9. AS FÓRMULAS DE BLACK & SCHOLES

FÓRMULAS DE B&S:

PERMITEM OBTER O PREÇO JUSTO, EM $t=0$, PARA UM OPÇÃO EUROPEIA, EM TERMOS DE

$S_0 \equiv$ PREÇO INICIAL DO ATIVO

$E \equiv$ PREÇO DE EXERCÍCIO DA OPÇÃO

$T \equiv$ DATA DO VENCIMENTO

$r \equiv$ TAXA DE JUROS LIVRE DE RISCO

$\sigma \equiv$ VOLATILIDADE DO ATIVO

TODAS AS GRANDEZAS ACIMA SÃO CONHECIDAS, EXCETO A VOLATILIDADE DO ATIVO, QUE DEVE SER ESTIMADA A PARTIR DAS INFORMAÇÕES DISPONÍVEIS NO MERCADO.

AS FÓRMULAS DE B&S NÃO DEPENDEM DO PARÂMETRO DE 'DRIFT', OU TENDÊNCIA, QUE DETERMINA A VALORIZAÇÃO ESPERADA DO ATIVO, SEGUNDO A FÓRMULA

$$S(t) = S_0 \, e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\sqrt{t}\,z}, \quad z \sim N(0,1)$$

$\Rightarrow$ ESTIMATIVAS DIFERENTES PARA μ NÃO AFETAM A ESTIMATIVA DO VALOR DA OPÇÃO, DESDE QUE A ESTIMATIVA DA VOLATILIDADE SEJA A MESMA.

AS FÓRMULAS DE B&S DETERMINAM O PREÇO JUSTO PARA OPÇÃO, CONSIDERANDO QUE O SEU LANÇADOR DESEJA ELIMINAR O RISCO POR MEIO DE HEDGING. UM ESPECULADOR QUE ACEITE ASSUMIR RISCO PODE PRECIFICAR A OPÇÃO DE FORMA DIFERENTE DE B&S.

- PROPRIEDADES DAS FÓRMULAS DE B&S:

i) AS CURVAS

$$C(S,t_k) \times S \quad e \quad P(S,t_k) \times S$$

PARA INSTANTES t_k DETERMINADOS SE APROXIMAM DA FORMA DE 'BASTÃO DE HOCKEY' DAS CURVAS DE RETORNO DAS OPÇÕES, QUANDO $t_k \to T$.

- PARA AS CURVAS $C(S,t_k) \times S$ A CONVERGÊNCIA SE DÁ MONOTONICAMENTE, A PARTIR DE CIMA, JÁ QUE

$$\Theta_C \equiv \frac{\partial C}{\partial t} < 0$$

- PARA AS CURVAS $P(S,t_k) \times S$, A CONVERGÊNCIA NÃO É UNIFORME, A PARTIR DE CIMA OU DE BAIXO, JÁ QUE $\Theta_P \equiv \frac{\partial P}{\partial t}$. PODE SER POSITIVA OU NEGATIVA.

ii) AS SUPERFÍCIES

$$C(S,t) \times (S,t) \quad e \quad P(S,t) \times (S,t)$$

SÃO SUAVES.

iii) A SUPERFÍCIE

$$\Delta(S,t) \times (S,t)$$

ONDE $\Delta \equiv \frac{\partial C}{\partial S}$ OU $\Delta \equiv \frac{\partial P}{\partial S}$, SE APROXIMA DE UMA FUNÇÃO DEGRAU, QUANDO $t \to T$.

- **MUDANÇA DE VARIÁVEIS.** EXPRESSA AS FÓRMULAS DE B&S EM TERMOS DE APENAS DUAS VARIÁVEIS

DEFINIMOS:

$$m = \log \frac{S e^{r(T-t)}}{E} \quad \text{(RAZÃO DE 'MONEYNESS')}$$

$$\hat{\tau} = \sigma \sqrt{T-t} \quad \text{(VOLATILIDADE ESCALADA)}$$

$$\left.\begin{aligned} c &= \frac{C}{S} \\ p &= \frac{P}{S} \end{aligned}\right\} \text{VALOR DA OPÇÃO EM TERMOS DO PREÇO DO ATIVO}$$

$\Rightarrow$ EM TERMOS DESTAS VARIÁVEIS, OBTEMOS

$$d_1 = \frac{m}{\hat{\tau}} + \frac{\hat{\tau}}{2} \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{m}{\hat{\tau}} - \frac{\hat{\tau}}{2}$$

E OS VALORES REESCALADOS DAS OPÇÕES SE TORNAM

$$\begin{cases} c(m, \hat{\tau}) = N(d_1) - e^{-m} N(d_2) \\ p(m, \hat{\tau}) = e^{-m} N(-d_2) - N(-d_1) \end{cases}$$

INTERPRETAÇÃO DA RAZÃO DE 'MONEYNESS':

TEMOS, $\quad E[S(t)] = S_0 e^{\mu t} \quad \therefore \quad E[S(T)] = S_0 e^{\mu T}$

TAMBÉM: $\quad E[S(T)] = S(t) e^{\mu(T-t)}$

$\Rightarrow$ SE $r = \mu$, $\quad m = \log \dfrac{E[S(T)]}{E}$

$$\Rightarrow \begin{cases} m > 0, \text{ SE } E[S(T)] > E: \text{ CASO ITM PARA CALL, OTM PARA PUT} \\ m = 0, \text{ SE } E[S(T)] = E: \text{ CASO ATM PARA CALL OU PUT} \\ m < 0, \text{ SE } E[S(T)] < E: \text{ CASO OTM PARA CALL, ITM PARA PUT} \end{cases}$$