E $t+\Delta t$:

$$\Delta(V-\Pi)\simeq\left(\frac{\partial V}{\partial t}-rD\right)\Delta t+\left(\frac{\partial V}{\partial S}-A\right)\sum_i \delta S_i+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sum_i \delta S_i^2$$

$$\simeq\left(\frac{\partial V}{\partial t}-rD\right)\Delta t+\left(\frac{\partial V}{\partial S}-A\right)\sum_i \delta S_i+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\Delta t$$

ONDE USAMOS

$$\sum_{i=0}^{L-1}\delta S_i^2 \simeq S^2\sigma^2\Delta t$$

* PARA ELIMINAR O TERMO ALEATÓRIO RESTANTE NA EQUAÇÃO, $\sum_i \delta S_i$, NÓS ESCOLHEMOS O NÚMERO DE ATIVOS NO PORTFÓLIO Π, COMO

$$A=\frac{\partial V}{\partial S} \qquad (3)$$

E ASSIM,

$$\Delta(V-\Pi)=\left(\frac{\partial V}{\partial t}-rD+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\Delta t$$

* A IDEIA DE CONTINUAMENTE ATUALIZAR UM PORTFÓLIO VISANDO REDUZIR OU ELIMINAR O RISCO É CONHECIDA COMO HEDGING.

⇒ COMO NÓS OBTIVEMOS UM PORTFÓLIO $(V-\Pi)$ CUJA VARIAÇÃO DE VALOR É TORNADA NÃO-ALEATÓRIA, E PORTANTO SEM RISCO, PELA ESTRATÉGIA DE HEDGING DA EQUAÇÃO (3), ELE DEVE CORRESPONDER A UM DEPÓSITO A JUROS NUM BANCO (PRINCÍPIO DA NÃO-ARBITRAGEM).

PORTANTO,

$$\Delta(V-\Pi) = r\Delta t (V-\Pi)$$

$$\therefore \left(\frac{\partial V}{\partial t} - rD + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\cancel{\Delta t} = r\cancel{\Delta t}(V - AS - D)$$

E USANDO A EQ. (3):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$ (EDP DE BLACK-SCHOLES)

OBSERVAÇÕES:

i) O PARÂMETRO DE DRIFT, OU TENDÊNCIA, NÃO APARECE NA EDP.

ii) PARA OBTER UMA SOLUÇÃO PARA A EDP, PRECISAMOS ESPECIFICAR CONDIÇÕES INICIAIS OU FINAIS, E CONDIÇÕES DE CONTORNO.

e.g., PARA UMA CALL EUROPEIA: $V(S,t) \equiv C(S,t)$

- CONDIÇÃO FINAL: $C(S,T) = \max(S(T) - E, 0)$
- CONDIÇÕES DE CONTORNO:

$C(0,t) = 0, \; \forall \, 0 \leq t \leq T$

$C(S,t) \simeq S$, SE S É GRANDE

i.e., SE O PREÇO DO ATIVO SE ANULA, ELE PERMANECE NULO ATÉ O VENCIMENTO, E TAMBÉM O VALOR DA OPÇÃO; SE O PREÇO É MUITO ALTO, ELE TENDE A SE MANTER ALTO.

– Fórmulas de Black-Scholes:

Impondo as condições de contorno e final, obtemos uma solução única para o preço da opção.

e.g., para a call europeia:

$$C(S,t) = S N(d_1) - E e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

onde $N(\cdot)$ é a função distribuição para a variável normal $N(0,1)$

$$d_1 = \frac{\log(S/E) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\log(S/E) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

De onde se obtém $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$

Usando a expressão para a paridade put-call em um instante t qualquer:

$$C(S,t) + E e^{-r(T-t)} = P(S,t) + S$$

Obtemos a fórmula de Black-Scholes para a put europeia:

$$P(S,t) = E e^{-r(T-t)}(1 - N(d_2)) + S(N(d_1) - 1)$$

$$= E e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S N(-d_1)$$

A MESMA EXPRESSÃO RESULTA DA RESOLUÇÃO DA EDP DE BLACK-SCHOLES SOB AS CONDIÇÕES:

i) $P(S,t) = \max(E - S(T), 0)$

ii) $P(0,t) = E e^{-r(T-t)}, \quad 0 \leq t \leq T$

(SE O PREÇO DO ATIVO SE ANULA EM ALGUM MOMENTO, ELE SERÁ NULO NO VENCIMENTO. O VALOR DA OPÇÃO SERÁ E NO INSTANTE t, E, DESCONTADO PARA A INFLAÇÃO, $E e^{-r(T-t)}$ EM t)

iii) $P(S,t) \simeq 0$, SE S É GRANDE

(SE O PREÇO DO ATIVO SE TORNA MUITO ALTO EM ALGUM MOMENTO, ELE TENDE A PERMANECER ALTO, E O VALOR DA OPÇÃO TENDE A SE ANULAR)