- Fatoração LU com pivoteamento parcial

* A estratégia de fatoramento anterior assumia que o sistema $\underset{\sim}{A x} = \underset{\sim}{b}$ podia ser resolvido por eliminação de Gauss sem intercâmbio de linhas.

  => Quando estratégias de pivoteamento são necessárias, a abordagem precisa ser modificada.

  => Introduziremos uma classe de matrizes que são utilizadas para permutar as linhas de uma matriz dada.

* Definição: Uma matriz quadrada de ordem n é uma matriz de permutação se pode ser obtida da matriz identidade de mesma ordem permutando-se suas linhas (ou colunas).

* Propriedades da matriz de permutação:

  i) Se P é uma matriz de permutação, a sua inversa, P^{-1} existe, e é igual à transposta P^T:

$$P^{-1} = P^T$$

  ii) O produto PA, onde A é uma matriz qualquer, permuta as linhas de A, e a permutação é a mesma efetuada na matriz identidade para se obter P.

– Seja o sistema linear

$$A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$$

que pode ser resolvido pela eliminação de Gauss com a possibilidade de intercâmbio de linhas.

$\Rightarrow$ Existe um rearranjo de equações no sistema que possibilita a eliminação de Gauss sem o intercâmbio de linhas,

i.e., existe a matriz de permutação P tal que

$$PA\underset{\sim}{x} = P\underset{\sim}{b}$$

admite solução sem intercâmbio

$\Rightarrow$ a matriz PA pode ser fatorada em

$$PA = LU$$

onde L é triangular inferior
U é triangular superior

Assim,

$$LU\underset{\sim}{x} = P\underset{\sim}{b}$$

$\Rightarrow$ podemos resolver os sistemas triangulares

$$\begin{cases} L\underset{\sim}{y} = P\underset{\sim}{b} & \text{para } \underset{\sim}{y} \\ U\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y} & \text{para } \underset{\sim}{x} \end{cases}$$

onde $\underset{\sim}{x}$ é a solução do sistema original

2.4 FATORAÇÃO DE CHOLESKY

* DEFINIÇÃO: UMA MATRIZ $A: n \times n$ É **DEFINIDA POSITIVA** SE

$$\underset{\sim}{x}^T A \underset{\sim}{x} > 0 \, , \quad \forall \underset{\sim}{x} \in \mathbb{R}^n, \underset{\sim}{x} \neq 0$$

* TEOREMA: A MATRIZ **SIMÉTRICA** A SERÁ **DEFINIDA POSITIVA** SE E SOMENTE SE A ELIMINAÇÃO DE GAUSS SEM INTERCÂMBIO DE LINHAS PUDER SER FEITA NO SISTEMA $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ COM TODOS OS **ELEMENTOS PIVÔS POSITIVOS**.

* COROLÁRIO 1: A MATRIZ **SIMÉTRICA** A SERÁ DEFINIDA POSITIVA SE E SOMENTE SE A PUDER SER FATORADA NO FORMATO

$$LDL^T$$

ONDE L É A TRIANGULAR INFERIOR COM VALORES **1 NA DIAGONAL**, E D É UMA MATRIZ **DIAGONAL** COM **ENTRADAS POSITIVAS**.

* COROLÁRIO 2: A MATRIZ **SIMÉTRICA** A SERÁ DEFINIDA POSITIVA SE E SOMENTE SE A PUDER SER FATORADA NO FORMATO

$$GG^T$$

ONDE G É UMA MATRIZ **TRIANGULAR INFERIOR** COM **DIAGONAL ESTRITAMENTE POSITIVA**.

OBSERVAÇÕES:

i) O COROLÁRIO 2 PODE SER FACILMENTE OBTIDO DO COROLÁRIO 1:

SE $A = LDL^T$, PODEMOS ESCREVER

$$A = L\bar{D}\bar{D}L^T = GG^T$$

ONDE $G = L\bar{D}$, COM $\bar{d}_{ii} = \sqrt{d_{ii}}$

ii) QUALQUER MATRIZ $A: n \times n$ QUE ADMITA FATORAÇÃO LU PODE SER FATORADA, DE FORMA ÚNICA, COMO

$$A = LD\bar{U}$$

ONDE

$L: n \times n$, TRIANGULAR INFERIOR COM DIAGONAL UNITÁRIA

$D: n \times n$, DIAGONAL

$\bar{U}: n \times n$, TRIANGULAR SUPERIOR COM DIAGONAL UNITÁRIA

SE A É SIMÉTRICA,

$$\bar{U} = L^T$$

SE A É DEFINIDA POSITIVA, OS ELEMENTOS DE D SÃO ESTRITAMENTE POSITIVOS.

iii) A FATORAÇÃO

$$A = GG^T$$

PARA A SIMÉTRICA E DEFINIDA POSITIVA SE CHAMA FATORAÇÃO DE CHOLESKY.

* TEOREMA: FATORAÇÃO DE CHOLESKY

SE $A: n \times n$ É UMA MATRIZ SIMÉTRICA E DEFINIDA POSITIVA, ENTÃO EXISTE UMA ÚNICA MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR $G: n \times n$, COM DIAGONAL POSITIVA, TAL QUE $A = GG^T$.

* ALGORITMO: FATORAÇÃO DE CHOLESKY

OBJETIVO: FATORAR A MATRIZ $A: n \times n$ SIMÉTRICA E DEFINIDA POSITIVA EM GG^T, ONDE G É TRIANGULAR INFERIOR

ENTRADA DIMENSÃO n; ENTRADAS a_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, DE A.

SAÍDA ENTRADAS g_{ij}, $1 \leq j \leq i$ E $1 \leq i \leq n$, DE G.
(AS ENTRADAS DE G^T SÃO g_{ji}, $i \leq j \leq n$ E $1 \leq i \leq n$)

Passo 1 Faça $g_{11} = \sqrt{a_{11}}$.

Passo 2 Para $j = 2, \ldots, n$, Faça $g_{j1} = a_{j1}/g_{11}$.

Passo 3 Para $i = 2, \ldots, n-1$ siga os passos 4 e 5.

Passo 4 Faça $g_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2\right)^{1/2}$.

Passo 5 Para $j = i+1, \ldots, n$

Faça $g_{ji} = \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{jk} g_{ik}\right) / g_{ii}$.

Passo 6 Faça

$$g_{nn} = \left(a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1} g_{nk}^2\right)^{1/2}.$$

Passo 7 Saída (g_{ij}, $j = 1, \ldots, i$ e $i = 1, \ldots, n$);

PARE.

OBSERVAÇÕES:

i) OBTIDO O FATOR G, A RESOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ PROSSEGUE COM A RESOLUÇÃO DOS SISTEMAS TRIANGULARES

$$A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b} \iff (GG^T)\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b} \Rightarrow \begin{cases} i)\ G\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{b} \\ ii)\ G^T\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{y} \end{cases}$$

ii) A OBTENÇÃO DO FATOR DE CHOLESKY, NO ALGORITMO ANTERIOR, SE FAZ PELA RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO MATRICIAL

$$A = GG^T$$

$$\therefore \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & & & \\ g_{21} & g_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & \cdots & g_{n1} \\ & g_{22} & \cdots & g_{n2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & g_{nn} \end{pmatrix}$$

iii) NA PRÁTICA, APLICA-SE A FATORAÇÃO DE CHOLESKY PARA VERIFICAR SE UMA DADA MATRIZ SIMÉTRICA É DEFINIDA POSITIVA.
SE O ALGORITMO FALHAR, i.e., SE EM ALGUMA ETAPA TIVERMOS $\left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2\right) < 0$, A MATRIZ DADA NÃO É DEFINIDA POSITIVA.

3. MÉTODOS ITERATIVOS

⇒ APROPRIADOS PARA SISTEMAS GRANDES, COM GRANDE PORCENTAGEM DE ENTRADAS NULAS.

⇒ GENERALIZAM O MÉTODO DO PONTO FIXO:

O SISTEMA $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$ É CONVERTIDO PARA A FORMA EQUIVALENTE

$$\underset{\sim}{x} = T\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{c}$$

ONDE T E $\underset{\sim}{c}$ SÃO UMA MATRIZ E UM VETOR FIXOS

⇒ $\varphi(\underset{\sim}{x}) = T\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{c}$ É UMA FUNÇÃO DE ITERAÇÃO NA FORMA MATRICIAL

⇒ A PARTIR DO VETOR INICIAL $\underset{\sim}{x}^{(0)}$, A SEQUÊNCIA $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ É GERADA POR

$$\underset{\sim}{x}^{(k)} = T\underset{\sim}{x}^{(k-1)} + \underset{\sim}{c}\ , \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

ATÉ QUE UM CRITÉRIO DE PARADA SEJA ATENDIDO

e.g., $d^{(k)} < \varepsilon$

ONDE $d^{(k)} = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|$

OU $d_r^{(k)} < \varepsilon$

ONDE $$d_r^{(k)} = \frac{d^{(k)}}{\max\limits_{1 \le i \le n} |x_i^{(k)}|}$$

3.1 MÉTODO ITERATIVO DE GAUSS-JACOBI:

DADO O SISTEMA ORIGINAL, $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad &\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

⇒ SOLUCIONAMOS A i-ÉSIMA EQUAÇÃO, MEDIANTE A SEPARAÇÃO PELA DIAGONAL, COMO

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left(-\frac{a_{ij}x_j}{a_{ii}} \right) + \frac{b_i}{a_{ii}} \quad , \; i = 1, 2, \dots, n \quad a_{ii} \neq 0$$

E, A PARTIR DA APROXIMAÇÃO INICIAL $\underset{\sim}{x}^{(0)}$, EMPREGAMOS A RELAÇÃO RECURSIVA

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} -a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i \right], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

NESTE CASO,

$$\underset{\sim}{x}^{(k)} = T\underset{\sim}{x}^{(k-1)} + \underset{\sim}{c}$$

COM

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12}/a_{11} & \dots & -a_{1n}/a_{11} \\ -a_{21}/a_{22} & 0 & & -a_{2n}/a_{22} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1}/a_{nn} & -a_{n2}/a_{nn} & & 0 \end{pmatrix} \qquad \underset{\sim}{c} = \begin{pmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \vdots \\ b_n/a_{nn} \end{pmatrix}$$

– CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA

CONDIÇÃO SUFICIENTE PARA A CONVERGÊNCIA DO MÉTODO ITERATIVO DE GAUSS-JACOBI:

* TEOREMA: CRITÉRIO DAS LINHAS

SEJA O SISTEMA LINEAR $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$.

SEJAM

$$\alpha_k = \frac{1}{|a_{kk}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|$$

E $\alpha = \max\limits_{1 \le k \le n} \alpha_k$

SE $\alpha < 1$, ENTÃO O MÉTODO DE GAUSS-JACOBI GERA UMA SEQÜÊNCIA $\{x^{(k)}\}$ CONVERGENTE PARA A SOLUÇÃO DO SISTEMA DADO, INDEPENDENTEMENTE DA ESCOLHA DE $\underset{\sim}{x}^{(0)}$.

OBSERVAÇÃO: QUANDO O CRITÉRIO DAS LINHAS NÃO FOR SATISFEITO, DEVEMOS TENTAR UMA PERMUTAÇÃO DE LINHAS E/OU COLUNAS DE FORMA A OBTERMOS UMA DISPOSIÇÃO QUE SATISFAÇA O CRITÉRIO. NO ENTANTO, NEM SEMPRE ISTO É POSSÍVEL.

*ALGORITMO: MÉTODO DE GAUSS-JACOBI

OBJETIVO: Resolver $A\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{b}$, dada uma aproximação inicial $\underset{\sim}{x}^{(0)}$.

ENTRADA Número de equações e incógnitas, n;
Entradas a_{ij}, $1 \le i, j \le n$;
Entradas b_i, $1 \le i \le n$;
Entradas XO_i, $1 \le i \le n$ de $\underset{\sim}{XO} = \underset{\sim}{x}^{(0)}$;
Tolerância TOL;
Número máximo de iterações N.

SAÍDA Solução aproximada $x_1, \dots, x_n$ ou mensagem de falha

Passo 1 Faça $k = 1$.

Passo 2 Enquanto $k \le N$ siga os passos 3-6.

Passo 3 Para $i = 1, \dots, n$ faça

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[-\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} XO_j + b_i \right]$$

Passo 4 Se $\|\underset{\sim}{x} - \underset{\sim}{XO}\| < TOL$ então SAÍDA$(x_1, \dots, x_n)$;
PARE.

Passo 5 Faça $k = k + 1$.

Passo 6 Para $i = 1, \dots, n$ faça $XO_i = x_i$.

Passo 7 SAÍDA ('Número máximo de iterações excedido')
PARE.

3.2 MÉTODO ITERATIVO DE GAUSS-SEIDEL:

$\Rightarrow$ NO MOMENTO DE CALCULAR $x_j^{(k+1)}$ USAMOS TODOS OS VALORES $x_1^{(k+1)}, \dots, x_{j-1}^{(k+1)}$ QUE JÁ FORAM CALCULADOS NA PRESENTE ITERAÇÃO, E OS VALORES $x_{j+1}^{(k)} \dots x_n^{(k)}$ RESTANTES, i.e.,

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[-\sum_{j=1}^{i-1} (a_{ij} x_j^{(k)}) - \sum_{j=i+1}^{n} (a_{ij} x_j^{(k-1)}) + b_i \right]$$

OBSERVAÇÃO: NA FORMA MATRICIAL, O ESQUEMA DE GAUSS-SEIDEL PODE SER ESCRITO COMO

$$\underset{\sim}{x}^{(k)} = T \underset{\sim}{x}^{(k-1)} + \underset{\sim}{c}$$

COM $T = (D-L)^{-1} U$ E $\underset{\sim}{c} = (D-L)^{-1} \underset{\sim}{b}$

ONDE

$$A = D - L - U$$

COM $D \equiv$ MATRIZ DIAGONAL CUJAS ENTRADAS SÃO AS ENTRADAS DIAGONAIS DE A

$-L \equiv$ PARTE ESTRITAMENTE TRIANGULAR INFERIOR DE A

$-U \equiv$ PARTE ESTRITAMENTE TRIANGULAR SUPERIOR DE A

DA MESMA FORMA, PARA O ESQUEMA DE GAUSS-JACOBI OBTEMOS

$$T = D^{-1}(L+U) \quad \text{E} \quad \underset{\sim}{c} = D^{-1} \underset{\sim}{b}$$

- CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA:

i) CRITÉRIO DE SASSENFELD

SEJAM

$$\beta_1 = \frac{1}{|a_{11}|}\left[|a_{12}| + |a_{13}| + \dots + |a_{1n}|\right]$$

E

$$\beta_j = \frac{1}{|a_{jj}|}\left[\underbrace{|a_{j1}|\beta_1 + |a_{j2}|\beta_2 + \dots + |a_{jj-1}|\beta_{j-1}}_{\sum_{i=1}^{j-1}|a_{ji}|\beta_i} + \underbrace{|a_{jj+1}| + \dots + |a_{jn}|}_{\sum_{i=j+1}^{n}|a_{ji}|}\right]$$

SEJA $\beta = \max\limits_{1 \le j \le n} \beta_j$

SE $\beta < 1$, ENTÃO O MÉTODO DE GAUSS-SEIDEL GERA UMA SEQUÊNCIA CONVERGENTE, QUALQUER QUE SEJA $\underset{\sim}{x}^{(0)}$.

ii) CRITÉRIO DAS LINHAS

O CRITÉRIO DAS LINHAS, APLICADO AO MÉTODO DE GAUSS-JACOBI TAMBÉM SE APLICA AO DE GAUSS-SEIDEL:

SE O CRITÉRIO DAS LINHAS É SATISFEITO, AUTOMATICAMENTE, O DE SASSENFELD TAMBÉM O É. MAS DEVE-SE OBSERVAR QUE O ÚLTIMO PODE SER SATISFEITO SEM QUE O PRIMEIRO O SEJA,

i.e., O MÉTODO DE SEIDEL PODE CONVERGIR QUANDO O DE JACOBI NÃO CONVERGE

(E A RECÍPROCA TAMBÉM É VERDADEIRA)