2. MÉTODO DE NEWTON

* SEJA $P_n(x)$ O POLINÔMIO DE GRAU IGUAL OU INFERIOR A n QUE CONCORDA COM A FUNÇÃO $f(x)$ NOS $n+1$ PONTOS DISTINTOS $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

* O MÉTODO DE NEWTON EXPRESSA $P_n(x)$ NA FORMA

$$P_n(x) = d_0 + d_1(x-x_0) + d_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots$$
$$+ d_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

ONDE AS CONSTANTES APROPRIADAS

$$d_0, d_1, d_2, \ldots, d_n$$

SÃO AS CHAMADAS DIFERENÇAS DIVIDIDAS, DE ORDEM ZERO, UM, DOIS, ETC., ATÉ n.

e.g., PARA DETERMINAR d_0, SUBSTITUÍMOS $x = x_0$ NA FORMA DE NEWTON PARA $P_n(x)$.

OBTEMOS

$$d_0 = P_n(x_0) = f(x_0)$$

DA MESMA FORMA, SUBSTITUINDO $x = x_1$ EM $P_n(x)$, OBTEMOS

$$d_0 + d_1(x_1 - x_0) = P_n(x_1) = f(x_1)$$

$$\therefore d_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

* PROSSEGUINDO DO MESMO MODO, OBTERÍAMOS PARA AS CONSTANTES d_k, NO CASO GERAL,

$$d_k = f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$$

ONDE A NOTAÇÃO

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$$

INDICA A DIFERENÇA DIVIDIDA DE ORDEM k, PARA A FUNÇÃO $f(x)$, DEFINIDA COMO

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_k] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

* POR EXEMPLO:

ORDEM ZERO: $f[x_0] = f(x_0)$

ORDEM 1: $f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$

ORDEM 2: $f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$

ORDEM 3: $f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}$

ETC.

– CÁLCULO DAS DIFERENÇAS DIVIDIDAS

* DADA A FUNÇÃO $f(x)$, E CONHECIDOS OS SEUS VALORES NOS PONTOS $x_0, x_1, \dots, x_m$; PODEMOS CONSTRUIR A TABELA:

x	ORDEM 0	ORDEM 1	ORDEM 2	ORDEM 3
x_0	$f[x_0]$			
		$f[x_0, x_1]$		
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$	
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
		$f[x_2, x_3]$		$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$	
		$f[x_3, x_4]$		
x_4	$f[x_4]$			

ETC.

– FÓRMULA INTERPOLADORA DAS DIFERENÇAS DIVIDIDAS DE NEWTON

$$P_m(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{m} f[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0)\dots(x - x_{k-1})$$

* ALGORITMO: FÓRMULA DAS DIFERENÇAS DIVIDIDAS DE NEWTON

OBJETIVO: CALCULAR OS COEFICIENTES DE DIFERENÇAS DIVIDIDAS DO POLINÔMIO INTERPOLADOR P ENTRE OS $(n+1)$ PONTOS DISTINTOS $x_0, x_1, \ldots, x_n$, DADA A FUNÇÃO f.

ENTRADA NÚMEROS $x_0, x_1, \ldots, x_n$;

VALORES $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ COMO $F_{00}, F_{10}, \ldots, F_{n0}$.

SAÍDA OS NÚMEROS $F_{00}, F_{11}, \ldots, F_{nn}$ $(F_{ii} = f[x_0, \ldots, x_i])$

ONDE

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} F_{ii} \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j).$$

PASSO 1 PARA $i = 1, 2, \ldots, n$

PARA $j = 1, 2, \ldots, i$

FAÇA

$$F_{ij} = \frac{F_{i,j-1} - F_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}.$$

PASSO 2 SAÍDA $(F_{00}, F_{11}, \ldots, F_{nn})$;

PARE.

* OBSERVAÇÕES:

i) NO CÁLCULO DA FÓRMULA INTERPOLADORA, O NÚMERO DE OPERAÇÕES PODE SER REDUZIDO EMPREGANDO-SE A FORMA DOS PARÊNTESES ENCAIXADOS:

$$P_n(x) = f[x_0] + (x-x_0)\{f[x_0,x_1] + (x-x_1)\{$$
$$\{f[x_0,x_1,x_2] + (x-x_2)\{f[x_0,x_1,x_2,x_3] + \dots +$$
$$+ (x-x_{n-1}) f[x_0,x_1,\dots,x_n]\dots\}\}\}$$

ii) A DIFERENÇA DIVIDIDA É SIMÉTRICA NOS SEUS ARGUMENTOS, i.e.,

$$f[x_0,x_1,\dots,x_k] = f[x_{j0},x_{j1},\dots,x_{jk}]$$

ONDE $j_0, j_1, \dots j_k$ É QUALQUER PERMUTAÇÃO DE $0,1,\dots,k$.

iii) APLICANDO O TEOREMA DO VALOR MÉDIO À FÓRMULA DA DIFERENÇA DIVIDIDA DE ORDEM 1, PODEMOS RELACIONÁ-LA À DERIVADA DE $f(x)$, i.e.,

COMO $f[x_0,x_1] = \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$, SE $f'(x)$ EXISTE

$f[x_0,x_1] = f'(\xi)$ PARA ALGUM NÚMERO ξ ENTRE x_0 E x_1.

ESTE RESULTADO É GENERALIZADO PELO TEOREMA À SEGUIR:

* TEOREMA: SE $f \in C^n[a,b]$ E $x_0, x_1, \dots, x_n$ SÃO NÚMEROS DISTINTOS EM $[a,b]$, ENTÃO EXISTE UM NÚMERO ξ EM (a,b) TAL QUE

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

iv) A RELAÇÃO ENTRE A DIFERENÇA DIVIDIDA DE ORDEM k E A k-ÉSIMA DERIVADA DE $f(x)$ PODE AUXILIAR NA ESCOLHA DO GRAU DO POLINÔMIO A SER USADO PARA A INTERPOLAÇÃO:

* DEVE-SE CONSTRUIR A TABELA DAS DIFERENÇAS DIVIDIDAS E EXAMINÁ-LA NA VIZINHANÇA DO PONTO DE INTERESSE.

SE NESTA VIZINHANÇA AS DIFERENÇAS DIVIDIDAS DE ORDEM k FOREM PRATICAMENTE CONSTANTES (OU SE AS DIFERENÇAS DE ORDEM $k+1$ VARIAREM EM TORNO DE ZERO), PODEMOS CONCLUIR QUE UM POLINÔMIO DE GRAU k DARÁ UMA BOA APROXIMAÇÃO NA VIZINHANÇA DO PONTO DE INTERESSE.

v) QUANDO OS NÓS DE INTERPOLAÇÃO SÃO IGUALMENTE ESPAÇADOS, i.e.,

$$x_j = x_0 + jh$$

ONDE h É O PASSO ENTRE OS NÓS, PODEMOS UTILIZAR A FORMA DE NEWTON-GREGORY PARA O POLINÔMIO INTERPOLADOR

– FORMA DE NEWTON-GREGORY:

* DADO O PASSO h, DEFINIMOS AS DIFERENÇAS ORDINÁRIAS

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+h) - \Delta f(x)$$

$$\vdots$$

$$\Delta^n f(x) = \Delta^{n-1} f(x+h) - \Delta^{n-1} f(x)$$

COM $\Delta^0 f(x) = f(x)$

* AS DIFERENÇAS ORDINÁRIAS RELACIONAM-SE ÀS DIFERENÇAS DIVIDIDAS COMO

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = \frac{\Delta^k f(x_0)}{h^k k!}$$

* O POLINÔMIO INTERPOLADOR PODE ENTÃO SER REESCRITO COMO

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta^k f(x_0)}{h^k k!} (x - x_0) \dots (x - x_{k-1})$$

* INTRODUZINDO A VARIÁVEL $s = \frac{x - x_0}{h} \therefore x = sh + x_0$

DE MODO QUE $(x - x_j) = (s - j)h$, OBTEMOS A FORMA ALTERNATIVA

$$P_n(x) \equiv P_n(x_0 + sh) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \binom{s}{k} \Delta^k f(x_0)$$

ONDE $\binom{s}{k} = \frac{s!}{k!(s-k)!}$.

3. ERRO NA INTERPOLAÇÃO

* TEOREMA: SEJAM $x_0, x_1, \ldots, x_n$ NÚMEROS DISTINTOS NO INTERVALO $[a,b]$, E SEJA $f \in C^{n+1}[a,b]$. ENTÃO, PARA CADA x EM $[a,b]$ EXISTE UM NÚMERO $\xi(x)$ EM (a,b) TAL QUE

$$\varepsilon_n(x) = f(x) - P_n(x) =$$
$$= (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}$$

ONDE $P_n(x)$ É O POLINÔMIO INTERPOLADOR DE $f(x)$ NOS PONTOS $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

* OBSERVAÇÃO: O TEOREMA ACIMA TEM IMPORTÂNCIA TEÓRICA, PORQUE NA PRÁTICA O PONTO $\xi(x)$ NUNCA É CONHECIDO.
NO ENTANTO, DOIS COROLÁRIOS FORNECEM LIMITANTES PARA O ERRO $\varepsilon_n(x)$.

* COROLÁRIO 1: SOB AS HIPÓTESES DO TEOREMA ACIMA, SE $f^{(n+1)}(x)$ FOR CONTÍNUA NO INTERVALO $I = [x_0, x_n]$, VALE A SEGUINTE RELAÇÃO:

$$|\varepsilon_n(x)| \leq |(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)|\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$$

ONDE

$$M_{n+1} = \max_{x \in I} |f^{(n+1)}(x)|$$

* COROLÁRIO 2: SE ALÉM DAS HIPÓTESES ANTERIORES OS PONTOS $x_0, x_1, \ldots, x_n$ FOREM ASSUMIDOS IGUALMENTE ESPAÇADOS, i.e.,

$$x_k - x_{k-1} = h$$

ENTÃO,

$$|E_n(x)| < \frac{h^{n+1} M_{n+1}}{4(n+1)}, \quad \forall x.$$

* OBSERVAÇÕES: i) SE $f(x)$ É DADA EM FORMA DE TABELA, NÃO É POSSÍVEL CALCULAR M_{n+1}.
NESTE CASO, PODEMOS CONSTRUIR A TABELA DE DIFERENÇAS DIVIDIDAS ATÉ A ORDEM $(n+1)$ E USAR O MAIOR VALOR EM MÓDULO DESSAS DIFERENÇAS COMO APROXIMAÇÃO PARA $M_{n+1}/(n+1)!$

ii) QUANDO SE USAM PONTOS IGUALMENTE ESPAÇADOS, PODE-SE PROVAR QUE A FUNÇÃO

$$G(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

ASSUME SEU MÓDULO MÁXIMO EM UM DOS INTERVALOS: (x_0, x_1) OU (x_{n-1}, x_n).
ASSIM, PARA MINIMIZAR O ERRO, AO SE INTERPOLAR O VALOR DE UMA FUNÇÃO NUM PONTO $\bar{x}$, USANDO UM SUBCONJUNTO DE $k+1$ NÓS DE INTERPOLAÇÃO $(k<n)$, DEVEMOS ESCOLHER OS PONTOS DE TAL MODO QUE $\bar{x}$ FIQUE O MAIS CENTRAL POSSÍVEL ENTRE ELES.

4. INTERPOLAÇÃO INVERSA

$\Rightarrow$ DADA UMA TABELA DE VALORES $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, \ldots, n$ O PROBLEMA DA INTERPOLAÇÃO INVERSA CONSISTE EM OBTER O VALOR $\bar{x}$ TAL QUE

$$f(\bar{x}) = \bar{y}$$

PARA UM $\bar{y}$ ESPECIFICADO, $\bar{y} \in (f(x_0), f(x_n))$

- FORMAS DE ABORDAGEM:

i) OBTER O POLINÔMIO $P_n(x)$ QUE INTERPOLA $f(x)$ EM $x_0, x_1, \ldots, x_n$, E EM SEGUIDA ENCONTRAR $\bar{x}$ TAL QUE

$$P_n(\bar{x}) = \bar{y}$$

NESTE CASO É IMPOSSÍVEL OBTER UMA ESTIMATIVA DO ERRO COMETIDO SOBRE $\bar{x}$, JÁ QUE A INTERPOLAÇÃO É FEITA SOBRE $f(x)$.

ii) SE $f(x)$ FOR INVERSÍVEL NUM INTERVALO CONTENDO $\bar{y}$, FAZEMOS A INTERPOLAÇÃO DE

$$x = f^{-1}(y) \equiv g(y)$$

SE $f(x)$ FOR DADA NA FORMA DE TABELA, SUPOREMOS QUE ELA SEJA MONÓTONA SE $f(x_0) < f(x_1) < \ldots < f(x_n)$ OU SE $f(x_0) > f(x_1) > \cdots > f(x_n)$.

NESTE CASO, A FUNÇÃO f É INVERSÍVEL, E INTERPOLAMOS $g(y)$ POR $P_n(y)$.