7. HEDGING

– HEDGING DISCRETO

FÓRMULAS DE BLACK-SCHOLES:

CALL EUROPEIA: $C(S,t) = S\,N(d_1) - E e^{-r(T-t)} N(d_2)$

PUT EUROPEIA: $P(S,t) = E e^{-r(T-t)} N(-d_2) - S\,N(-d_1)$

$\Rightarrow$ AS DERIVADAS PARCIAIS $\frac{\partial C}{\partial S}$ E $\frac{\partial P}{\partial S}$ INFORMAM A QUANTIDADE DO ATIVO QUE DEVE SER MANTIDA, EM CADA CASO, NO PORTFÓLIO EQUIVALENTE.

ISTO É CONHECIDO COMO 'DELTA HEDGING'

$\Rightarrow$ UTILIZANDO AS FÓRMULAS DE BLACK-SCHOLES:

$$\frac{\partial V}{\partial S} \equiv \begin{cases} \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) & \text{(DELTA DA CALL)} \\ \frac{\partial P}{\partial S} = -N(-d_1) \equiv N(d_1) - 1 & \text{(DELTA DA PUT)} \end{cases}$$

NO CASO DISCRETO, NÓS TEMOS PARA O PORTFÓLIO EQUIVALENTE:

$$\tilde{\Pi}_i = A_i S_i + D_i$$

E

$$\delta\tilde{\Pi}_i = \tilde{\Pi}_{i+1} - \tilde{\Pi}_i = A_i\,\delta S_i + r D_i\,\delta t$$

$$\therefore\ \tilde{\Pi}_{i+1} = \tilde{\Pi}_i + A_i\,\delta S_i + r D_i\,\delta t = A_i(S_i + \delta S_i) + (1 + r\delta t) D_i$$

$$\therefore\ \tilde{\Pi}_{i+1} = A_i S_{i+1} + (1 + r\delta t) D_i$$

⇒ NO INSTANTE $t_i + \delta t \equiv (i+1)\delta t$, O VALOR DO PORTFÓLIO EQUIVALENTE É DADO POR

$$\tilde{\Pi}_{i+1} = A_i S_{i+1} + (1 + r\delta t) D_i$$

NESTE INSTANTE, A QUANTIDADE DE ATIVOS DEVE SER REBALANCEADA, DE ACORDO COM O DELTA HEDGING, PARA

$$A_{i+1} = \frac{\partial}{\partial S} V_{i+1}$$

⇒ COMO NÃO DEVE HAVER ENTRADA OU SAÍDA DE CAPITAL, O VALOR DO DEPÓSITO EM BANCO TAMBÉM DEVE SER MODIFICADO PARA D_{i+1}, DE FORMA QUE

$$A_{i+1} S_{i+1} + D_{i+1} = A_i S_{i+1} + (1 + r\delta t) D_i \equiv \tilde{\Pi}_{i+1}$$

DAÍ SE OBTÉM

$$\left.\begin{aligned} D_{i+1} &= (1 + r\delta t) D_i + (A_i - A_{i+1}) S_{i+1} \\ &\text{COM} \\ A_{i+1} &= \frac{\partial}{\partial S} V_{i+1} \end{aligned}\right\} \text{DELTA HEDGING}$$

(NOTE-SE QUE $D_{i+1} = \tilde{\Pi}_{i+1} - A_i S_{i+1}$)

PROCEDURE: DELTA HEDGING DISCRETO

SET $A_0 = \frac{\partial}{\partial S} V_0$

$D_0 = 1$ (VALOR ARBITRÁRIO)

$\tilde{\Pi}_0 = A_0 S_0 + D_0$

FOR $t = (i+1)\delta t$ (CADA NOVO INSTANTE)

OBSERVE O NOVO PREÇO DO ATIVO, S_{i+1}

COMPUTE O NOVO VALOR DO PORTFÓLIO:

$$\tilde{\Pi}_{i+1} = A_i S_{i+1} + (1 + r\delta t) D_i$$

COMPUTE A NOVA QUANTIDADE DE ATIVOS:

$$A_{i+1} = \frac{\partial}{\partial S} V_{i+1}$$

COMPUTE O NOVO VALOR DO DEPÓSITO EM CONTA:

$$D_{i+1} = \tilde{\Pi}_{i+1} - A_i S_{i+1}$$

END

OBSERVAÇÕES: i) PARA UMA SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL, O INTERVALO δt PODE SER OBTIDO COMO $\delta t = T/N$, E O VALOR DO ATIVO PODE SER COMPUTADO COMO

$$S_{i+1} = S_i e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\delta t + \sqrt{\delta t}\,\sigma \xi_i}$$

ONDE OS ξ_i SÃO OBTIDOS COMO AMOSTRAS i.i.d. DE UMA VARIÁVEL $N(0,1)$.

ii) COMO O INTERVALO δt É FINITO, ENQUANTO $\frac{\partial V}{\partial S}$ É OBTIDO DAS FÓRMULAS DE TEMPO CONTÍNUO DE B&S, SEMPRE HAVERÁ UM ERRO NESTA ESTRATÉGIA DE HEDGING.

iii) A IDEIA DO DELTA HEDGING É GARANTIR QUE O PORTFÓLIO $(V-\Pi)$ SE VALORIZE À TAXA DE JUROS LIVRE DE RISCO.

$\Rightarrow$ DEVEMOS TER

$$\Pi(S(t),t) = V(S(t),t) - [V(S_0,0) - \Pi(S_0,0)]e^{rt}$$

- JARGÃO FINANCEIRO:

NO INSTANTE t, UMA CALL EUROPEIA É DITA ESTAR

- IN THE MONEY (ITM), SE $S(t) > E$
- OUT OF THE MONEY (OTM), SE $S(t) < E$
- AT THE MONEY (ATM), SE $S(t) = E$

DA MESMA FORMA, UMA PUT EUROPEIA É DITA ESTAR

- IN THE MONEY, SE $S(t) < E$
- OUT OF THE MONEY, SE $S(t) > E$
- AT THE MONEY, SE $S(t) = E$

$\Rightarrow$ QUANDO A OPÇÃO ESTÁ ITM, O SEU RETORNO SERÁ POSITIVO, SE O PREÇO DO ATIVO SE MANTIVER COMO ESTÁ.

QUANDO A OPÇÃO ESTÁ OTM, O PREÇO DO ATIVO PRECISA VARIAR SUBSTANCIALMENTE PARA QUE HAJA UM RETORNO POSITIVO.

A CONDIÇÃO ATM DEFINE A FRONTEIRA ENTRE AS DUAS OUTRAS POSSIBILIDADES.

- VALOR DO DELTA NA PROXIMIDADE DO VENCIMENTO:

VERIFICA-SE QUE, NA PROXIMIDADE DO VENCIMENTO O DELTA DAS OPÇÕES EUROPEIAS TEM O SEGUINTE COMPORTAMENTO:

$t \simeq T$:
- |DELTA| TENDE PARA 1, SE A OPÇÃO VENCE ITM
- |DELTA| TENDE PARA 0, SE A OPÇÃO VENCE OTM
- |DELTA| OSCILA RAPIDAMENTE ENTRE 0 e 1, SE A OPÇÃO VENCE ATM

FORMALMENTE:

$$\lim_{t \to T^-} \frac{\partial C(S,t)}{\partial S} = \begin{cases} 1, \text{ se } S(T) > E \ (\text{ITM}) \\ \frac{1}{2}, \text{ se } S(T) = E \ (\text{ATM}) \\ 0, \text{ se } S(T) < E \ (\text{OTM}) \end{cases}$$

$$\lim_{t \to T^-} \frac{\partial P(S,t)}{\partial S} = \begin{cases} 0, \text{ se } S(T) > E \ (\text{OTM}) \\ -\frac{1}{2}, \text{ se } S(T) = E \ (\text{ATM}) \\ -1, \text{ se } S(T) < E \ (\text{ITM}) \end{cases}$$

INTERPRETAÇÃO EM TERMOS FINANCEIROS:

QUANDO $t \simeq T$, HÁ MUITO POUCO TEMPO PARA O VALOR DO ATIVO SE ALTERAR.

$\Rightarrow$ SE A OPÇÃO SE ENCONTRA ITM OU OTM, NO INSTANTE $t \simeq T$, ELA PROVAVELMENTE VAI PERMANECER ASSIM ATÉ O VENCIMENTO.

⇒ CONSEQUÊNCIAS PARA UMA CALL:

- NO CASO DE A CALL SE ENCONTRAR ITM, QUALQUER ALTERAÇÃO NO VALOR DO ATIVO VAI SE REFLETIR EM UMA IGUAL ALTERAÇÃO NO RETORNO DA OPÇÃO (VALOR NO VENCIMENTO)

  ⇒ O VALOR DA CALL E O VALOR DO ATIVO SÃO ALTAMENTE CORRELACIONADOS, O QUE SIGNIFICA QUE AMBOS TÊM O MESMO RISCO.

  ⇒ COMO O PORTFÓLIO DEVE REPLICAR O RISCO DA OPÇÃO, E COMO ESTAMOS TRABALHANDO COM UMA UNIDADE DA CALL, O PORTFÓLIO DEVE MANTER UMA UNIDADE DO ATIVO. PORTANTO, DELTA $\simeq 1$.

- NO CASO DE A CALL SE ENCONTRAR OTM, O VALOR DO SEU RETORNO TENDERÁ A SER NULO, QUALQUER QUE SEJA O COMPORTAMENTO DO VALOR DO ATIVO.

  ⇒ OS VALORES DA CALL E DO ATIVO SÃO DESCORRELACIONADOS, E COMO O RETORNO NÃO TEM RISCO, NÃO É PRECISO MANTER NENHUMA UNIDADE DO ATIVO NO PORTFÓLIO. PORTANTO, DELTA $\simeq 0$.