ANÁLISE NUMÉRICA

III. RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

1. SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES:

- SISTEMA COM m EQUAÇÕES E n VARIÁVEIS

$$E_1: a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$E_2: a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots$$

$$E_m: a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

ONDE a_{ij} : COEFICIENTES (CONSTANTES)

$1 \leq i \leq m, \; 1 \leq j \leq n$

x_j : VARIÁVEIS (INCÓGNITAS)

$1 \leq j \leq n$

b_i : CONSTANTES

$1 \leq i \leq m$

- RESOLUÇÃO DO SISTEMA

$\Rightarrow$ ENCONTRAR OS VALORES DE x_j, CASO EXISTAM, QUE SATISFAÇAM AS m EQUAÇÕES SIMULTANEAMENTE

* POSSIBILIDADES: i) UMA ÚNICA SOLUÇÃO

ii) INFINITAS SOLUÇÕES

iii) NENHUMA SOLUÇÃO

EXEMPLOS:

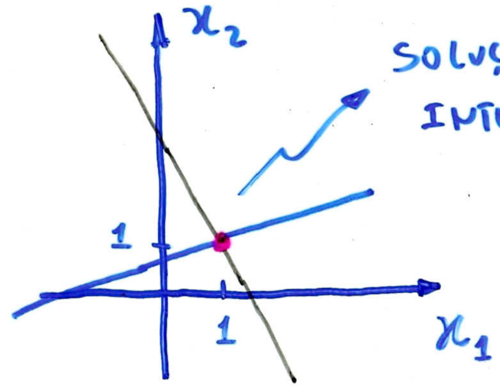
* SISTEMA 1: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -2 \end{cases}$

GRAFICAMENTE: $x_2 = -2x_1 + 3$

$\Rightarrow$ RETA DE COEF. LINEAR 3
E COEF. ANGULAR -2

$x_2 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}$

$\Rightarrow$ RETA DE COEF. LINEAR $2/3$
E COEF. ANGULAR $1/3$



* SISTEMA 2: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 = 6 \end{cases}$

$\Rightarrow$ RETAS COINCIDENTES: MESMOS COEFS. LINEAR
E ANGULAR

$\Rightarrow$ INFINITAS SOLUÇÕES

* SISTEMA 3: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ RETAS PARALELAS: MESMOS COEFS. ANGULARES

$\Rightarrow$ NENHUMA SOLUÇÃO

- NOTAÇÃO MATRICIAL

* DEFINIÇÃO: UMA MATRIZ $m \times n$ É UM ARRANJO RETANGULAR DE ELEMENTOS COM m LINHAS E n COLUNAS NO QUAL SE REPRESENTA O VALOR DE CADA ELEMENTO E TAMBÉM A SUA POSIÇÃO NO ARRANJO.

UM SISTEMA LINEAR PODE SER REPRESENTADO, USANDO MATRIZES, COMO

$$A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$$

ONDE

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \equiv \text{MATRIZ DOS COEFICIENTES } (m \times n)$$

$$\underset{\sim}{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \equiv \text{VETOR DAS VARIÁVEIS } (n \times 1)$$

$$\underset{\sim}{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \equiv \text{VETOR DAS CONSTANTES } (m \times 1)$$

OBSERVAÇÕES:

i) Uma matriz $m \times n$ (notação $A: m \times n$) pode ser vista como uma função que, a cada vetor $\underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^n$, associa um vetor $\underset{\sim}{b} \in \mathbb{R}^m$, onde $\underset{\sim}{b} = A\underset{\sim}{x}$.

ii) Então, resolver o sistema linear $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ consiste em, dado $\underset{\sim}{b} \in \mathbb{R}^m$, obter, caso exista, $\underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$.

iii) Uma solução do sistema $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ só existe se o vetor $\underset{\sim}{b}$ pertence à imagem da matriz A.

* DEFINIÇÃO: IMAGEM DE UMA MATRIZ

Dada uma matriz $A: m \times n$, o conjunto imagem de A é definido por

$$\mathrm{Im}(A) = \left\{ \underset{\sim}{y} \in \mathbb{R}^m : \exists\, \underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^n : A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y} \right\}$$

iv) Alternativamente, resolver o sist. linear $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$, com $A: m \times n$, equivale a obter os escalares $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que permitem expressar o vetor $\underset{\sim}{b} \in \mathbb{R}^m$ como uma combinação linear das colunas de A:

$$\underset{\sim}{b} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ as colunas de A devem formar uma base para o $\mathbb{R}^m$

e.g., no sistema 1: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -2 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ os vetores coluna $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

são linearmente independentes, e portanto formam uma base para o $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ o vetor $\underset{\sim}{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ pode ser expresso como a combinação linear

$$1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $x_1 = x_2 = 1$ é a solução do sistema

V) A existência de solução para um sistema linear $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ está relacionada ao posto da matriz A

* Definição: Posto de uma matriz

O posto de uma matriz é a dimensão do seu conjunto imagem

$$\text{Posto}(A) = \dim(\text{Im}(A))$$

O posto de uma matriz $A: m \times n$ satisfaz

$$\text{Posto}(A) \leq \min\{m, n\}$$

Se $\text{Posto}(A) = \min\{m,n\}$, A é posto-completo

Se $\text{Posto}(A) < \min\{m,n\}$, A é posto-deficiente

- RELAÇÃO ENTRE O POSTO DE A E A EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA $\underset{\sim}{A x} = \underset{\sim}{b}$

* QUANDO $m = n$:

- SE A É POSTO-COMPLETO (POSTO(A) = n)

$\Rightarrow$ SISTEMA COMPATÍVEL DETERMINADO

i.e., UMA ÚNICA SOLUÇÃO

- SE A É POSTO-DEFICIENTE (POSTO(A) < n)

$\Rightarrow$ SE $\underset{\sim}{b} \in Im(A)$: SISTEMA COMPATÍVEL INDETERMINADO

i.e., INFINITAS SOLUÇÕES

$\Rightarrow$ SE $\underset{\sim}{b} \notin Im(A)$: SISTEMA INCOMPATÍVEL

i.e., NENHUMA SOLUÇÃO

QUADRO GERAL

A		$m = n$	$m < n$	$m > n$
POSTO COMPLETO		UMA SOLUÇÃO	INFINITAS SOLUÇÕES	$\underset{\sim}{b} \in Im(A)$: UMA SOLUÇÃO $\underset{\sim}{b} \notin Im(A)$: INCOMPATÍVEL
POSTO DEFICIENTE	$\underset{\sim}{b} \in Im(A)$	INFINITAS SOLUÇÕES	INFINITAS SOLUÇÕES	INFINITAS SOLUÇÕES
	$\underset{\sim}{b} \notin Im(A)$	INCOMPATÍVEL	INCOMPATÍVEL	INCOMPATÍVEL

- RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES $n \times n$

i) **MÉTODOS DIRETOS**

⇒ LEVAM A UMA SOLUÇÃO EXATA, A MENOS DE ERROS DE ARREDONDAMENTO, EM UM NÚMERO FINITO DE PASSOS.

ii) **MÉTODOS ITERATIVOS**

⇒ GERAM UMA SEQÜÊNCIA DE VALORES, A PARTIR DE UMA APROXIMAÇÃO INICIAL, QUE CONVERGE, SOB CERTAS CONDIÇÕES, PARA A SOLUÇÃO EXATA, CASO EXISTA.

2. MÉTODOS DIRETOS

DADO O SISTEMA LINEAR $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$, A SUA SOLUÇÃO É FORMALMENTE EXPRESSA COMO

$$\underset{\sim}{x} = A^{-1}\underset{\sim}{b}$$

NO ENTANTO, CALCULAR EXPLICITAMENTE A MATRIZ INVERSA A^{-1}, E EM SEGUIDA EFETUAR O SEU PRODUTO COM $\underset{\sim}{b}$ NÃO É ACONSELHÁVEL, UMA VEZ QUE O NÚMERO DE OPERAÇÕES ENVOLVIDAS É GRANDE.

2.1 MÉTODO DA ELIMINAÇÃO DE GAUSS COM SUBSTITUIÇÃO RETROATIVA:

$\Rightarrow$ TRANSFORMA O SISTEMA ORIGINAL NUM SISTEMA EQUIVALENTE COM MATRIZ DOS COEFICIENTES TRIANGULAR SUPERIOR, POIS ESTE É DE RESOLUÇÃO IMEDIATA

OBSERVAÇÕES:

i) DOIS SISTEMAS LINEARES SÃO EQUIVALENTES QUANDO POSSUEM A MESMA SOLUÇÃO

ii) UM DADO SISTEMA LINEAR PODE SER TRANSFORMADO NUM OUTRO EQUIVALENTE POR MEIO DE UMA SÉRIE DE OPERAÇÕES CHAMADAS OPERAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA

* TEOREMA: OPERAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA

AS SEGUINTES OPERAÇÕES PODEM SER EFETUADAS SOBRE UM SISTEMA LINEAR, SEM ALTERAR A SUA SOLUÇÃO:

1. A i-ÉSIMA EQUAÇÃO, E_i, PODE SER MULTIPLICADA POR QUALQUER CONSTANTE λ DIFERENTE DE ZERO

$$(\lambda E_i) \rightarrow (E_i)$$

2. A EQUAÇÃO E_j PODE SER MULTIPLICADA POR QUALQUER CONSTANTE λ E ADICIONADA À EQUAÇÃO E_i

$$(E_i + \lambda E_j) \rightarrow (E_i)$$

3. AS EQUAÇÕES E_i E E_j PODEM SER TRANSPOSTAS EM ORDEM

$$(E_i) \leftrightarrow (E_j)$$

- DESCRIÇÃO DA ELIMINAÇÃO DE GAUSS

CONSIDEREMOS O SISTEMA LINEAR

$$
\begin{aligned}
E_1 &: a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
E_2 &: a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
E_n &: a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n
\end{aligned}
$$

PODEMOS REPRESENTAR ESTE SISTEMA PELA MATRIZ EXPANDIDA $n \times n+1$

$$
A^{(0)} = [A, \underset{\sim}{b}] = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & \vdots & a_{1,n+1} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & \vdots & a_{2,n+1} \\
\vdots & & \vdots & & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & \vdots & a_{n,n+1}
\end{pmatrix}
$$

ONDE AS ENTRADAS NA $(n+1)$-ÉSIMA COLUNA SÃO OS VALORES DE $\underset{\sim}{b}$, i.e.,

$$a_{i,n+1} = b_i, \quad \forall\, i = 1, 2, \dots, n$$

* ETAPA 1:

EFETUAMOS AS OPERAÇÕES

$$\left(E_i - \left(\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right) E_1\right) \to (E_i)$$

PARA CADA LINHA,

$$i = 2, 3, \dots, n$$

ISTO ELIMINA O COEFICIENTE DE x_1 EM CADA UMA DESSAS LINHAS, E OBTEMOS A MATRIZ

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & \vdots & a_{1,n+1}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & \vdots & a_{2,n+1}^{(1)} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

OBSERVAÇÃO: ESTAMOS ASSUMINDO QUE O TERMO a_{11} É NÃO-NULO: $a_{11} \neq 0$

SEMPRE QUE $\det(A) \neq 0$ É POSSÍVEL REESCREVER O SISTEMA LINEAR DE FORMA QUE O ELEMENTO NA POSIÇÃO $i=1, j=1$ SEJA DIFERENTE DE ZERO, USANDO-SE PARA ISTO APENAS A OPERAÇÃO $(E_i) \longleftrightarrow (E_j)$

AS ENTRADAS NA MATRIZ $A^{(1)}$ SÃO ENTÃO OBTIDAS COMO

$$a_{1j}^{(1)} = a_{1j}, \quad j = 1, \ldots, n+1$$

$\Rightarrow$ A PRIMEIRA LINHA NÃO MUDA

E $$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \left(\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right) a_{1j}, \quad \begin{matrix} i = 2, \ldots, n \\ j = 1, \ldots, n+1 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ AS DEMAIS LINHAS MUDAM

OBS.: O TERMO a_{11} É CHAMADO O PIVÔ DA PRIMEIRA ETAPA

* ETAPA 2:

REPETIMOS OS PROCEDIMENTOS DA ETAPA 1, AGORA PARA A MATRIZ $A^{(1)}$;

SEMPRE É POSSÍVEL REESCREVER A MATRIZ $A^{(1)}$, DE MODO QUE O NOVO PIVÔ, $a_{22}^{(1)}$ SEJA NÃO-NULO, SEM ALTERAR A POSIÇÃO DA PRIMEIRA LINHA.

ASSIM, ASSUMINDO $a_{22}^{(1)} \neq 0$, EFETUAMOS AS OPERAÇÕES

$$\left(E_i - \left(\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\right)E_2\right) \longrightarrow (E_i)$$

PARA CADA LINHA

$$i = 3, 4, \dots, n$$

ISTO ELIMINA O COEFICIENTE DE x_2 EM CADA UMA DESSAS LINHAS, E OBTEMOS A MATRIZ

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \cdots & a_{1n}^{(2)} & : & a_{1,n+1}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & : & a_{2,n+1}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & : & a_{3,n+1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & : & a_{n,n+1}^{(2)} \end{pmatrix}$$

ONDE $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)}$, PARA $i = 1, 2$ E $j = i, i+1, \dots, n+1$

$\Rightarrow$ AS DUAS PRIMEIRAS LINHAS NÃO MUDAM

E $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \left(\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}\right) a_{2j}^{(1)}$, $\quad i = 3, \dots, n$
$\quad j = 2, \dots, n+1$

* DEMAIS ETAPAS:

PROCEDE-SE COMO ACIMA, EXECUTANDO A OPERAÇÃO

$$\left(E_i - \left(\frac{a_{ij}^{(j-1)}}{a_{jj}^{(j-1)}}\right) E_j\right) \longrightarrow (E_i)$$

PARA CADA LINHA

$$i = j+1, j+2, \ldots, n$$

ADMITINDO-SE QUE $a_{jj}^{(j-1)} \neq 0$, ATÉ A ETAPA $(n-1)$.

AO FINAL DESTA, TEREMOS A MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR

$$A^{(n-1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & a_{13}^{(n-1)} & \cdots & a_{1n}^{(n-1)} & \vdots & a_{1,n+1}^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(n-1)} & a_{23}^{(n-1)} & \cdots & a_{2n}^{(n-1)} & \vdots & a_{2,n+1}^{(n-1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(n-1)} & \cdots & a_{3n}^{(n-1)} & \vdots & a_{3,n+1}^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n-1)} & \vdots & a_{n,n+1}^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

CUJA SOLUÇÃO PODE SER FACILMENTE OBTIDA, CONFORME VEREMOS A SEGUIR.

- RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA TRIANGULAR SUPERIOR:

* O SISTEMA LINEAR REPRESENTADO PELA MATRIZ $A^{(n-1)}$ TEM A FORMA

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= a_{1,n+1} \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= a_{2,n+1} \\ \ddots \qquad \vdots \qquad & \quad \vdots \\ a_{nn}x_n &= a_{n,n+1} \end{aligned}$$

* RESOLVENDO A n-ÉSIMA EQUAÇÃO PARA x_n:

$$x_n = \frac{a_{n,n+1}}{a_{nn}}$$

* RESOLVENDO A $(n-1)$-ÉSIMA EQUAÇÃO PARA x_{n-1}:

$$x_{n-1} = \frac{a_{n-1,n+1} - a_{n-1,n}x_n}{a_{n-1,n-1}}$$

ONDE x_n É DADO PELA EXPRESSÃO ANTERIOR

* CONTINUANDO O PROCESSO, OBTEMOS, NO CASO GERAL,

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left[a_{i,n+1} - a_{i,n}x_n - a_{i,n-1}x_{n-1} - \dots - a_{i,i+1}x_{i+1}\right]$$

$$= \frac{1}{a_{ii}}\left[a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right] \quad , i = 1, 2, \dots, n$$

* ALGORITMO: ELIMINAÇÃO DE GAUSS COM SUBSTITUIÇÃO RETROATIVA

OBJETIVO: RESOLVER O SISTEMA LINEAR $n \times n$

ENTRADA NÚMERO DE INCÓGNITAS E EQUAÇÕES, n
MATRIZ EXPANDIDA $A = (a_{ij})$, ONDE $1 \leq i \leq n$
E $1 \leq j \leq n+1$

SAÍDA SOLUÇÃO $x_1, x_2, \dots, x_n$ OU MENSAGEM DE QUE
O SISTEMA NÃO TEM SOLUÇÃO ÚNICA.

PASSO 1 PARA $j = 1, \dots, n-1$ SIGA OS PASSOS 2-4 (ELIMINAÇÃO)
PASSO 2 SEJA p O MENOR INTEIRO COM $j \leq p \leq n$
E $a_{pj} \neq 0$
SE NENHUM p PODE SER ENCONTRADO
ENTÃO SAÍDA ('NÃO EXISTE SOLUÇÃO ÚNICA');
PARE.
PASSO 3 SE $p \neq j$ ENTÃO EXECUTE $(E_p) \leftrightarrow (E_j)$
PASSO 4 PARA $i = j+1, \dots, n$ SIGA OS PASSOS 5 E 6
PASSO 5 FAÇA $m_{ij} = a_{ij}/a_{jj}$
PASSO 6 EXECUTE $(E_i - m_{ij}E_j) \rightarrow (E_i)$
PASSO 7 SE $a_{nn} = 0$ ENTÃO SAÍDA ('NÃO EXISTE SOLUÇÃO ÚNICA');
PARE.

(CONTINUA)

PASSO 8 FAÇA $x_n = a_{n,n+1} / a_{nn}$. (INÍCIO DA SUBSTITUIÇÃO)

PASSO 9 PARA $i = n-1, \ldots, 1$

FAÇA $x_i = \left[a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j \right] / a_{ii}$.

PASSO 10 SAÍDA $(x_1, \ldots, x_n)$; (SUCESSO)

PARE.

2.2 ESTRATÉGIAS DE PIVOTEAMENTO

O MÉTODO DA ELIMINAÇÃO DE GAUSS REQUER O CÁLCULO DOS MULTIPLICADORES

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \quad , \quad i = k+1, \dots, n$$

EM CADA ETAPA k DO PROCESSO.

2.2 ESTRATÉGIAS DE PIVOTEAMENTO

O MÉTODO DA ELIMINAÇÃO DE GAUSS REQUER O CÁLCULO DOS MULTIPLICADORES

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \quad , \quad i = k+1, \ldots, n$$

EM CADA ETAPA k DO PROCESSO.

* QUANDO O PIVÔ $a_{kk}^{(k-1)}$ É NULO, PODE-SE TENTAR UMA MUDANÇA DE LINHA

$$(E_k) \longleftrightarrow (E_p)$$

ONDE p É O MENOR INTEIRO MAIOR DO QUE k COM

$$a_{pk}^{(k-1)} \neq 0$$

* SE ISTO NÃO É POSSÍVEL, O SISTEMA LINEAR NÃO TEM SOLUÇÃO ÚNICA (i.e., PODE TER INFINITAS SOLUÇÕES OU NENHUMA SOLUÇÃO).

* QUANDO OS PIVÔS NÃO SÃO NULOS, MAS SÃO MUITO PEQUENOS

$$\text{i.e.,} \quad a_{kk}^{(k-1)} \ll a_{ik}^{(k-1)} \quad i = k+1, \ldots, n$$

É NECESSÁRIO EFETUAR MUDANÇAS DE LINHAS, PARA REDUZIR ERROS DE ARREDONDAMENTO

$\Rightarrow$ ESTRATÉGIAS DE PIVOTEAMENTO, PARA ESCOLHER A LINHA E/OU COLUNA PIVOTAL

- ESTRATÉGIA DE PIVOTEAMENTO PARCIAL

CONSISTE EM:

i) NO INÍCIO DA ETAPA k DA FASE DE ELIMINAÇÃO, ESCOLHER PARA PIVÔ O ELEMENTO DE MAIOR MÓDULO ENTRE OS COEFICIENTES

$$a_{ik}^{(k-1)} \quad , \quad i = k, k+1, \ldots, n$$

ii) TROCAR AS LINHAS k E i,

$$(E_k) \longleftrightarrow (E_i)$$

SE NECESSÁRIO

$\Rightarrow$ ISTO FAZ COM QUE OS MULTIPLICADORES, EM MÓDULO, ESTEJAM ENTRE 0 E 1.

$\Rightarrow$ EVITA A AMPLIAÇÃO DOS ERROS DE ARREDONDAMENTO

OBSERVAÇÃO: NESTE CASO, NENHUMA TROCA DE COLUNAS É EXECUTADA.

* **ALGORITMO**: ELIMINAÇÃO DE GAUSS COM PIVOTEAMENTO PARCIAL

OBJETIVO: RESOLVER O SISTEMA LINEAR $n \times n$

ENTRADA NÚMERO DE INCÓGNITAS E EQUAÇÕES, n

MATRIZ EXPANDIDA $A=(a_{ij})$, ONDE $1 \leq i \leq n$ E $1 \leq j \leq n+1$.

SAÍDA SOLUÇÃO $x_1, \ldots, x_n$ OU MENSAGEM DE QUE O SISTEMA NÃO TEM SOLUÇÃO ÚNICA

Passo 1 Para $i=1,\ldots,n$ Faça $NROW(i)=i$ (INICIALIZA O INDICADOR DE LINHA)

Passo 2 Para $i=1,\ldots,n-1$ Siga os Passos 3-6. (ELIMINAÇÃO)

Passo 3 Seja p um inteiro com $i \leq p \leq n$ e

$$|a(NROW(p),i)| = \max_{i \leq j \leq n} |a(NROW(j),i)|$$

Passo 4 Se $a(NROW(p),i)=0$ então

Saída('Não existe solução única');

Pare.

Passo 5 Se $NROW(i) \neq NROW(p)$ então

Faça $NCOPY = NROW(i)$; (INTERCÂMBIO DE LINHAS)

$NROW(i) = NROW(p)$;

$NROW(p) = NCOPY$

Passo 6 Para $j=i+1,\ldots,n$ Siga os Passos 7 e 8

Passo 7 Faça $m(NROW(j),i) = \dfrac{a(NROW(j),i)}{a(NROW(i),i)}$.

Passo 8 Execute

$(E_{NROW(j)} - m(NROW(j),i) \cdot E_{NROW(i)}) \rightarrow (E_{NROW(j)})$

(CONTINUA)

PASSO 9 SE $a(NROW(n),n)=0$ ENTÃO

SAÍDA('NÃO EXISTE SOLUÇÃO ÚNICA');

PARE.

PASSO 10 FAÇA $x_n = a(NROW(n),n+1)/a(NROW(n),n)$

(SUBSTITUIÇÃO RETROATIVA)

PASSO 11 PARA $i = n-1, \ldots, 1$ FAÇA

$$x_i = \frac{\left[a(NROW(i),n+1) - \sum_{j=i+1}^{n} a(NROW(i),j)\, x_j\right]}{a(NROW(i),i)}$$

PASSO 12 SAÍDA $(x_1, \ldots, x_n)$

PARE.

- ESTRATÉGIA DE PIVOTEAMENTO PARCIAL ESCALONADO

⇒ COLOCA NA POSIÇÃO PIVÔ O ELEMENTO QUE É O MAIOR RELATIVAMENTE ÀS ENTRADAS EM SUA LINHA.

DESCRIÇÃO DO PROCESSO:

1º PASSO: DETERMINAÇÃO DO FATOR DE ESCALONAMENTO PARA CADA LINHA:

$$S_i = \max_{1 \le j \le n} |a_{ij}|, \quad \text{PARA } 1 \le i \le n$$

SE $S_i = 0$, O SISTEMA NÃO TEM SOLUÇÃO ÚNICA. ASSUMIREMOS $S_i \neq 0$.

2º PASSO: O INTERCÂMBIO DE LINHAS NO PROCESSO DE ELIMINAÇÃO DA PRIMEIRA COLUNA É DETERMINADO PELA ESCOLHA DO MENOR INTEIRO p PARA O QUAL

$$\frac{|a_{p1}|}{S_p} = \max_{1 \le k \le n} \frac{|a_{k1}|}{S_k}$$

EXECUTANDO-SE A TROCA $(E_1) \leftrightarrow (E_p)$, SE $p \neq 1$

3º PASSO: O INTERCÂMBIO DE LINHAS PARA ELIMINAÇÃO DA i-ÉSIMA COLUNA É SIMILARMENTE FEITO SELECIONANDO-SE O MENOR INTEIRO $p \geq i$ TAL QUE

$$\frac{|a_{pi}|}{S_p} = \max_{i \le k \le n} \frac{|a_{ki}|}{S_k}$$

E EXECUTANDO-SE A TROCA $(E_i) \leftrightarrow (E_p)$, SE $i \neq p$.

OBSERVAÇÕES:

i) O ESCALONAMENTO ASSEGURA QUE O MAIOR ELEMENTO EM CADA LINHA TENHA UMA MAGNITUDE RELATIVA DE 1, ANTES QUE A COMPARAÇÃO PARA A TROCA DE LINHAS SEJA EFETUADA.

ii) OS FATORES DE ESCALONAMENTO $S_1, \dots, S_n$ SÃO CALCULADOS UMA ÚNICA VEZ, NO INÍCIO DO PROCESSO, E DEVEM TAMBÉM SER INTERCAMBIADOS QUANDO AS MUDANÇAS DE LINHAS SÃO EXECUTADAS.

iii) O PIVOTEAMENTO PARCIAL ESCALONADO NÃO ACRESCENTA TEMPO SIGNIFICATIVO AO MÉTODO DA ELIMINAÇÃO DE GAUSS.

iv) NO ALGORITMO DA ELIMINAÇÃO DE GAUSS COM PIVOTEAMENTO PARCIAL ESCALONADO, OS ÚNICOS PASSOS QUE DIFEREM NO ALGORITMO ANTERIOR SÃO:

PASSO 1 PARA $i=1,\dots,n$ FAÇA $S_i = \max\limits_{1 \le j \le n} |a_{ij}|$

SE $S_i = 0$ ENTÃO SAÍDA ('NÃO EXISTE SOL. ÚNICA'); PARE.

FAÇA $NROW(i) = i$

PASSO 2 PARA $i=1,\dots,n-1$ SIGA OS PASSOS 3-6 (ELIMINAÇÃO)

PASSO 3 SEJA p O MENOR INTEIRO COM $i \le p \le n$ E

$$\frac{|a(NROW(p), i)|}{S(NROW(p))} = \max_{i \le j \le n} \frac{|a(NROW(j), i)|}{S(NROW(j))}$$

- ESTRATÉGIA DE PIVOTEAMENTO COMPLETO OU MÁXIMO

⇒ NO k-ÉSIMO PASSO, COMPARA TODAS AS ENTRADAS

$$a_{ij}, \text{ PARA } i = k, k+1, \ldots, n$$
$$\text{E } j = k, k+1, \ldots, n$$

PARA OBTER A ENTRADA COM A MAIOR MAGNITUDE.

⇒ AMBAS AS MUDANÇAS, DE LINHA E DE COLUNA, SÃO EXECUTADAS PARA TRAZER ESTA ENTRADA PARA A POSIÇÃO DE PIVÔ.

OBSERVAÇÃO: ESTA TÉCNICA SÓ É RECOMENDADA QUANDO A PRECISÃO É ESSENCIAL, DE MODO A JUSTIFICAR O MAIOR ESFORÇO COMPUTACIONAL REQUERIDO.