ANÁLISE NUMÉRICA

V. INTERPOLAÇÃO

* DEFINIÇÃO: INTERPOLAR UMA FUNÇÃO $f(x)$ CONSISTE EM APROXIMAR ESSA FUNÇÃO POR UMA OUTRA FUNÇÃO $g(x)$, ESCOLHIDA DENTRO UMA CLASSE DE FUNÇÕES DEFINIDA A PRIORI E QUE SATISFAÇA ALGUMAS PROPRIEDADES.

  $\Rightarrow$ A FUNÇÃO $g(x)$ É ENTÃO USADA EM SUBSTITUIÇÃO À FUNÇÃO $f(x)$.

- EMPREGOS DA INTERPOLAÇÃO:

  i) QUANDO OS VALORES NUMÉRICOS DA FUNÇÃO $f(x)$ SÃO CONHECIDOS APENAS EM UM CONJUNTO RESTRITO DE PONTOS, E SE NECESSITA CALCULÁ-LA EM OUTROS PONTOS.

  ii) QUANDO A FUNÇÃO $f(x)$ TEM UMA EXPRESSÃO QUE DIFICULTA OU IMPEDE OPERAÇÕES COMO A DIFERENCIAÇÃO OU A INTEGRAÇÃO.

- INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

  $\Rightarrow$ A FUNÇÃO INTERPOLANTE, $g(x)$, PERTENCE À CLASSE DOS POLINÔMIOS ALGÉBRICOS, i.e., DAS FUNÇÕES DA FORMA

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \ , \quad n \geq 1$$

ONDE OS a_i SÃO CONSTANTES REAIS.

OBSERVAÇÕES: i) OS POLINÔMIOS ALGÉBRICOS PERMITEM APROXIMAR, DE MANEIRA UNIFORME, FUNÇÕES CONTÍNUAS, DE ACORDO COM O TEOREMA DE WEIERSTRASS.

* TEOREMA: TEOREMA DA APROXIMAÇÃO DE WEIERSTRASS

SEJA f DEFINIDA E CONTÍNUA EM $[a,b]$. PARA CADA $\varepsilon > 0$, EXISTE UM POLINÔMIO $P(x)$ COM A SEGUINTE PROPRIEDADE:

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \,, \quad \forall\, x \in [a,b]$$

ii) OS POLINÔMIOS TAMBÉM APRESENTAM A VANTAGEM DE QUE A SUA DERIVADA E INTEGRAL SÃO FÁCEIS DE DETERMINAR, E TAMBÉM SÃO POLINÔMIOS.

iii) EXISTEM POLINÔMIOS INTERPOLATIVOS QUE SÃO DETERMINADOS SIMPLESMENTE ESPECIFICANDO-SE CERTOS PONTOS NO PLANO ATRAVÉS DOS QUAIS OS POLINÔMIOS DEVEM PASSAR.

* TEOREMA: EXISTE UM ÚNICO POLINÔMIO $P(x)$, DE GRAU IGUAL OU INFERIOR A n, QUE PASSA PELOS $(n+1)$ PONTOS $(x_k, f(x_k))$, $k = 0, 1, \ldots, n$,

i.e., $\quad P(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots, n.$

SE $x_k \neq x_j$, PARA $k \neq j$

- DEMONSTRAÇÃO:

SE O GRAU DO POLINÔMIO É n:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

$\Rightarrow$ PRECISAMOS OBTER OS $n+1$ COEFICIENTES $a_0, a_1, \dots, a_n$

COM A CONDIÇÃO

$$P(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, 1, \dots, n$$

MONTAMOS O SISTEMA LINEAR A $(n+1)$ EQUAÇÕES E INCÓGNITAS

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

COMO A MATRIZ DOS COEFICIENTES

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

TEM $\det A \neq 0$, DESDE QUE $x_0, \dots, x_n$ SEJAM PONTOS DISTINTOS, O SISTEMA LINEAR TEM SOLUÇÃO ÚNICA.

– OBTENÇÃO DO POLINÔMIO INTERPOLANTE:

* EMBORA, EM PRINCÍPIO, O POLINÔMIO $P(x)$ QUE INTERPOLA UMA FUNÇÃO $f(x)$ DADA, EM UM CONJUNTO $x_0, x_1, \dots, x_n$ DE PONTOS DADOS POSSA SER OBTIDO PELA RESOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR ASSOCIADO, MUITAS VEZES A MATRIZ DOS COEFICIENTES PODE SER <u>MAL</u> <u>CONDICIONADA</u>

i.e., PEQUENAS ALTERAÇÕES NOS COEFICIENTES PODEM ACARRETAR GRANDES ALTERAÇÕES NA SOLUÇÃO DO SISTEMA

⇒ ESTUDAREMOS FORMAS ALTERNATIVAS DE DETERMINAÇÃO DOS POLINÔMIOS: <u>MÉTODO DE LAGRANGE</u>

<u>MÉTODO DE NEWTON</u>

* OBSERVAÇÃO: TEORICAMENTE, AS TRÊS FORMAS DE OBTENÇÃO DO POLINÔMIO INTERPOLANTE DEVEM LEVAR AO MESMO RESULTADO.

A ESCOLHA DE UM OU OUTRO MÉTODO DEVE RESPONDER A CONSIDERAÇÕES PRÁTICAS, POR EXEMPLO DE TEMPO COMPUTACIONAL.

1. MÉTODO DE LAGRANGE

* CASO PARTICULAR: DETERMINAR UM POLINÔMIO DE 1º GRAU QUE PASSE PELOS PONTOS (x_0, y_0) E (x_1, y_1).

⇒ EQUIVALE A INTERPOLAR UMA FUNÇÃO f PARA A QUAL

$$f(x_0) = y_0$$
$$f(x_1) = y_1$$

POR MEIO DE UM POLINÔMIO DE 1º GRAU.

* SOLUÇÃO DE LAGRANGE:

⇒ DEFINIMOS AS FUNÇÕES

$$L_0(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \quad \therefore \begin{cases} L_0(x_0) = 1 \\ L_0(x_1) = 0 \end{cases}$$

$$L_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \quad \therefore \begin{cases} L_1(x_0) = 0 \\ L_1(x_1) = 1 \end{cases}$$

E O POLINÔMIO INTERPOLANTE POR

$$P(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1)$$

ASSIM, $P(x_0) = 1 . f(x_0) + 0 . f(x_1) = f(x_0) \equiv y_0$

$$P(x_1) = 0 . f(x_0) + 1 . f(x_1) = f(x_1) \equiv y_1$$

⇒ $P(x)$ É A ÚNICA FUNÇÃO LINEAR (i.e., UMA RETA) PASSANDO POR (x_0, y_0) E (x_1, y_1).

⇒ ESTE É UM EXEMPLO DE INTERPOLAÇÃO LINEAR

* GENERALIZANDO: QUEREMOS OBTER UM POLINÔMIO DE GRAU $\leq n$ QUE PASSE PELOS $(n+1)$ PONTOS $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, ONDE $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$.

* SOLUÇÃO DE LAGRANGE:

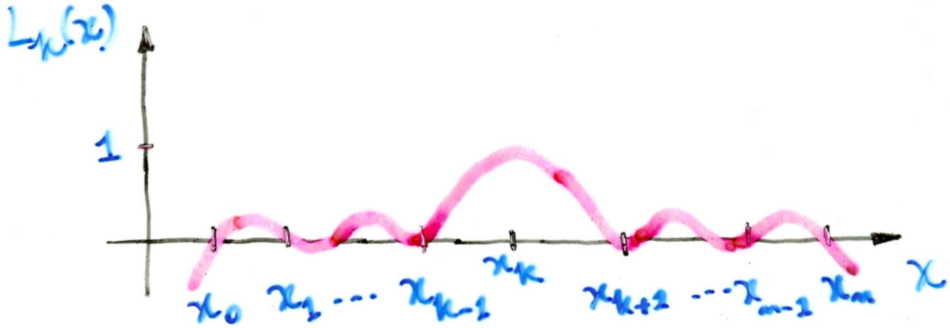
$\Rightarrow$ PRECISAMOS CONSTRUIR, PARA CADA $k = 0, 1, \ldots, n$ UMA FUNÇÃO $L_k(x)$ COM A PROPRIEDADE

$$\begin{cases} L_k(x_i) = 0, & \text{para } i \neq k \\ L_k(x_k) = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ DEFINIMOS $L_k(x)$ POR

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

$\Rightarrow$ COMO NO NUMERADOR TEMOS UM PRODUTO DE n FATORES DA FORMA $(x - x_i)$, $i = 0, \ldots, n$, COM $i \neq k$, ENTÃO A FUNÇÃO $L_k(x)$ É UM POLINÔMIO DE GRAU n.



⇒ O POLINÔMIO INTERPOLADOR FICA DEFINIDO COMO

$$P(x) = f(x_0)\,L_0(x) + \dots + f(x_m)\,L_m(x)$$

QUE É UM POLINÔMIO DE GRAU IGUAL OU INFERIOR A m.

– EM NOTAÇÃO MAIS COMPACTA:

$$\begin{cases} P(x) = \sum_{k=0}^{m} f(x_k)\,L_k(x) \\ \text{com} \\ L_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{m} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)} \end{cases}$$

OBSERVAÇÕES: i) UMA NOTAÇÃO MAIS PRECISA PARA O POLINÔMIO INTERPOLADOR DE LAGRANGE DE m-ÉSIMO GRAU É $L_{m,k}(x)$. A FORMA MAIS SIMPLES, $L_k(x)$ PODE SER USADA QUANDO NÃO HOUVER POSSIBILIDADE DE DÚVIDA QUANTO AO GRAU DO POLINÔMIO.

ii) NA PRÁTICA, NÃO SE CONHECE O GRAU DA INTERPOLAÇÃO DE LAGRANGE NECESSÁRIO PARA SE OBTER A PRECISÃO DESEJADA. ASSIM, OS RESULTADOS SÃO CALCULADOS COM VÁRIOS POLINÔMIOS, ATÉ QUE A CONCORDÂNCIA APROPRIADA SEJA OBTIDA. PARA ISSO, É IMPORTANTE QUE OS POLINÔMIOS DE ORDEM CRESCENTE SEJAM CALCULADOS DE FORMA RECURSIVA, O QUE FAZ O MÉTODO DE NEVILLE.

- MÉTODO DE NEVILLE:

* DEFINIÇÃO: SEJA f UMA FUNÇÃO DEFINIDA EM $(n+1)$ PONTOS, $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

SUPONHAMOS QUE $m_1, m_2, \ldots, m_k$ SEJAM k NÚMEROS INTEIROS DIFERENTES, COM $0 \leq m_i \leq n$, $\forall i$.

O POLINÔMIO DE LAGRANGE QUE CONCORDA COM $f(x)$ NOS k PONTOS

$$x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_k}$$

SE DENOTA POR

$$P_{m_1, m_2, \ldots, m_k}(x).$$

e.g., SE $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 6$

E $f(x) = e^x$

$\Rightarrow$ $P_{1,2,4}(x)$ É O POLINÔMIO QUE CONCORDA COM $f(x)$ EM $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ E $x_4 = 6$

i.e.,

$$P_{1,2,4}(x) = \frac{(x-3)(x-6)}{(2-3)(2-6)} e^2 + \frac{(x-2)(x-6)}{(3-2)(3-6)} e^3 + \frac{(x-2)(x-3)}{(6-2)(6-3)} e^6$$

- O TEOREMA SEGUINTE, RELATIVO AOS $P_{m_1,\dots,m_k}(x)$, IMPLICA QUE OS POLINÔMIOS DE INTERPOLAÇÃO PODEM SER GERADOS DE FORMA RECURSIVA:

* TEOREMA: SE f ESTÁ DEFINIDA EM $x_0, x_1, \dots, x_k$, E SE x_i E x_j SÃO DOIS PONTOS DISTINTOS NESSE CONJUNTO, ENTÃO O POLINÔMIO DE LAGRANGE DE k-ÉSIMO GRAU QUE INTERPOLA f NOS $k+1$ PONTOS $x_0, x_1, \dots, x_k$ É

$$P(x) = \left[(x-x_j)P_{0,1,\dots,j-1,j+1,\dots k}(x) - (x-x_i)P_{0,1,\dots,i-1,i+1,\dots k}(x)\right] / (x_i - x_j)$$

$\Rightarrow$ O POLINÔMIO DE LAGRANGE QUE CONCORDA COM $f(x)$ NOS $k+1$ PONTOS DADOS, $x_0, \dots, x_k$, É OBTIDO A PARTIR DE DOIS POLINÔMIOS QUE CONCORDAM COM $f(x)$ EM APENAS k DESSES PONTOS.

e.g., $f(x) = \log x$

$x_0 = 2.0$, $x_1 = 2.2$, $x_2 = 2.3$

$\therefore P_0 = f(x_0) = \log(2.0) = 0.6931$

$P_1 = f(x_1) = \log(2.2) = 0.7885$

$P_2 = f(x_2) = \log(2.3) = 0.8329$

⇒ CÁLCULO DOS POLINÔMIOS QUE APROXIMAM $f(x)$ EM **DOIS PONTOS**:

$$P_{0,1}(x) = \frac{(x-x_0)P_1 - (x-x_1)P_0}{(x_1-x_0)}$$

$$= \frac{1}{0.2}\left[0.7885(x-2.0) - 0.6931(x-2.2)\right]$$

$$P_{1,2}(x) = \frac{(x-x_1)P_2 - (x-x_2)P_1}{(x_2-x_1)}$$

$$= \frac{1}{0.1}\left[0.8329(x-2.2) - 0.7885(x-2.3)\right]$$

⇒ CÁLCULO DO POLINÔMIO QUE APROXIMA $f(x)$ EM **TRÊS PONTOS**:

$$P_{0,1,2}(x) = \frac{(x-x_2)P_{0,1} - (x-x_0)P_{1,2}}{(x_0-x_2)} =$$

$$= \frac{-1}{0.3}\left[(x-2.3)P_{0,1} - (x-2.0)P_{1,2}\right]$$

e.g., SE QUEREMOS INTERPOLAR $f(x)$ EM $x=2.1$

$$f(2.1) = \log(2.1) \simeq \frac{1}{0.3}\left[P_{1,2}(2.1)\times 0.1 + P_{0,1}(2.1)\times 0.2\right] =$$

$$= 0.7419$$

- ALGORITMO DE NEVILLE:

* NOTAÇÃO COMPACTA: PARA EVITAR O USO DE ÍNDICES MÚLTIPLOS, INTRODUZIMOS A NOTAÇÃO

$$Q_{ij}(x), \text{ para } 0 \leq j \leq i$$

ONDE

$$Q_{ij} = P_{i-j,\, i-j+1, \ldots, i-1, i}$$

e.g., para $n=4$:

x_0 $\quad P_0 = Q_{0,0}$

x_1 $\quad P_1 = Q_{1,0} \quad P_{0,1} = Q_{1,1}$

x_2 $\quad P_2 = Q_{2,0} \quad P_{1,2} = Q_{2,1} \quad P_{0,1,2} = Q_{2,2}$

x_3 $\quad P_3 = Q_{3,0} \quad P_{2,3} = Q_{3,1} \quad P_{1,2,3} = Q_{3,2} \quad P_{0,1,2,3} = Q_{3,3}$

x_4 $\quad P_4 = Q_{4,0} \quad P_{3,4} = Q_{4,1} \quad P_{2,3,4} = Q_{4,2} \quad P_{1,2,3,4} = Q_{4,3}$

e $P_{0,1,2,3,4} = Q_{4,4}$

*ALGORITMO: INTERPOLAÇÃO DE NEVILLE

OBJETIVO: CALCULAR O POLINÔMIO DE INTERPOLAÇÃO P, DADOS OS VALORES DA FUNÇÃO f NOS $(n+1)$ PONTOS DISTINTOS $x_0, \ldots, x_n$.

ENTRADA NÚMEROS $x_0, x_1, \ldots, x_n$;

VALORES $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ PARA A PRIMEIRA COLUNA $Q_{00}, Q_{10}, \ldots, Q_{n0}$ DE Q.

SAÍDA A TABELA Q, ONDE $P(x) = Q_{nn}$.

PASSO 1 PARA $i = 1, 2, \ldots, n$

PARA $j = 1, 2, \ldots, i$

FAÇA
$$Q_{ij} = \frac{(x - x_{i-j})Q_{i,j-1} - (x - x_i)Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}.$$

PASSO 2 SAÍDA (Q);

PARE.