8. AS GREGAS

FÓRMULAS DE BLACK-SCHOLES:

$$\begin{cases} C(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2) \\ P(S,t) = Ee^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1) \end{cases}$$

COM

$$d_1 = \frac{\log(S/E) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\log(S/E) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

E

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

$\Rightarrow$ O VALOR DE UMA OPÇÃO DEPENDE DO SEU VENCIMENTO T, E DO VALOR DE EXERCÍCIO, E, E É TAMBÉM FUNÇÃO DAS GRANDEZAS

$S \equiv$ VALOR DO ATIVO

$t \equiv$ TEMPO

$r \equiv$ TAXA DE JUROS LIVRE DE RISCO

$\sigma \equiv$ VOLATILIDADE

AS CHAMADAS 'GREGAS' SÃO DERIVADAS PARCIAIS DO VALOR DA OPÇÃO EM RELAÇÃO A ESTAS GRANDEZAS.

AS GREGAS:

$$\frac{\partial C}{\partial S} \equiv \Delta \text{ (DELTA)}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial \Delta}{\partial S} \equiv \Gamma \text{ (GAMA)}$$

$$\frac{\partial C}{\partial r} \equiv \rho \text{ (RÔ)}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} \equiv \Theta \text{ (TETA)}$$

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma} \equiv \text{VEGA}$$

Δ, Γ, ρ E Θ SÃO LETRAS GREGAS; VEGA, NÃO.

OBSERVAÇÕES:

i) NO CÁLCULO DAS GREGAS É IMPORTANTE NOTAR QUE OS PARÂMETROS d_1 E d_2 SÃO TAMBÉM FUNÇÕES DE S, t, r E σ.

É FÁCIL MOSTRAR QUE

$$\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{\partial d_2}{\partial S} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \; ; \; \frac{\partial}{\partial r} d_1 = \frac{\partial}{\partial r} d_2 = \frac{1}{\sigma}\sqrt{T-t}$$

$$\frac{\partial d_1}{\partial t} = \frac{\log(S/E) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{2\sigma(T-t)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial d_2}{\partial t} = \frac{\log(S/E) - (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{2\sigma(T-t)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma} d_1 = \frac{\sqrt{T-t}}{\sigma^2}\left(\frac{\sigma^2}{2}-r\right) - \frac{1}{\sigma^2\sqrt{T-t}}\log\left(\frac{S}{E}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma} d_2 = -\frac{\sqrt{T-t}}{\sigma^2}\left(\frac{\sigma^2}{2}+r\right) - \frac{1}{\sigma^2\sqrt{T-t}}\log\left(\frac{S}{E}\right)$$

ii) COMO

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

$$N'(x) \equiv \frac{d}{dx} N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

iii) PODE-SE MOSTRAR QUE

$$S N'(d_1) - E e^{-r(T-t)} N'(d_2) = 0 \qquad (1)$$

UM RESULTADO QUE É MUITO IMPORTANTE PARA O CÁLCULO DAS GREGAS.

- CÁLCULO DAS GREGAS: CALL EUROPEIA

DELTA:

$$\Delta \equiv \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) + S N'(d_1) \frac{\partial}{\partial S} d_1 - E e^{-r(T-t)} N'(d_2) \frac{\partial}{\partial S} d_2$$

$$= N(d_1) + \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left(N'(d_1) - E e^{-r(T-t)} \frac{N'(d_2)}{S} \right)$$

E USANDO A EQUAÇÃO (1):

$$\Delta = N(d_1)$$

GAMA:

$$\Gamma \equiv \frac{\partial \Delta}{\partial S} = N'(d_1) \frac{\partial}{\partial S} d_1$$

$$\therefore \Gamma = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$$

RÔ:

$$\rho \equiv \frac{\partial C}{\partial r} = S N'(d_1) \frac{\partial}{\partial r} d_1 + (T-t) E e^{-r(T-t)} N(d_2) -$$

$$- E e^{-r(T-t)} N'(d_2) \frac{\partial}{\partial r} d_2$$

USANDO $\frac{\partial}{\partial r} d_1 = \frac{\partial}{\partial r} d_2 = \frac{1}{\sigma}\sqrt{T-t}$, E A EQUAÇÃO (1):

$$\rho = (T-t) E e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

TETA:

$$\Theta \equiv \frac{\partial C}{\partial t} = S N'(d_1) \frac{\partial}{\partial t} d_1 - E r e^{-r(T-t)} N(d_2) - E e^{-r(T-t)} N'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial t}$$

USANDO AS EXPRESSÕES PARA $\frac{\partial}{\partial t} d_1$ E $\frac{\partial}{\partial t} d_2$, E A EQ. (1):

$$\Theta = -\frac{S\sigma}{2\sqrt{T-t}} N'(d_1) - r E e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

VEGA:

$$VEGA \equiv \frac{\partial C}{\partial \sigma} = S N'(d_1) \frac{\partial}{\partial \sigma} d_1 - E e^{-r(T-t)} N'(d_2) \frac{\partial}{\partial \sigma} d_2$$

USANDO AS EXPRESSÕES PARA $\frac{\partial}{\partial \sigma} d_1$ E $\frac{\partial}{\partial \sigma} d_2$, E A EQUAÇÃO (1):

$$VEGA = S\sqrt{T-t}\, N'(d_1)$$

- INTERPRETAÇÃO DAS GREGAS:

i) $\Delta \equiv \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1)$

$\Rightarrow \Delta > 0$

i.e., UM INCREMENTO NO PREÇO DO ATIVO AUMENTA O RETORNO PROVÁVEL NO VENCIMENTO.

ii) $\rho \equiv \frac{\partial C}{\partial r} = (T-t)E\, e^{-r(T-t)} N(d_2)$

$\Rightarrow \rho > 0$ ATÉ O VENCIMENTO

i.e., UM INCREMENTO NA TAXA DE JUROS EQUIVALE A UMA REDUÇÃO NO PREÇO DE EXERCÍCIO, E, PORQUE O VALOR EFETIVO DE UMA QUANTIA FIXA, EM ALGUM MOMENTO NO FUTURO, SE REDUZ SE A TAXA DE JUROS AUMENTA.

COMO ISTO TORNA MAIS PROVÁVEL UM RETORNO POSITIVO, A OPÇÃO SE TORNA MAIS CARA.

iii) $\Theta \equiv \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{-S\sigma}{2\sqrt{T-t}} N'(d_1) - rE\, e^{-r(T-t)} N(d_2)$

$\Rightarrow \Theta < 0$

ISTO REFLETE O FATO DE QUE O VALOR DE LANÇAMENTO DE UMA CALL É UMA FUNÇÃO NÃO-DECRESCENTE DA DATA DE VENCIMENTO.

(DEVEMOS LEMBRAR UM RESULTADO EQUIVALENTE NÃO EXISTE PARA O PREÇO DE LANÇAMENTO DE UMA PUT)

iv) $VEGA \equiv \dfrac{\partial C}{\partial \sigma} = S\sqrt{T-t}\,N'(d_1)$

$\Rightarrow VEGA > 0$

i.e., UM INCREMENTO NA VOLATILIDADE LEVA A UMA VARIAÇÃO MAIS AMPLA NO PREÇO DO ATIVO.

SE A VARIAÇÃO SE DÁ NA CONDIÇÃO OTM, ELA NÃO TEM EFEITO SOBRE O VALOR DA OPÇÃO (O RETORNO PERMANECERÁ NULO).

SE A VARIAÇÃO SE DÁ NA CONDIÇÃO ITM, O RETORNO AUMENTA.

ESTA ASSIMETRIA FAZ COM QUE A VOLATILIDADE TENHA UM EFEITO LÍQUIDO POSITIVO SOBRE O VALOR DA OPÇÃO.

- VERIFICAÇÃO DA SOLUÇÃO DE BLACK-SCHOLES:

EDP DE BLACK-SCHOLES:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS\frac{\partial C}{\partial S} - rC = \Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma + rS\Delta - rC =$$

$$= \frac{-S\sigma}{2\sqrt{T-t}}\cancel{N'(d_1)} - \cancel{rEe^{-r(T-t)}N(d_2)} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\cancel{N'(d_1)}}{S\sigma\sqrt{T-t}} + \cancel{rSN(d_1)} - r\left(\cancel{SN(d_1)} - \cancel{Ee^{-r(T-t)}N(d_2)}\right)$$

$$= 0$$