

IV. INTRODUÇÃO À RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

1. SISTEMAS DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES:

$$\left. \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{SISTEMA DE } n \text{ EQUAÇÕES} \\ \text{A } n \text{ INCOGNITAS} \end{array}$$

\Rightarrow CADA FUNÇÃO f_i MAPeia O VETOR $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ DO \mathbb{R}^n NA RETA REAL \mathbb{R}

\Rightarrow O SISTEMA PODE SER REPRESENTADO COMO

$$\underline{F}(\underline{x}) = \underline{0}$$

ONDE

$$\underline{F}(x_1, \dots, x_n) = [f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n)]^T$$

MAPeia \mathbb{R}^n EM \mathbb{R}^n

* AS FUNÇÕES f_1, f_2, \dots, f_n SÃO CHAMADAS DE FUNÇÕES COMPONENTES DE \underline{F} .

* SUPONHAMOS QUE $\underline{F}(\underline{x})$ ESTÁ DEFINIDA NUM CONJUNTO ABERTO $D \subset \mathbb{R}^n$, QUE TEM DERIVADAS CONTÍNUAS NÍ, E QUE EXISTE $\underline{x}^* \in D$ TAL QUE $\underline{F}(\underline{x}^*) = \underline{0}$.

* DEFINIÇÃO: VECTOR GRADIENTE

DADA A FUNÇÃO $f_i(x_1, \dots, x_m)$, O VETOR DAS SUAS DERIVADAS PARCIAIS É CHAMADO VETOR GRADIENTE DE f_i , DENOTADO POR

$$\nabla f_i(\underline{x}) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \frac{\partial f_i}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_m} \right]^T$$

* DEFINIÇÃO: MATRIZ JACOBIANA

$$J(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(\underline{x})^T \\ \nabla f_2(\underline{x})^T \\ \vdots \\ \nabla f_m(\underline{x})^T \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\underline{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\underline{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(\underline{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\underline{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\underline{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m}(\underline{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\underline{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\underline{x}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(\underline{x}) \end{bmatrix}$$

ex.:

SISTEMA $\begin{cases} x_1^3 - 3x_1x_2^2 + 1 \\ 3x_1^2x_2 - x_2^3 \end{cases} \Rightarrow J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - 3x_2^2 & -6x_1x_2 \\ 6x_1x_2 & 3x_1^2 - 3x_2^2 \end{pmatrix}$

- RESOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

4.3

⇒ MÉTODOS NUMÉRICOS ITERATIVOS:

* DADA A APROXIMAÇÃO INICIAL $\tilde{x}^{(0)}$, GERAMOS UMA SEQUÊNCIA $\{\tilde{x}^{(k)}\}$ TAL QUE

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{x}^{(k)} = \tilde{x}^*$$

* CRITÉRIOS DE PARADA

$$\text{e.g., } \|F(\tilde{x}^{(k)})\| < \varepsilon$$

ou

$$\|\tilde{x}^{(k+1)} - \tilde{x}^{(k)}\| < \varepsilon$$

ONDE $\|\cdot\|$ É UMA NORMA DE VETORES

e.g., NORMA INFINITO

$$\|\tilde{x}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

PARA $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$

PODEMOS TAMBÉM INTERROMPER O PROCESSO QUANDO UMA DIVERGÊNCIA É DETECTADA

e.g., QUANDO $\|F(\tilde{x}^{(k)})\|$ TORNA-SE

MUITO GRANDE.

2. MÉTODO DE NEWTON

4.4

* OS MÉTODOS MAIS COMUNS PARA RESOLVER SISTEMAS NÃO LINEARES BASEIAM-SE EM EXTENSÕES DO MÉTODO DE NEWTON UNIDIMENSIONAL

* NO CASO UNIDIMENSIONAL, O MÉTODO DE NEWTON É O MÉTODO DE ITERAÇÃO DO PONTO FIXO QUE LEVA A CONVERGÊNCIA QUADRÁTICA

* OS MÉTODOS DE ITERAÇÃO DO PONTO FIXO GERAM SEQUÊNCIAS $\{x^{(k)}\}$ DE ACOMO COM

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$$

ONDE g É UMA FUNÇÃO DE ITERAÇÃO, DA FORMA

$$g(x) = x - \phi(x)f(x)$$

* AS SEQUÊNCIAS GERADAS CONVERTEM PARA O PONTO FIXO p TAL QUE $g(p) = p$ E $f(p) = 0$, DESDE QUE $\phi(p) \neq 0$.

* O MÉTODO DE NEWTON É OBTIDO PELA ESCOLHA

$$\phi(x) = 1/f'(x)$$

ASSUMINDO-SE QUE

$$f'(x) \neq 0.$$

* No Caso Multidimensional, A Função de Iteração 4.5
Geral Tem a Forma

$$\tilde{G}(\tilde{x}) = \tilde{x} - \tilde{A}(\tilde{x})^{-1} \tilde{F}(\tilde{x})$$

Onde $\tilde{A}(\tilde{x})$ é uma Matriz.

* Neste caso, o Método de Newton é obtido pela
Escolha

$$\tilde{A}(\tilde{x}) = \tilde{J}(\tilde{x}) \equiv \text{Matriz Jacobiana}$$

* A Iteração Funcional Agora Assume a Forma

$$\tilde{x}^{(k+1)} = \tilde{G}(\tilde{x}^{(k)}) = \tilde{x}^{(k)} - \tilde{J}^{-1}(\tilde{x}^{(k)}) \tilde{F}(\tilde{x}^{(k)})$$

$$\therefore \tilde{J}(\tilde{x}^{(k)}) (\tilde{x}^{(k+1)} - \tilde{x}^{(k)}) = - \tilde{F}(\tilde{x}^{(k)})$$

$$\therefore \tilde{J}(\tilde{x}^{(k)}) \tilde{y} = - \tilde{F}(\tilde{x}^{(k)})$$

Onde Definimos

$$\tilde{y} = \tilde{x}^{(k+1)} - \tilde{x}^{(k)}$$

* Uma Iteração do Método de Newton consiste em:

i) Avaliar a Matriz Jacobiana na Aproximação
Corrente, $\tilde{x}^{(k)}$.

ii) Resolver o Sistema Linear $\tilde{J}(\tilde{x}^{(k)}) \tilde{y} = - \tilde{F}(\tilde{x}^{(k)})$
Para o Passo de Newton, \tilde{y}

iii) Obter a Nova Aproximação, $\tilde{x}^{(k+1)} = \tilde{x}^{(k)} + \tilde{y}$

* ALGORITMO: MÉTODO DE NEWTON PARA SISTEMAS

4.6

OBJETIVO: APROXIMAR A SOLUÇÃO DE UM SISTEMA NÃO LINEAR $\underline{F}(\underline{x}) = \underline{0}$, PARA UMA APROXIMAÇÃO INICIAL \underline{x} .

ENTRADA NÚMERO DE EQUAÇÕES E INCÓGNITAS, n ;
APROXIMAÇÃO INICIAL $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$;
TOLERÂNCIA TOL ;
NÚMERO MÁXIMO DE ITERAÇÕES N .

Saída Solução Aproximada $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ OU Mensagem de Falha.

Passo 1 Faça $k=1$.

Passo 2 Enquanto $k \leq N$ siga os Passos 3-7.

Passo 3 Calcule $\underline{F}(\underline{x})$ e $\underline{J}(\underline{x})$, onde $J(\underline{x})_{ij} = \frac{\partial f_i(\underline{x})}{\partial x_j}$
para $1 \leq i, j \leq n$.

Passo 4 Resolva o sistema linear $n \times n$ $\underline{J}(\underline{x}) \underline{y} = -\underline{F}(\underline{x})$.

Passo 5 Faça $\underline{x} = \underline{x} + \underline{y}$

Passo 6 Se $\|\underline{y}\| < TOL$ Então Saída (\underline{x}); (Sucesso)
Parar.

Passo 7 Faça $k=k+1$.

Passo 8 Saída ('Número Máximo de Iterações Excedido');
Parar.

OBSERVAÇÕES:

4.7

- i) Na resolução do sistema linear $J(\underline{x})\underline{y} = -\underline{f}(\underline{x})$ podem-se empregar procedimentos de fatoração da matriz Jacobiana.
- ii) Também podem ser empregados métodos iterativos, que fornecem uma aproximação para o passo de Newton, \underline{y} . Neste caso tem-se o método de Newton exato.
- iii) Para evitar a necessidade de calcular a matriz Jacobiana para cada aproximação $\underline{x}^{(k)}$, uma modificação do método de Newton consiste em tomar, a cada iteração, a matriz $J(\underline{x}^{(0)})$ em lugar de $J(\underline{x}^{(k)})$. Neste caso, a matriz de coeficientes do sistema linear é calculada uma única vez para todas as iterações, mas a convergência não é mais quadrática.
- iv) Uma outra possível modificação do método de Newton baseia-se numa generalização, para o caso multidimensional, do método da secante. Neste caso, a matriz Jacobiana é substituída por uma matriz de aproximação, que é atualizada a cada iteração. Este tipo de método também é chamado de quasi-Newton.

3. MÉTODOS QUASI-NEWTON

4.8

* O MÉTODO DA SECANTE UNIDIMENSIONAL É BASEADO NA FUNÇÃO DE ITERAÇÃO

$$g(x) = x - \phi(x)f(x)$$

ONDE $\phi^{-1}(x)$ É UMA APROXIMAÇÃO DA DERIVADA $f'(x)$ SOB A FORMA

$$\phi^{-1}(x^{(k)}) = \frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}}$$

* DE MODO SEMELHANTE, OS MÉTODOS QUASI-NEWTON BASEIAM-SE NA FUNÇÃO DE ITERAÇÃO

$$\underline{G}(\underline{x}) = \underline{x} - \underline{A}^{-1}(\underline{x})\underline{F}(\underline{x})$$

ONDE A MATRIZ $\underline{A}(\underline{x})$ É ATUALIZADA A CADA ITERAÇÃO, E SATISFAZ A EQUAÇÃO

$$\underline{A}_k(\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^{(k-1)}) = \underline{F}(\underline{x}^{(k)}) - \underline{F}(\underline{x}^{(k-1)})$$

CONHECIDA COMO EQUAÇÃO SECANTE.

* NO ENTANTO, ESTA EQUAÇÃO NÃO É SUFICIENTE PARA DETERMINAR OS n^2 ELEMENTOS DA MATRIZ \underline{A}_k , E OS DIFERENTES MÉTODOS QUASI-NEWTON IMPOEM DIFERENTES CONDIÇÕES ADICIONAIS SOBRE ESSA MATRIZ.

* Pêlos Correções Adicionais Propostas por Broyden, ^{4.9}
 A Matriz A_k É Determinada Em Cada Iteração
 Por

$$A_k = A_{k-1} + \frac{y^{(k)} - A_{k-1} \tilde{s}^{(k)}}{[\tilde{s}^{(k)}]^T \tilde{s}^{(k)}}, \text{ com } A_0 = J(x_0) \quad (\text{Jacobian})$$

onde

$$y^{(k)} = F(\tilde{x}^{(k)}) - F(\tilde{x}^{(k-1)})$$

$$\tilde{s}^{(k)} = \tilde{x}^{(k)} - \tilde{x}^{(k-1)}$$

* A Aproximação Iterativa Para A Solução Do Sistema
 É Então Obtida Como

$$\tilde{x}^{(k+1)} = \tilde{x}^{(k)} - A_k^{-1} F(\tilde{x}^{(k)})$$

* ALGORITMO: MÉTODO DE BROYDEN

OBJETIVO: APROXIMAR A SOLUÇÃO DE UM SISTEMA
NÃO-LINEAR $\underline{F}(\underline{x}) = \underline{0}$, DADA UMA
APROXIMAÇÃO INICIAL \underline{x} .

ENTRADA COMO NO MÉTODO DE NEWTON

Saída COMO NO MÉTODO DE NEWTON

PASSO 1 FAÇA $A_0 = J(\underline{x})$, ONDE $J(\underline{x})_{ij} = \frac{\partial f_i(\underline{x})}{\partial x_j}$, $1 \leq i, j \leq n$;

$$\underline{N} = \underline{F}(\underline{x}). \quad (\underline{N} = \underline{F}(\underline{x}^{(0)}))$$

PASSO 2 FAÇA $A = A_0^{-1}$.

PASSO 3 FAÇA $\underline{S} = -A\underline{N}$; ($\underline{S} = \underline{S}^{(1)}$)

$$\underline{x} = \underline{x} + \underline{S}; \quad (\underline{x} = \underline{x}^{(2)})$$

$$k = 2.$$

PASSO 4 ENQUANTO $k \leq N$ SIGA OS PASSOS 5-13.

PASSO 5 FAÇA $\underline{W} = \underline{N}$; (SALVA \underline{N})

$$\underline{N} = \underline{F}(\underline{x});$$

$$\underline{Y} = \underline{N} - \underline{W}.$$

PASSO 6 FAÇA $\underline{Z} = -A\underline{Y}$. ($\underline{Z} = -A_{k-1}^{-1}\underline{Y}_k$)

PASSO 7 FAÇA $\underline{P} = -\underline{S}^T \underline{Z}$. ($\underline{P} = \underline{S}_k^T A_{k-1}^{-1} \underline{Y}_k$)

PASSO 8 FAÇA $\underline{M}^T = \underline{S}^T A$.

PASSO 9 FAÇA $A = A + \frac{1}{\underline{P}}(\underline{S} + \underline{Z})\underline{M}^T$. ($A = A_k^{-1}$)

PASSO 10 FAÇA $\underline{S} = -A\underline{N}$. ($\underline{S} = -A_k^{-1}\underline{F}(\underline{x}^{(k)})$)

PASSO 11 FAÇA $\underline{x} = \underline{x} + \underline{S}$. ($\underline{x} = \underline{x}^{(k+1)}$)

PASSO 12 SE $\|\underline{S}\| < \text{TOL}$, ENTÃO Saída(\underline{x});

PASSO 13 FAÇA $k = k + 1$. Parar.

PASSO 14 Saída ('Número máx. de ITS. excedido'); Parar.