- MÉTODO PARA A OBTENÇÃO DO PONTO FIXO

* DESCRIÇÃO DO MÉTODO:

- DADA A FUNÇÃO $g(x)$, ESCOLHEMOS UMA APROXIMAÇÃO INICIAL PARA O PONTO FIXO, p_0
- GERAMOS A SEQUÊNCIA $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$, COM

$$p_n = g(p_{n-1}), \text{ PARA } n \geq 1$$

- SE A SEQUÊNCIA CONVERGE PARA p E g É CONTÍNUA, ENTÃO

$$p \equiv \lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} g(p_{n-1}) = g\left(\lim_{n\to\infty} p_{n-1}\right) = g(p)$$

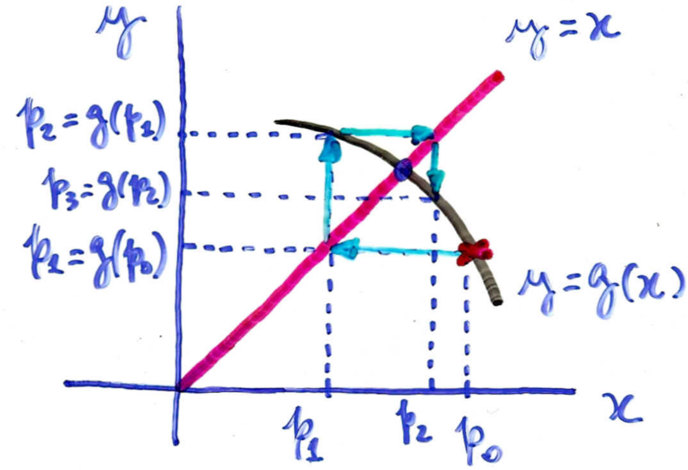
* **ALGORITMO: ITERAÇÃO DO PONTO FIXO** (OU FUNCIONAL)

OBJETIVO: OBTER UMA SOLUÇÃO PARA $p=g(p)$, DADA UMA APROXIMAÇÃO INICIAL p_0

ENTRADA APROXIMAÇÃO INICIAL p_0
NÚMERO MÁXIMO DE ITERAÇÕES N_0

SAÍDA SOLUÇÃO APROXIMADA p OU MENSAGEM DE FALHA

PASSO 1 FAÇA $i=1$.
PASSO 2 ENQUANTO $i \leq N_0$ SIGA OS PASSOS 3-6
 PASSO 3 FAÇA $p=g(p_0)$ (CALCULA p_i)
 PASSO 4 SE $|p-p_0| < TOL$ ENTÃO
  SAÍDA (p); (SUCESSO)
  PARE.
 PASSO 5 FAÇA $i=i+1$.
 PASSO 6 FAÇA $p_0=p$. (ATUALIZA p_0)
PASSO 7 SAÍDA ('FALHA APÓS N_0 ITERAÇÕES $N_0=$', N_0); (FRACASSO)
PARE.



— QUESTÃO: COMO ENCONTRAR UM PROBLEMA DE PONTO FIXO QUE PRODUZA UMA SEQUÊNCIA QUE CONVIRJA RAPIDAMENTE PARA UMA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE CÁLCULO DE RAÍZES DADO?

* DADO O PROBLEMA DE RAÍZES $f(x) = 0$, AS FUNÇÕES $g(x)$ QUE DEFINEM PROBLEMAS DE PONTO FIXO EQUIVALENTES TÊM A FORMA GERAL

$$g(x) = x + A(x) f(x)$$

COM $A(p) \neq 0$, ONDE p É O PONTO FIXO.

* ESTAS FUNÇÕES $g(x)$ SÃO CHAMADAS FUNÇÕES DE ITERAÇÃO PARA A EQUAÇÃO $f(x) = 0$:

$$f(p) = 0 \iff g(p) = p$$

* NEM TODA FUNÇÃO DE ITERAÇÃO $g(x)$ GERA UM PROCEDIMENTO DE ITERAÇÃO

$$p_n = g(p_{n-1})$$

CONVERGENTE PARA p.

* **TEOREMA**: TEOREMA DO PONTO FIXO

SEJA $g \in C[a,b]$, TAL QUE $g(x) \in [a,b]$, $\forall x \in [a,b]$.

SUPONDO QUE $g'(x)$ EXISTA EM (a,b) E QUE EXISTA UMA CONSTANTE $0 < k < 1$, COM

$$|g'(x)| \le k \,, \quad \forall x \in (a,b)$$

ENTÃO, PARA QUALQUER NÚMERO $p_0 \in [a,b]$, A SEQUÊNCIA

$$p_n = g(p_{n-1}) \,, \quad n \ge 1$$

CONVERGE PARA O PONTO FIXO ÚNICO p, EM $[a,b]$.

* COROLÁRIO:

SE g SATISFAZ O TEOREMA DO PONTO FIXO, OS LIMITES PARA O ERRO ENVOLVIDO NA UTILIZAÇÃO DE p_n COMO APROXIMAÇÃO DE p SÃO DADOS POR

i) $|p_n - p| \le k^n \max\{p_0 - a, b - p_0\}$

ii) $|p_n - p| \le \dfrac{k^n}{1-k} |p_1 - p_0|$, PARA $n \ge 1$

$\Rightarrow$ A **TAXA DE CONVERGÊNCIA** DA SEQUÊNCIA $\{p_n\}$ **DEPENDE DO LIMITE k** DA PRIMEIRA DERIVADA DE $g(x)$. QUANTO MENOR k $(0 < k < 1)$, MAIS RÁPIDA SERÁ A CONVERGÊNCIA.

3. MÉTODO DE NEWTON (NEWTON-RAPHSON)

- APRESENTAÇÃO BASEADA NO POLINÔMIO DE TAYLOR:

SEJA $f \in C^2[a,b]$, COM $f(p)=0$, $p \in [a,b]$

SEJA $\bar{x} \in [a,b]$ UMA APROXIMAÇÃO DE p TAL QUE

$f'(\bar{x}) \neq 0$ E $|p-\bar{x}|$ SEJA 'PEQUENO'

CONSIDEREMOS O POLINÔMIO DE TAYLOR DE PRIMEIRO GRAU PARA $f(x)$ EM TORNO DE $\bar{x}$:

$$f(x) = f(\bar{x}) + (x-\bar{x}) f'(\bar{x}) + \frac{(x-\bar{x})^2}{2} f''(\xi(x))$$

ONDE $\xi(x) \in [x, \bar{x}]$

PARA $x = p$, TEMOS

$$f(p) = 0 = f(\bar{x}) + (p-\bar{x}) f'(\bar{x}) + \frac{(p-\bar{x})^2}{2} f''(\xi(p))$$

E COMO $|p-\bar{x}|$ É PEQUENO,

$$0 \simeq f(\bar{x}) + (p-\bar{x}) f'(\bar{x})$$

$$\therefore p \simeq \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$$

- MÉTODO DE NEWTON:

$\Rightarrow$ APROXIMAÇÃO INICIAL p_0

SEQUÊNCIA $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$

COM

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, \quad n \geq 1$$

* ALGORITMO: MÉTODO DE NEWTON

OBJETIVO: ENCONTRAR UMA SOLUÇÃO PARA $f(x)=0$, DADA UMA APROXIMAÇÃO INICIAL p_0

ENTRADA APROXIMAÇÃO INICIAL p_0
TOLERÂNCIA TOL
NÚMERO MÁXIMO DE ITERAÇÕES N_0

SAÍDA SOLUÇÃO APROXIMADA p OU MENSAGEM DE FALHA

PASSO 1 FAÇA $i=1$.

PASSO 2 ENQUANTO $i \leq N_0$ SIGA OS PASSOS 3-6

PASSO 3 FAÇA $p = p_0 - f(p_0)/f'(p_0)$. (CALCULA p_i)

PASSO 4 SE $|p-p_0| < TOL$ ENTÃO

SAÍDA(p); (SUCESSO)

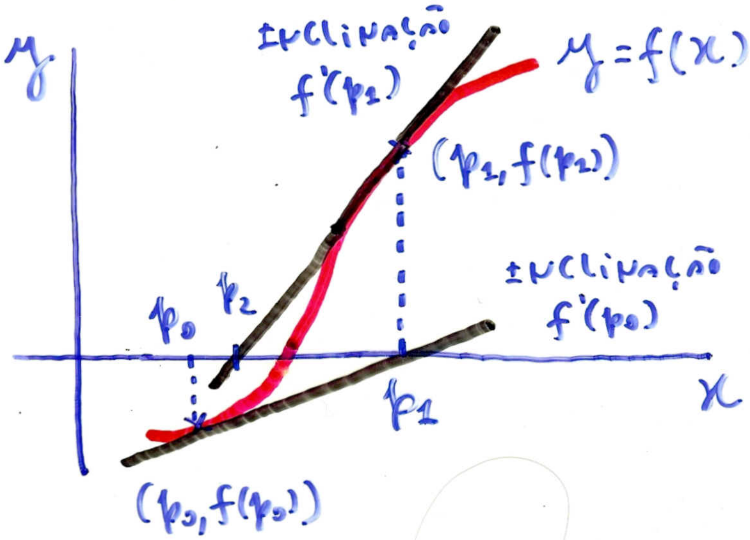
PARE.

PASSO 5 FAÇA $i=i+1$.

PASSO 6 FAÇA $p_0=p$. (ATUALIZA p_0)

PASSO 7 SAÍDA ('FALHA APÓS N_0 ITERAÇÕES, N_0=', N_0) (FALHA)

PARE.



– O MÉTODO DE NEWTON COMO ITERAÇÃO FUNCIONAL:

* O MÉTODO DE NEWTON PODE SER ESCRITO COMO

$$p_n = g(p_{n-1})$$

COM $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

i.e., $g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \dfrac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$, $n \geq 1$

* OBSERVE-SE QUE, NESTE CASO, TEMOS $g'(p) = 0$, POIS

$$g'(x) = 1 - \left[\frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right] = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

E COMO $f(p) = 0$, $g'(p) = 0$, DESDE QUE $f'(p) \neq 0$.

* OBSERVAÇÃO: O MÉTODO DE NEWTON NÃO PODE PROSSEGUIR SE $f'(p_{n-1}) = 0$, PARA ALGUM n.
PODE-SE MOSTRAR QUE ELE É MAIS EFETIVO QUANDO f' É LIMITADA LONGE DE ZERO, PRÓXIMO A p.

– IMPORTÂNCIA DA ESCOLHA DA APROXIMAÇÃO INICIAL p_0:

* NA DERIVAÇÃO DO MÉTODO DE NEWTON, SUPUSEMOS

$$(p - \bar{x})^2 << |p - \bar{x}|$$

O QUE SERÁ FALSO SE $\bar{x}$ NÃO FOR UMA BOA APROXIMAÇÃO DE p.
ENTRETANTO, MESMO COM UMA APROXIMAÇÃO INICIAL POBRE, PODE-SE GARANTIR CONVERGÊNCIA EM ALGUNS CASOS, CONFORME O TEOREMA A SEGUIR:

* **TEOREMA:**

SEJA $f \in C^2[a,b]$.

SE $p \in [a,b]$ É TAL QUE $f(p)=0$ E $f'(p) \neq 0$, ENTÃO EXISTE UM $\delta > 0$ TAL QUE O MÉTODO DE NEWTON GERA UMA SEQÜÊNCIA CONVERGENTE PARA p, QUALQUER QUE SEJA A APROXIMAÇÃO INICIAL $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$.

OBSERVAÇÕES:

i) O TEOREMA ACIMA É IMPORTANTE TEORICAMENTE, MAS NÃO NA PRÁTICA, POIS NÃO INFORMA COMO DETERMINAR δ.

ii) NA PRÁTICA, UMA APROXIMAÇÃO INICIAL É SELECIONADA, E SÃO GERADAS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS PELO MÉTODO DE NEWTON.
ESTAS, OU CONVERGEM RAPIDAMENTE PARA A RAIZ, OU FICA CLARO QUE A CONVERGÊNCIA É IMPROVÁVEL.

iii) O MÉTODO DE NEWTON TEM A DESVANTAGEM DE REQUERER O VALOR DA DERIVADA DE f EM CADA ITERAÇÃO.
PARA EVITAR ESTE PROBLEMA, PODE-SE INTRODUZIR UMA VARIANTE, CHAMADA **MÉTODO DA SECANTE**.

4. MÉTODO DA SECANTE

PELA DEFINIÇÃO DA DERIVADA,

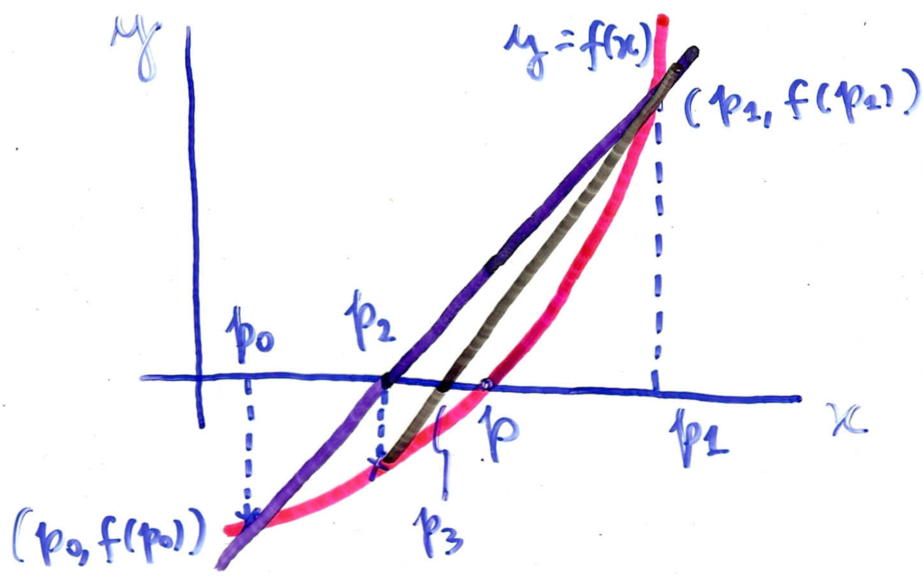
$$f'(p_{n-1}) = \lim_{x \to p_{n-1}} \frac{f(x) - f(p_{n-1})}{x - p_{n-1}}$$

FAZENDO $x = p_{n-2}$,

$$f'(p_{n-1}) \simeq \frac{f(p_{n-2}) - f(p_{n-1})}{p_{n-2} - p_{n-1}} = \frac{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}{p_{n-1} - p_{n-2}}$$

UTILIZANDO ESTA APROXIMAÇÃO NA FÓRMULA DE NEWTON:

$$p_n = p_{n-1} - f(p_{n-1}) \left[\frac{p_{n-1} - p_{n-2}}{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})} \right]$$



$\Rightarrow$ INICIANDO COM AS APROXIMAÇÕES p_0 E p_1, A APROXIMAÇÃO p_2 É O PONTO EM QUE A RETA UNINDO OS PONTOS $(p_0, f(p_0))$ E $(p_1, f(p_1))$ CORTA O EIXO x

p_3 É O PONTO ONDE A RETA UNINDO $(p_1, f(p_1))$ E $(p_2, f(p_2))$ CORTA O EIXO x, E ASSIM POR DIANTE.

* ALGORITMO: MÉTODO DA SECANTE

OBJETIVO: ENCONTRAR UMA SOLUÇÃO PARA $f(x)=0$, DADAS AS APROXIMAÇÕES INICIAIS p_0 E p_1.

ENTRADA APROXIMAÇÃO INICIAL p_0, p_1

TOLERÂNCIA TOL

NÚMERO MÁXIMO DE ITERAÇÕES N_0

SAÍDA SOLUÇÃO APROXIMADA p OU MENSAGEM DE FALHA

PASSO 1 FAÇA $i=2$;

$q_0=f(p_0)$;

$q_1=f(p_1)$.

PASSO 2 ENQUANTO $i \leq N_0$ SIGA OS PASSOS 3-6

PASSO 3 FAÇA $p=p_1-q_1(p_1-p_0)/(q_1-q_0)$. (CALCULA p_i)

PASSO 4 SE $|p-p_1|<TOL$ ENTÃO

SAÍDA (p); (SUCESSO)

PARE.

PASSO 5 FAÇA $i=i+1$;

PASSO 6 FAÇA $p_0=p_1$; (ATUALIZA p_0, q_0, p_1, q_1)

$q_0=q_1$;

$p_1=p$;

$q_1=f(p)$.

PASSO 7 SAÍDA ('O MÉTODO FALHOU APÓS N_0 ITERAÇÕES, $N_0=$', N_0);

PARE.

OBSERVAÇÕES:

i) EM GERAL, A CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DA SECANTE É MUITO MAIS RÁPIDA QUE A DA ITERAÇÃO FUNCIONAL, MAS LIGEIRAMENTE MAIS LENTA QUE A DO MÉTODO DE NEWTON.

ii) OS MÉTODOS DE NEWTON E DA SECANTE SÃO GERALMENTE USADOS PARA REFINAR RESPOSTAS OBTIDAS POR OUTRAS TÉCNICAS, COMO A DA BISSECÇÃO, JÁ QUE NECESSITAM DE UMA BOA APROXIMAÇÃO INICIAL MAS CONVERGEM RAPIDAMENTE.

iii) O MÉTODO DA BISSECÇÃO GARANTE A EXISTÊNCIA DE UMA RAIZ DENTRO DO INTERVALO DEFINIDO POR CADA PAR DE APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS, i.e.,

$$|p_n - p| < \frac{1}{2}|a_n - b_n|$$

O MESMO NÃO ACONTECE NOS MÉTODOS DE NEWTON OU DA SECANTE.

iv) O MÉTODO DA REGRA FALSA GERA APROXIMAÇÕES DA MESMA FORMA QUE O MÉTODO DA SECANTE, MAS INCLUI UM TESTE PARA ASSEGURAR QUE A RAIZ ESTEJA DENTRO DE UM INTERVALO DELIMITADO POR APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS.

5. MÉTODO DA **REGRA FALSA**

* DESCRIÇÃO DO MÉTODO:

- INICIALMENTE, ESCOLHEM-SE AS APROXIMAÇÕES p_0 E p_1, COM $f(p_0) \cdot f(p_1) < 0$.
- A APROXIMAÇÃO p_2 É ESCOLHIDA COMO NO MÉTODO DA SECANTE, i.e., COMO O PONTO ONDE O SEGMENTO DE $(p_0, f(p_0))$ A $(p_1, f(p_1))$ CORTA O EIXO x.
- PARA CALCULAR p_3, DECIDIMOS SE VAMOS UTILIZAR p_0 E p_2 OU p_1 E p_2

$\Rightarrow$ CHECAMOS $f(p_2) \cdot f(p_1)$

- SE O VALOR É NEGATIVO, p_1 E p_2 DELIMITAM UMA RAIZ

$\Rightarrow$ ESCOLHEMOS p_3 COMO A INTERSEÇÃO DE $(p_1, f(p_1))$ E $(p_2, f(p_2))$ COM O EIXO x.

- DA MESMA FORMA, ENCONTRADO p_3, O SINAL DE $f(p_3) \cdot f(p_2)$ INDICA SE USAREMOS p_2 E p_3 OU p_1 E p_3 PARA ACHAR p_4

* OBSERVAÇÃO: PARA GARANTIR QUE A RAIZ ESTEJA SEMPRE DENTRO DO INTERVALO ENTRE OS VALORES DE p_i EM ITERAÇÕES SUCESSIVAS, i.e., EM (p_i, p_{i+1}), UMA **REATUALIZAÇÃO DOS ÍNDICES** PODE SER NECESSÁRIA.

* ALGORITMO: MÉTODO DA REGRA FALSA

OBJETIVO: ENCONTRAR UMA SOLUÇÃO PARA $f(x)=0$, DADAS AS APROXIMAÇÕES INICIAIS p_0 E p_1, ONDE $f(p_0) \cdot f(p_1) < 0$.

ENTRADA APROXIMAÇÃO INICIAL p_0, p_1

TOLERÂNCIA TOL

NÚMERO MÁXIMO DE ITERAÇÕES N_0

SAÍDA SOLUÇÃO APROXIMADA p OU MENSAGEM DE FALHA

Passo 1 Faça $i=2$;

$q_0 = f(p_0)$;

$q_1 = f(p_1)$.

Passo 2 ENQUANTO $i \leq N_0$ SIGA OS PASSOS 3-7

Passo 3 FAÇA $p = p_1 - q_1(p_1 - p_0)/(q_1 - q_0)$. (Calcula p_i)

Passo 4 SE $|p - p_1| < TOL$ ENTÃO

SAÍDA (p); (SUCESSO)

PARE.

Passo 5 FAÇA $i = i+1$;

$q = f(p)$.

Passo 6 SE $q \cdot q_1 < 0$ ENTÃO FAÇA $p_0 = p_1$;

$q_0 = q_1$.

Passo 7 FAÇA $p_1 = p$;

$q_1 = q$.

Passo 8 SAÍDA ('FALHA APÓS N_0 ITERAÇÕES, N_0 =', N_0)

PARE.

6. MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO

- NO MÉTODO DA BISSECÇÃO, DADA $f(x)$ CONTÍNUA EM $[a,b]$ E COM $f(a).f(b)<0$, EM CADA ITERAÇÃO ESCOLHEMOS p_i COMO O PONTO MÉDIO DO INTERVALO

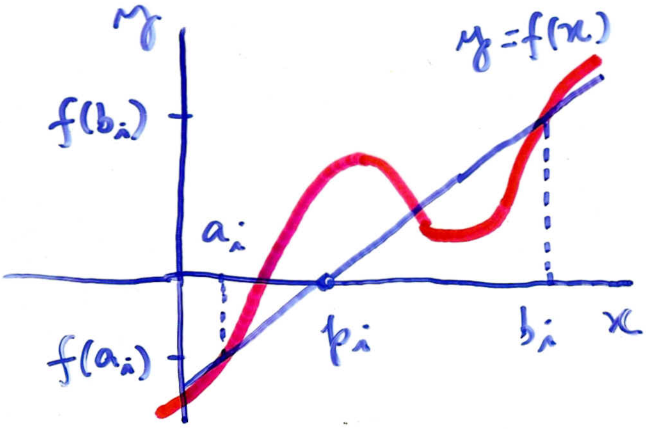
$$\text{e.g.,} \quad p_1 = \frac{a_1+b_1}{2} = \frac{a+b}{2}$$

- EM GERAL, É PROVÁVEL QUE A RAIZ ESTEJA MAIS PRÓXIMA DE UM DOS EXTREMOS a_i OU b_i
- O MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO LEVA ISTO EM CONTA:

*: EM VEZ DA MÉDIA ARITMÉTICA, ELE TOMA A MÉDIA PONDERADA ENTRE OS EXTREMOS a_i E b_i, COM PESOS $|f(b_i)|$ E $|f(a_i)|$, RESPECTIVAMENTE,

i.e.,

$$p_i = \frac{a_i|f(b_i)| + b_i|f(a_i)|}{|f(b_i)|+|f(a_i)|} = \frac{a_i f(b_i) - b_i f(a_i)}{f(b_i)-f(a_i)}$$



$$\frac{p_i - a_i}{-f(a_i)} = \frac{b_i - p_i}{f(b_i)}$$

$$\therefore \quad p_i = \frac{a_i f(b_i) - b_i f(a_i)}{f(b_i)-f(a_i)}$$

$\Rightarrow$ O PONTO p_i É A INTERSEÇÃO DO EIXO x COM A RETA PASSANDO POR $(a_i, f(a_i))$ E $(b_i, f(b_i))$

* **ALGORITMO: MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO**

OBJETIVO: ENCONTRAR UMA SOLUÇÃO PARA $f(x)=0$, DADA f CONTÍNUA EM $[a,b]$, QUANDO $f(a).f(b) < 0$

ENTRADA PONTOS EXTREMOS a, b

TOLERÂNCIA TOL

NÚMERO MÁXIMO DE ITERAÇÕES N_0

SAÍDA SOLUÇÃO APROXIMADA p OU MENSAGEM DE FALHA

PASSO 1 FAÇA $i=1$;

$FA=f(a)$;

$FB=f(b)$.

PASSO 2 ENQUANTO $i \leq N_0$ SIGA OS PASSOS 3-6

PASSO 3 FAÇA $p=\dfrac{aFB-bFA}{FB-FA}$; (CALCULA p_i)

$FP=f(p)$.

PASSO 4 SE $FP=0$ OU $|p-a|<TOL$ OU $|p-b|<TOL$ ENTÃO

SAÍDA(p); (SUCESSO)

PARE.

PASSO 5 FAÇA $i=i+1$

PASSO 6 SE $FA.FP>0$ ENTÃO FAÇA $a=p$;

$FA=FP$.

SENÃO FAÇA $b=p$; $FB=FP$.

PASSO 7 SAÍDA ('FALHA APÓS N_0 ITERAÇÕES, $N_0=$', N_0);

PARE.

* OBSERVAÇÃO: DEMONSTRA-SE QUE O MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO GERA UMA SEQUÊNCIA CONVERGENTE.

7. ANÁLISE DE ERRO PARA MÉTODOS ITERATIVOS

– VELOCIDADE DE CONVERGÊNCIA DE UMA SEQÜÊNCIA:

* DEFINIÇÃO: SEJA $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ UMA SEQÜÊNCIA QUE CONVERGE PARA p, COM $p_n \neq p$, $\forall n$.

SE EXISTEM AS CONSTANTES POSITIVAS λ E α COM

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^{\alpha}} = \lambda \quad (\alpha > 1)$$

ENTÃO A SEQÜÊNCIA $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ CONVERGE PARA p EM ORDEM α, COM ERRO ASSINTÓTICO CONSTANTE DE λ.

* OBSERVAÇÕES: i) DIZ-SE QUE UM MÉTODO ITERATIVO DA FORMA $p_n = g(p_{n-1})$ TEM ORDEM α SE A SEQÜÊNCIA $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ CONVERGE PARA A SOLUÇÃO $p = g(p)$ EM ORDEM α.

ii) EM GERAL, UMA SEQÜÊNCIA COM ORDEM DE CONVERGÊNCIA MAIOR CONVERGE MAIS RAPIDAMENTE QUE OUTRA COM ORDEM MENOR.

CASOS ESPECIAIS: A) SE $\alpha = 1$, A SEQÜÊNCIA É LINEARMENTE CONVERGENTE

B) SE $\alpha = 2$, A SEQÜÊNCIA É QUADRATICAMENTE CONVERGENTE

iii) A CONSTANTE ASSINTÓTICA λ AFETA A VELOCIDADE DE CONVERGÊNCIA DE MODO MENOS SIGNIFICATIVO QUE A ORDEM DE CONVERGÊNCIA.

- EM GERAL, OS MÉTODOS DE PONTO FIXO GERAM APENAS SEQUÊNCIAS LINEARMENTE CONVERGENTES, CONFORME O TEOREMA ABAIXO:

* TEOREMA:

SEJA $g \in C[a,b]$, TAL QUE $g(x) \in [a,b]$, $\forall x \in [a,b]$.
SUPONHA QUE g' SEJA CONTÍNUA EM (a,b) E QUE EXISTA UMA CONSTANTE POSITIVA $k < 1$ TAL QUE

$$|g'(x)| \leq k, \quad \forall x \in (a,b)$$

SE $g'(p) \neq 0$, ENTÃO, DADO QUALQUER NÚMERO p_0 EM $[a,b]$, A SEQUÊNCIA

$$p_n = g(p_{n-1}), \quad n \geq 1,$$

CONVERGE APENAS LINEARMENTE PARA O ÚNICO PONTO FIXO p EM $[a,b]$.

- CONDIÇÕES ADICIONAIS QUE ASSEGURAM CONVERGÊNCIA QUADRÁTICA:

* TEOREMA:

SEJA p UMA SOLUÇÃO DE $x = g(x)$, E SUPONHAMOS QUE $g'(p) = 0$ E QUE g'' SEJA CONTÍNUA E RIGOROSAMENTE DELIMITADA POR M EM UM INTERVALO ABERTO CONTENDO p.

ENTÃO, EXISTE UM $\delta > 0$ TAL QUE, PARA $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$, A SEQUÊNCIA DEFINIDA POR

$$p_n = g(p_{n-1}), \quad n \geq 1,$$

CONVERGE NO MÍNIMO DE FORMA QUADRÁTICA PARA p.

ADEMAIS, PARA n SUFICIENTEMENTE GRANDE

$$|p_{n+1} - p| < \frac{M}{2} |p_n - p|^2$$

- REAPRESENTAÇÃO DO MÉTODO DE NEWTON COMO UMA ITERAÇÃO FUNCIONAL

* PELOS TEOREMAS ANTERIORES, PARA OBTER MÉTODOS DE PONTO FIXO QUADRATICAMENTE CONVERGENTES, DEVEMOS BUSCAR FUNÇÕES $g(x)$ CUJA DERIVADA SE ANULE NO PONTO FIXO: $g'(p)=0$

* UM MEIO IMEDIATO PARA OBTER A FUNÇÃO DE PONTO FIXO, $g(x)$, ASSOCIADA AO PROBLEMA DE RAÍZES $f(x)=0$, É SUBTRAIR DE x UM MÚLTIPLO DE $f(x)$

$$e.g., \quad g(x) = x - \phi(x) f(x)$$

ONDE $\phi(x)$ É UMA FUNÇÃO DIFERENCIÁVEL, A SER ESCOLHIDA

* PARA OBTER UM PROCEDIMENTO QUADRATICAMENTE CONVERGENTE

$$p_n = g(p_{n-1}), \quad n \geq 1$$

DEVEMOS TER

$$g'(p)=0, \text{ QUANDO } f(p)=0$$

COMO $g'(x) = 1 - \phi'(x) f(x) - f'(x)\phi(x)$

TEMOS $g'(p) = 1 - \phi'(p) f(p) - f'(p)\phi(p)$

$$= 1 - f'(p)\phi(p)$$

ASSIM,

$$g'(p)=0 \text{ SE E SÓ SE } \phi(p) = \frac{1}{f'(p)} \therefore \phi(x) = \frac{1}{f'(x)}$$

* ESCOLHENDO $\phi(x) = 1/f'(x)$, OBTEMOS O PROCEDIMENTO DE CONVERGÊNCIA QUADRÁTICA

$$p_n = g(p_{n-1}) = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, \quad n \geq 1$$

QUE É EXATAMENTE O MÉTODO DE NEWTON.

OBSERVAÇÃO: NA ABORDAGEM ACIMA, DEVEMOS TER $f'(p) \neq 0$, ONDE p É O PONTO FIXO.

QUANDO $f'(p) = 0$, A APLICAÇÃO DO MÉTODO DE NEWTON OU DA SECANTE CAUSA PROBLEMAS.

A CONDIÇÃO $f'(p) \neq 0$ ESTÁ LIGADA À EXISTÊNCIA DE ZEROS SIMPLES EM $f(x)$.

* DEFINIÇÃO: MULTIPLICIDADE DOS ZEROS

UMA SOLUÇÃO p PARA $f(x)=0$ É UM ZERO DE f COM MULTIPLICIDADE m SE, PARA $x \neq p$, PUDERMOS ESCREVER

$$f(x) = (x-p)^m q(x)$$

ONDE

$$\lim_{x \to p} q(x) \neq 0$$

i.e., $q(x)$ REPRESENTA A PORÇÃO DE $f(x)$ QUE NÃO CONTRIBUI PARA O ZERO EM p.

QUANDO $m=1$: ZERO SIMPLES

* TEOREMA: A FUNÇÃO $f \in C^1[a,b]$ TEM UM ZERO SIMPLES p NO INTERVALO (a,b) SE E SÓ SE $f(p)=0$, MAS $f'(p) \neq 0$.

- GENERALIZAÇÃO:

A FUNÇÃO $f \in C^m[a,b]$ TEM UM ZERO DE MULTIPLICIDADE m EM p NO INTERVALO (a,b) SE E SÓ SE

$$f(p) = f'(p) = f''(p) = \dots = f^{(m-1)}(p) = 0$$

MAS

$$f^{(m)}(p) \neq 0$$

OBSERVAÇÃO: OS RESULTADOS ACIMA IMPLICAM NA EXISTÊNCIA DE UM INTERVALO CENTRADO EM p ONDE O MÉTODO DE NEWTON CONVERGE QUADRATICAMENTE PARA p, QUALQUER QUE SEJA A APROXIMAÇÃO INICIAL p_0, DESDE QUE p SEJA UM ZERO SIMPLES.

QUANDO O ZERO NÃO É SIMPLES, A CONVERGÊNCIA QUADRÁTICA PODE NÃO OCORRER.

NESTES CASOS, PODE-SE EMPREGAR UMA MODIFICAÇÃO DO MÉTODO DE NEWTON.

- **MÉTODO DE NEWTON PARA RAÍZES MÚLTIPLAS:**

DEFINIMOS

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$\Rightarrow$ SE p É UM ZERO DE MULTIPLICIDADE m, PODEMOS ESCREVER $f(x) = (x-p)^m q(x)$, E ENTÃO

$$\mu(x) = \frac{(x-p)^m q(x)}{m(x-p)^{m-1} q(x) + (x-p)^m q'(x)} =$$

$$= (x-p) \frac{q(x)}{m q(x) + (x-p) q'(x)}$$

$\Rightarrow \mu(x)$ TEM UM ZERO EM p QUE É SIMPLES, PORQUE

$$\frac{q(p)}{m q(p) + (p-p) q'(p)} = \frac{1}{m} \neq 0$$

$\Rightarrow$ O MÉTODO DE NEWTON PODE SER APLICADO A $\mu(x)$, PARA SE OBTER

$$g(x) = x - \frac{\mu(x)}{\mu'(x)} = x - \frac{f(x) f'(x)}{[f'(x)]^2 - f(x) f''(x)}$$

* OBSERVAÇÃO: INCONVENIENTES DO MÉTODO

i) CÁLCULO ADICIONAL DE $f''(x)$

ii) PROBLEMAS DE ARREDONDAMENTO DEVIDO AO DENOMINADOR

iii) COMPUTAÇÃO MAIS TRABALHOSA