8. ZEROS DE POLINÔMIOS:

* UM POLINÔMIO DE GRAU n TEM A FORMA

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

COM $a_n \neq 0$, ONDE AS CONSTANTES a_i SÃO OS COEFICIENTES DO POLINÔMIO

* PARA $n = 2, 3, 4$ EXISTEM FÓRMULAS FECHADAS PARA CALCULAR OS ZEROS DE $P(x)$, MAS PARA $n \geq 5$ NÃO EXISTEM FÓRMULAS EXPLÍCITAS, E PRECISAMOS USAR MÉTODOS ITERATIVOS.

- EXISTÊNCIA E LOCALIZAÇÃO DAS RAÍZES:

*** TEOREMA** (TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA):
SE $P(x)$ É UM POLINÔMIO DE GRAU $n \geq 1$ COM COEFICIENTES REAIS OU COMPLEXOS, ENTÃO $P(x) = 0$ TEM PELO MENOS UMA RAIZ, POSSIVELMENTE COMPLEXA.

*** COROLÁRIO:** PARA O POLINÔMIO ACIMA, EXISTEM CONSTANTES $x_1, x_2, \dots, x_k$, ÚNICAS E POSSIVELMENTE COMPLEXAS, E NÚMEROS INTEIROS ÚNICOS, $m_1, m_2, \dots, m_k$, COM $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$, TAIS QUE

$$P(x) = a_n (x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_k)^{m_k}$$

$\Rightarrow$ O CONJUNTO DE ZEROS DE UM POLINÔMIO É ÚNICO

SE CADA ZERO FOR CONTADO TANTAS VEZES QUANTO A SUA MULTIPLICIDADE, UM POLINÔMIO DE GRAU n TEM EXATAMENTE n ZEROS.

* COROLÁRIO: SEJAM $P(x)$ E $Q(x)$ POLINÔMIOS DE GRAU m, QUANDO MUITO. SE $x_1, x_2, \dots, x_k$, COM $k > m$, SÃO NÚMEROS DISTINTOS TAIS QUE $P(x_i) = Q(x_i)$, PARA $i = 1, 2, \dots, k$, ENTÃO $P(x) = Q(x)$ PARA TODOS OS VALORES DE x.

* NÚMERO DE ZEROS REAIS DE UM POLINÔMIO COM COEFICIENTES REAIS:

- REGRA DO SINAL DE DESCARTES:

DADO UM POLINÔMIO COM COEFICIENTES REAIS, O NÚMERO DE ZEROS REAIS POSITIVOS, p, NÃO EXCEDE O NÚMERO v DE VARIAÇÕES NO SINAL DOS COEFICIENTES.

ADEMAIS, ALÉM DE NÃO-NEGATIVO, $v - p$ É INTEIRO E PAR

e.g., $P(x) = 2x^5 - 3x^4 - 4x^3 + x + 1$

$$\underbrace{+ \quad -}_{1} \quad \underbrace{- \quad +}_{1} \quad +$$

$$v = 2 \Rightarrow \begin{cases} \text{SE } v - p = 0, \ p = 2 \\ \text{SE } v - p = 2, \ p = 0 \end{cases}$$

PARA OBTER O NÚMERO DE ZEROS REAIS NEGATIVOS, n, TOMAMOS $P(-x)$ E SEGUIMOS A MESMA REGRA

e.g., $P(x) = 2x^5 - 3x^4 - 4x^3 + x + 1$

$\Rightarrow P(-x) = -2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - x + 1$

$$- \quad \underbrace{- \quad +}_{1} \underbrace{\quad -}_{1} \underbrace{\quad +}_{1}$$

$$v = 3 \Rightarrow \begin{cases} \text{SE } v - n = 0, \ n = 3 \\ \text{SE } v - n = 2, \ n = 1 \end{cases}$$

- NÚMERO DE ZEROS REAIS MAIORES QUE UM CERTO α

DADO O POLINÔMIO $P(x)$ DE GRAU n, O SEU DESENVOLVIMENTO EM TORNO DE $x=\alpha$ É

$$P(x) = P(\alpha) + P'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{P''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n$$

$\Rightarrow$ $P(x)$ PODE SER ESCRITO COMO UM POLINÔMIO DE GRAU n NA VARIÁVEL $x-\alpha \equiv y$:

$$Q(y) = P(\alpha) + P'(\alpha)y + \frac{P''(\alpha)}{2!}y^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}y^n$$

$\Rightarrow$ OS ZEROS DE $P(x)$ PARA $x > \alpha$ SÃO OS ZEROS DE $Q(y)$ PARA $y > 0$.

OS ZEROS DE $P(x)$ PARA $x < \alpha$ SÃO OS ZEROS DE $Q(y)$ PARA $y < 0$.

* REAGRUPAMENTO DOS TERMOS DE UM POLINÔMIO:

- PARA OS CÁLCULOS DE $P(x)$ E $P'(x)$ EM PONTOS ESPECÍFICOS, DE FORMA EFICIENTE, DEVEMOS REAGRUPAR OS TERMOS DESSES POLINÔMIOS

$\Rightarrow$ FORMA DOS PARÊNTESES ENCAIXADOS:

e.g., $P(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{4 ADIÇÕES } (n\text{, NO CASO GERAL}) \\ 4+3+2+1 = 10 \text{ MULTIPLICAÇÕES } ((n+n^2)/2\text{, NO CASO GERAL}) \end{cases}$$

$$P(x) = (((a_4 x + a_3)x + a_2)x + a_1)x + a_0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{4 ADIÇÕES } (n\text{, NO CASO GERAL}) \\ \text{4 MULTIPLICAÇÕES } (n\text{, NO CASO GERAL}) \end{cases}$$

- CÁLCULO DO POLINÔMIO NO PONTO x_0:

e.g., $P(x_0) = (((\underbrace{a_4 x_0}_{b_4} + a_3) x_0 + a_2) x_0 + a_1) x_0 + a_0$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{a_4}_{b_4} x_0 + a_3}_{b_3} x_0 + a_2}_{b_2} \;\vdots$$

$b_4 = a_4$ $\quad$ $b_2 = a_2 + b_3 x_0$ $\quad$ $b_0 = a_0 + b_1 x_0 = P(x_0)$

$b_3 = a_3 + b_4 x_0$ $\quad$ $b_1 = a_1 + b_2 x_0$

* TEOREMA: MÉTODO DE HORNER (DIVISÃO SINTÉTICA)

SEJA $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

SE $b_n = a_n$

E

$b_k = a_k + b_{k+1} x_0$, PARA $k = n-1, n-2, \ldots, 1, 0$

ENTÃO $b_0 = P(x_0)$

ADEMAIS, SE $Q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \ldots + b_2 x + b_1$

ENTÃO $P(x) = (x - x_0) Q(x) + b_0$.

- CÁLCULO DA DERIVADA DO POLINÔMIO EM x_0:

COMO $P(x) = (x - x_0) Q(x) + b_0$, COM $Q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \ldots + b_1$

TEMOS $P'(x) = Q(x) + (x - x_0) Q'(x)$

E $P'(x_0) = Q(x_0)$

$\Rightarrow$ $P'(x_0)$ PODE SER COMPUTADO PELO MÉTODO DE HORNER APLICADO A $Q(x)$

* ALGORITMO: MÉTODO DE HORNER

OBJETIVO: CALCULAR O POLINÔMIO

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

$$= (x - x_0) Q(x) + b_0$$

E SUA DERIVADA EM x_0

ENTRADA GRAU n;

COEFICIENTES $a_0, a_1, \dots, a_n$; x_0.

SAÍDA $y = P(x_0)$; $z = P'(x_0)$.

PASSO 1 FAÇA $y = a_n$; (CALCULA b_n PARA P)

$z = a_n$. (CALCULA b_{n-1} PARA Q)

PASSO 2 PARA $j = n-1, n-2, \dots, 1$

FAÇA $y = x_0 y + a_j$; (CALCULA b_j PARA P)

$z = x_0 z + y$. (CALCULA b_{j-1} PARA Q)

PASSO 3 FAÇA $y = x_0 y + a_0$. (CALCULA b_0 PARA P)

PASSO 4 SAÍDA (y, z);

PARE.