ANÁLISE NUMÉRICA

II. SOLUÇÕES DE EQUAÇÕES A UMA VARIÁVEL

- EM GERAL, ESTAREMOS INTERESSADOS NAS RAÍZES REAIS DE EQUAÇÕES NÃO-LINEARES

$\left\{ \begin{array}{l} \text{RAÍZES DA EQUAÇÃO } f(x) = 0 \\ \text{ZEROS DA FUNÇÃO } f(x) \end{array} \right.$

- MÉTODOS NUMÉRICOS $\Rightarrow$ 2 FASES

  FASE 1: LOCALIZAÇÃO OU ISOLAMENTO DAS RAÍZES

  FASE 2: REFINAMENTO

- FASE 1 $\Rightarrow$ ANÁLISE TEÓRICA E GRÁFICA DA FUNÇÃO $f(x)$

  $\Rightarrow$ DOMÍNIO DA FUNÇÃO, PONTOS DE DESCONTINUIDADE
  REGIÕES DE CRESCIMENTO E DECRESCIMENTO
  PONTOS DE MÁXIMO E MÍNIMO
  CONCAVIDADE E CONVEXIDADE
  PONTOS DE INFLEXÃO E ASSÍNTOTAS

- FASE 2 $\Rightarrow$ ESCOLHIDAS APROXIMAÇÕES INICIAIS PARA AS RAÍZES, NOS INTERVALOS OBTIDOS NA FASE 1, PROCURAMOS MELHORÁ-LAS ITERATIVAMENTE, ATÉ OBTER A APROXIMAÇÃO DESEJADA

  $\Rightarrow$ MÉTODOS ITERATIVOS DE SOLUÇÃO:

  CADA ITERAÇÃO UTILIZA RESULTADOS DA ITERAÇÃO ANTERIOR

- FASE 2: 1) O MÉTODO DA BISSECÇÃO OU PESQUISA BINÁRIA
  2) O MÉTODO DO PONTO FIXO
  3) O MÉTODO DE NEWTON
  4) O MÉTODO DA SECANTE
  5) O MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO

1. MÉTODO DA BISSECÇÃO:

=> BASEADO NO TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO: SE $f \in C[a,b]$ E K É UM NÚMERO QUALQUER ENTRE $f(a)$ E $f(b)$, EXISTE UM NÚMERO c EM (a,b) PARA O QUAL $f(c)=K$.

=> COMO CASO PARTICULAR DESTE TEOREMA, TEMOS QUE, SE $f(a)$ E $f(b)$ TÊM SINAIS OPOSTOS, i.e., $f(a)f(b)<0$, EXISTE UM NÚMERO p EM (a,b) QUE É UM ZERO DE $f(x)$, i.e., $f(p)=0$.

OBS.: POR SIMPLIFICAÇÃO, ASSUMIREMOS UMA ÚNICA RAÍZ EM $[a,b]$, O QUE ACONTECE QUANDO $f'(x)$ EXISTE E PRESERVA O SINAL NESTE INTERVALO

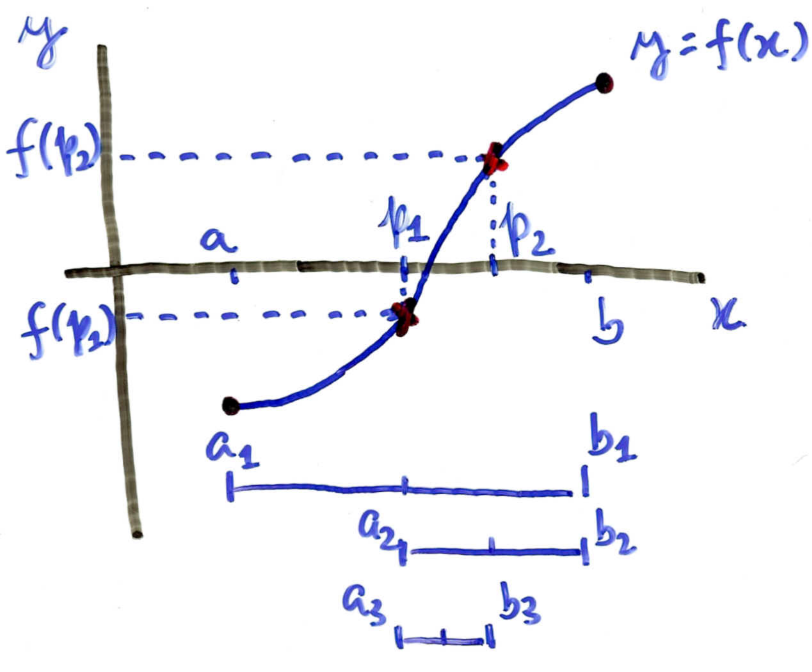
* O MÉTODO DA BISSECÇÃO SE BASEIA NA CONTÍNUA REDUÇÃO DO INTERVALO $[a,b]$ À SUA METADE, EM CADA ITERAÇÃO LOCALIZANDO-SE O SUBINTERVALO QUE CONTÉM p

* DESCRIÇÃO DO MÉTODO:

- INICIALMENTE, TOMA-SE $a_1 = a$, $b_1 = b$ e

$$p_1 = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{a_1 + b_1}{2}$$ (PONTO MÉDIO DE $[a_1, b_1]$)

- SE $f(p_1) = 0$, ENTÃO $p = p_1$ (p_1 É SOLUÇÃO)
- SE $f(p_1) \neq 0$, ENTÃO $f(p_1)$ TEM O SINAL DE $f(a_1)$ <u>OU</u> DE $f(b_1)$
- SE $f(p_1)$ TEM O SINAL DE $f(a_1)$, ENTÃO $p \in (p_1, b_1)$,
  E FAZEMOS $a_2 = p_1$ e $b_2 = b_1$
- SE NÃO, $p \in (a_1, p_1)$, E FAZEMOS $a_2 = a_1$ E $b_2 = p_1$
- REPETIMOS O PROCESSO PARA O INTERVALO $[a_2, b_2]$



* ALGORITMO: BISSECÇÃO

OBJETIVO: ENCONTRAR UMA SOLUÇÃO PARA $f(x)=0$, DADA f CONTÍNUA EM $[a,b]$, QUANDO $f(a)$ E $f(b)$ TÊM SINAIS OPOSTOS

ENTRADA PONTOS EXTREMOS a, b
TOLERÂNCIA TOL
NÚMERO MÁXIMO DE ITERAÇÕES N_0

SAÍDA SOLUÇÃO APROXIMADA p OU MENSAGEM DE FALHA

PASSO 1 FAÇA $i=1$;
$FA = f(a)$.

PASSO 2 ENQUANTO $i \leq N_0$ SIGA OS PASSOS 3-6

PASSO 3 FAÇA $p = a + (b-a)/2$; (CALCULA p_i)
$FP = f(p)$.

PASSO 4 SE $FP = 0$ OU $(b-a)/2 < TOL$ ENTÃO
SAÍDA(p); (SUCESSO)
PARE.

PASSO 5 FAÇA $i = i+1$

PASSO 6 SE $FA \cdot FP > 0$ ENTÃO FAÇA $a = p$; (CALCULA a_i, b_i)
$FA = FP$
SENÃO FAÇA $b = p$.

PASSO 7 SAÍDA ('FALHA APÓS N_0 ITERAÇÕES, N_0=', N_0); (FRACASSO)

PARE.

OBSERVAÇÕES:

i) ALTERNATIVAS PARA A INTERRUPÇÃO DO PROCEDIMENTO:

SELECIONAMOS TOLERÂNCIA $\varepsilon > 0$

GERAMOS $p_1, \ldots, p_N$ ATÉ QUE UMA DAS SEGUINTES CONDIÇÕES OCORRA:

$$|p_N - p_{N-1}| < \varepsilon$$

$$\frac{|p_N - p_{N-1}|}{|p_N|} < \varepsilon \,, \quad p_N \neq 0$$

$$|f(p_N)| < \varepsilon$$

* A SEGUNDA CONDIÇÃO ACIMA É EM GERAL O MELHOR CRITÉRIO DE PARADA, NA AUSÊNCIA DE OUTRAS INFORMAÇÕES, PORQUE

- HÁ SEQUÊNCIAS DIVERGENTES PARA AS QUAIS A DIFERENÇA $p_n - p_{n-1}$ CONVERGE PARA ZERO
- $f(p_n)$ PODE SER PRÓXIMA A ZERO PARA p_n LONGE DE p

ii) PARA EVITAR UM LOOP INFINITO, DEVE-SE ESTABELECER UM LIMITE SUPERIOR PARA O NÚMERO DE ITERAÇÕES

iii) DEVE-SE ESCOLHER O MENOR INTERVALO INICIAL $[a, b]$ POSSÍVEL (COM $f(a) \cdot f(b) < 0$) PARA REDUZIR O NÚMERO DE ITERAÇÕES

iv) O ALGORITMO DA BISSECÇÃO É LENTO, E PERMITE QUE UMA BOA APROXIMAÇÃO INTERMEDIÁRIA SEJA DESCARTADA, MAS ELE SEMPRE CONVERGE PARA UMA SOLUÇÃO, CONFORME O TEOREMA A SEGUIR:

* TEOREMA: SEJA $f \in C[a,b]$ COM $f(a).f(b) < 0$.

O MÉTODO DA BISSECÇÃO GERA UMA SEQUÊNCIA $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ QUE SE APROXIMA DO VALOR p TAL QUE $f(p)=0$, COM

$$|p_n - p| \leq \frac{b-a}{2^n} \quad , \quad n \geq 1$$

$\Rightarrow$ A SEQUÊNCIA $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ CONVERGE PARA p COM RAZÃO $O(1/2^n)$

O TEOREMA ACIMA DÁ APENAS UM LIMITE SUPERIOR, QUE PODE SER BASTANTE CONSERVADOR, PARA O ERRO DA APROXIMAÇÃO.

V) DEVE-SE COMPUTAR OS PONTOS MÉDIOS POR

$$p_n = a_n + \frac{b_n - a_n}{2}$$

PORÉM, PARA $b_n \simeq a_n$, O PEQUENO FATOR DE CORREÇÃO POUCO AFETARIA A POSIÇÃO DE p_n

VI) PARA EVITAR OVERFLOW OU UNDERFLOW, É PREFERÍVEL UTILIZAR O TESTE

$$\text{sgn}(f(a_n))\,\text{sgn}(f(p_n)) < 0$$

EM VEZ DE $f(a_n)f(p_n) < 0$, ONDE

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{SE } x < 0 \\ 0, & \text{SE } x = 0 \\ 1, & \text{SE } x > 0 \end{cases}$$

2. MÉTODO DO PONTO FIXO:

- UM NÚMERO p É UM PONTO FIXO PARA UMA FUNÇÃO g DADA, SE

$$g(p) = p$$

- DADO UM PROBLEMA DE ENCONTRAR A RAÍZ DE UMA FUNÇÃO $f(x)$, PODEMOS DEFINIR PROBLEMAS EQUIVALENTES DE ENCONTRAR O PONTO FIXO DE UMA FUNÇÃO $g(x)$

e.g., $g(x) = x - f(x)$

$g(x) = x + 3f(x)$, ETC.

SE $f(p) = 0$, $g(p) = p$, E VICE-VERSA.

* CONDIÇÕES SUFICIENTES PARA A EXISTÊNCIA DE PONTOS FIXOS

* TEOREMA: A) SE $g \in C[a,b]$ E $g(x) \in [a,b]$, $\forall x \in [a,b]$, ENTÃO $g(x)$ TEM UM PONTO FIXO EM $[a,b]$.

B) SE, ADICIONALMENTE, $g'(x)$ EXISTE EM (a,b) E EXISTE UMA CONSTANTE POSITIVA $k < 1$, TAL QUE

$$|g'(x)| \leq k, \quad \forall x \in (a,b)$$

ENTÃO O PONTO FIXO EM $[a,b]$ É ÚNICO.