2.3 FATORAÇÃO LU

* FATORAÇÃO DE UMA MATRIZ

$\Rightarrow$ DECOMPÔ-LA EM UM PRODUTO DE DOIS OU MAIS FATORES

e.g., DADA A MATRIZ A, PROCURAMOS ESCREVÊ-LA COMO O PRODUTO DE DUAS OUTRAS MATRIZES, C E D:

$$A = CD$$

NESTE CASO, RESOLVER O SISTEMA LINEAR

$$A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$$

EQUIVALE A RESOLVER DOIS OUTROS SISTEMAS EM SEQÜÊNCIA, i.e.,

$$A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b} \Rightarrow CD\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$$

CHAMANDO $\underset{\sim}{y} = D\underset{\sim}{x}$

OBTEMOS $C\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{b}$

$$\therefore A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b} \Leftrightarrow \begin{cases} C\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{b} & (i) \\ D\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y} & (ii) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ RESOLVEMOS (i) PARA $\underset{\sim}{y}$ E EM SEGUIDA RESOLVEMOS (ii) PARA $\underset{\sim}{x}$

3.25

OBSERVAÇÃO: i) OBVIAMENTE, O PROCESSO DE FATORAÇÃO SÓ É VANTAJOSO QUANDO OS SISTEMAS LINEARES RESULTANTES SÃO DE FÁCIL RESOLUÇÃO.

ESTE É O CASO QUANDO A MATRIZ A ADMITE UMA FATORAÇÃO DO TIPO

$$A = LU$$

ONDE

L ≡ MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR COM DIAGONAL UNITÁRIA

U ≡ MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR

ii) UMA VEZ QUE A FATORAÇÃO DE UMA MATRIZ A SEJA FEITA, A RESOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR

$$A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$$

PARA QUALQUER VETOR $\underset{\sim}{b}$ PODE SER OBTIDA DE FORMA BASTANTE EFICIENTE.

iii) A DETERMINAÇÃO DOS FATORES L E U PODE SER FEITA SEGUINDO-SE OS PASSOS DO MÉTODO DE ELIMINAÇÃO DE GAUSS, CONFORME O TEOREMA A SEGUIR.

* TEOREMA:

SE A ELIMINAÇÃO DE GAUSS PODE SER EFETUADA NO SISTEMA LINEAR $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$, SEM INTERCÂMBIO DE LINHAS, ENTÃO A MATRIZ A PODE SER FATORADA DA FORMA

$$A = LU$$

ONDE

$$U = \begin{bmatrix} a_{11}^{(n-1)} & a_{12}^{(n-1)} & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(n-1)} \\ 0 & a_{22}^{(n-1)} & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n}^{(n-1)} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

(TRIANGULAR SUPERIOR)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ m_{21} & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ m_{n1} & \cdots & \cdots & m_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix}$$

(TRIANGULAR INFERIOR, COM DIAGONAL UNITÁRIA)

COM $m_{ij} = a_{ij}^{(j-1)} / a_{jj}^{(j-1)}$

OBSERVAÇÃO: A MATRIZ U É A MESMA MATRIZ OBTIDA NO FINAL DO MÉTODO DA ELIMINAÇÃO DE GAUSS.

- EXEMPLO TEÓRICO DE DIMENSÃO $n=3$:

$$E_1: a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$E_2: a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$E_3: a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

* TRABALHAREMOS APENAS COM A MATRIZ DOS COEFICIENTES.

ASSIM,

$$A^{(0)} \equiv A = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} \end{bmatrix}$$

ONDE $a_{ij}^{(0)} = a_{ij}$

* ETAPA 1: OS MULTIPLICADORES SÃO

$$m_{21} = \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} \quad \text{E} \quad m_{31} = \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}$$

SUPONDO $a_{11}^{(0)} \neq 0$.

$\Rightarrow$ PARA ELIMINAR A VARIÁVEL x_1 DAS LINHAS $i=2,3$ EFETUAMOS AS OPERAÇÕES

$$(E_i - m_{i1}E_1) \longrightarrow (E_i)$$

$i=2,3$

* ISTO EQUIVALE A MULTIPLICAR A MATRIZ $A^{(0)}$ PELA MATRIZ 3.28

$$M^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pois

$$M^{(0)}A^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & a_{23}^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} & a_{32}^{(0)} & a_{33}^{(0)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)} - m_{21}a_{11}^{(0)} & a_{22}^{(0)} - m_{21}a_{12}^{(0)} & a_{23}^{(0)} - m_{21}a_{13}^{(0)} \\ a_{31}^{(0)} - m_{31}a_{11}^{(0)} & a_{32}^{(0)} - m_{31}a_{12}^{(0)} & a_{33}^{(0)} - m_{31}a_{13}^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{bmatrix} = A^{(1)}$$

$\Rightarrow \underline{M^{(0)}A^{(0)} = A^{(1)}}$, ONDE $A^{(1)}$ É A MESMA MATRIZ OBTIDA AO FINAL DA ETAPA 1 DO PROCESSO DE GAUSS.

* ETAPA 2: O MULTIPLICADOR É

$$m_{32} = \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$$

SUPONDO $a_{22}^{(1)} \neq 0$.

$\Rightarrow$ PARA ELIMINAR A VARIÁVEL x_2 DA LINHA 3 EFETUAMOS A OPERAÇÃO

$$(E_3 - m_{32}E_2) \longrightarrow (E_3)$$

* ISTO EQUIVALE A MULTIPLICAR A MATRIZ $A^{(1)}$ PELA MATRIZ

$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

POIS

$$M^{(1)}A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} - m_{32}a_{22}^{(1)} & a_{33}^{(1)} - m_{32}a_{23}^{(1)} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix} = A^{(2)}$$

PORTANTO,

$\underline{M^{(1)}A^{(1)} = A^{(2)}}$, ONDE $A^{(2)}$ É A MESMA MATRIZ OBTIDA AO FINAL DA ETAPA 2 DO PROCESSO DE GAUSS.

$\Rightarrow A^{(2)}$ É <u>TRIANGULAR SUPERIOR</u>

RESUMINDO: $A^{(0)} = A$

$$A^{(1)} = M^{(0)}A^{(0)} = M^{(0)}A$$

$$A^{(2)} = M^{(1)}A^{(1)} = M^{(1)}M^{(0)}A$$

$$\therefore\ A = \left[M^{(1)}M^{(0)}\right]^{-1}A^{(2)} = \left[M^{(0)}\right]^{-1}\left[M^{(1)}\right]^{-1}A^{(2)}$$

É FÁCIL VERIFICAR QUE

$$\left[M^{(0)}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{E} \quad \left[M^{(1)}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \left[M^{(0)}\right]^{-1}\left[M^{(1)}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ <u>TRIANGULAR</u> <u>INFERIOR</u> COM DIAGONAL UNITÁRIA

ASSIM, OBTIVEMOS

$$A = LU$$

ONDE

$$L \equiv \left[M^{(1)}\right]^{-1}\left[M^{(2)}\right]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

E

$$U \equiv A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} \end{bmatrix}$$

*OBSERVAÇÕES:

i) SE CALCULARMOS O DETERMINANTE DA MATRIZ A NO EXEMPLO ACIMA, OBTEREMOS

$$\det A = (\det L)(\det U) = 1 \times a_{11}^{(2)} a_{22}^{(2)} a_{33}^{(2)}$$

ESTE RESULTADO É GERAL: QUANDO EFETUAMOS A FATORAÇÃO DE UMA MATRIZ A COMO $A = LU$, ONDE

$$L = (l_{ij}) \equiv \text{TRIANGULAR INFERIOR},$$
$$\text{COM } l_{ii} = 1,\ 1 \leq i \leq n$$

$$U = (u_{ij}) \equiv \text{TRIANGULAR SUPERIOR}$$

OBTEMOS QUE

$$\det A = u_{11} u_{22} \cdots u_{nn}$$

ii) A FATORAÇÃO APRESENTADA ACIMA, QUE EXIGE VALORES IGUAIS A 1 NA DIAGONAL DE L É CONHECIDA COMO MÉTODO DE DOOLITTLE.
EXISTE TAMBÉM O MÉTODO DE CROUT, QUE REQUER VALORES IGUAIS A 1 NA DIAGONAL DE U.

iii) UMA VEZ OBTIDA A FATORAÇÃO LU DA MATRIZ A, A SOLUÇÃO DE UM SISTEMA NA FORMA

$$A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b} \quad \therefore \quad LU\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$$

É OBTIDA RESOLVENDO-SE

$$L\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{b} \quad \text{PARA } \underset{\sim}{y}, \text{ ONDE } L = (l_{ij})$$

E A SEGUIR RESOLVENDO-SE

$$U\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y} \quad \text{PARA } \underset{\sim}{x}, \text{ ONDE } U = (u_{ij})$$

* COMO L É TRIANGULAR INFERIOR:

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$$

E

$$y_i = \frac{1}{l_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, y_j\right], \quad i = 2, 3, \ldots, n$$

* COMO U É TRIANGULAR SUPERIOR:

$$x_n = \frac{y_n}{u_{nn}}$$

E

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}}\left[y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}\, x_j\right], \quad i = 1, \ldots, n-1$$

* ALGORITMO: FATORAÇÃO LU

OBJETIVO: FATORAR A MATRIZ $A=(a_{ij})$, $n\times n$, NO PRODUTO $A=LU$, ONDE $L=(l_{ij})$ É TRIANGULAR INFERIOR, E $U=(u_{ij})$ É TRIANGULAR SUPERIOR. PODE-SE ESCOLHER DIAGONAL PRINCIPAL UNITÁRIA EM L OU EM U.

ENTRADAS DIMENSÃO n
ENTRADAS a_{ij}, $1\le i,j\le n$
DIAGONAL $l_{11}=\dots=l_{nn}=1$ DE L OU
DIAGONAL $u_{11}=\dots=u_{nn}=1$ DE U.

SAÍDAS ENTRADAS l_{ij} E u_{ij}, $1\le i,j\le n$.

PASSO 1 SELECIONE l_{11} E u_{11} TAIS QUE $l_{11}u_{11}=a_{11}$.
SE $l_{11}u_{11}=0$ ENTÃO SAÍDA ('FATORAÇÃO IMPOSSÍVEL');
PARE.

PASSO 2 PARA $j=2,\dots,n$ FAÇA $u_{1j}=a_{1j}/l_{11}$; (1ª LINHA DE U)
$l_{j1}=a_{j1}/u_{11}$. (1ª COLUNA DE L)

PASSO 3 PARA $i=2,\dots,n-1$ SIGA OS PASSOS 4 E 5.

PASSO 4 SELECIONE l_{ii} E u_{ii} SATISFAZENDO

$$l_{ii}u_{ii}=a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{ki};$$

SE $l_{ii}u_{ii}=0$ ENTÃO SAÍDA ('FATORAÇÃO IMPOSSÍVEL');
PARE.

PASSO 5 PARA $j=i+1,\dots,n$

FAÇA $$u_{ij}=\frac{1}{l_{ii}}\left[a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}\right];$$ (i-ÉSIMA LINHA DE U)

$$l_{ji}=\frac{1}{u_{ii}}\left[a_{ji}-\sum_{k=1}^{i-1} l_{jk}u_{ki}\right].$$ (i-ÉSIMA COLUNA DE L)

(CONTINUA)

PASSO 6 SELECIONE l_{nn} E u_{nn} SATISFAZENDO

$$l_{nn}u_{nn} = a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}u_{kn}.$$

PASSO 7 SAÍDA (l_{ij} PARA $j=1,\ldots,i$ E $i=1,\ldots,n$);

SAÍDA (u_{ij} PARA $j=i,\ldots,n$ E $i=1,\ldots,n$);

PARE.

OBSERVAÇÃO: SE $l_{nn}u_{nn}=0$, A FATORAÇÃO LU AINDA É POSSÍVEL, MAS A MATRIZ A É SINGULAR, i.e., NÃO-INVERSÍVEL.