ANÁLISE NUMÉRICA

VII. INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

* MOTIVAÇÃO: CALCULAR A INTEGRAL DEFINIDA DE UMA FUNÇÃO CUJA PRIMITIVA NÃO É CONHECIDA.

* ABORDAGEM: OS MÉTODOS EMPREGADOS NA OBTENÇÃO DE APROXIMAÇÕES DE TAIS INTEGRAIS SÃO CONHECIDOS COMO MÉTODOS DE QUADRATURA, E TÊM A FORMA GERAL

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

DIFERINDO NA ESCOLHA DO CONJUNTO DOS NÓS $\{x_i\}$ E DOS COEFICIENTES $\{a_i\}$.

* FÓRMULAS DE NEWTON-COTES:

⇒ BASEIAM-SE NO USO DO POLINÔMIO INTERPOLADOR DE LAGRANGE, PARA UM CONJUNTO DE PONTOS IGUALMENTE ESPAÇADOS.

⇒ INCLUEM COMO CASO PARTICULAR A REGRA DO TRAPÉZIO E A REGRA DE SIMPSON.

* QUADRATURA GAUSSIANA:

⇒ ESCOLHE O CONJUNTO DE NÓS DE MANEIRA ÓTIMA, DE MODO A MINIMIZAR O ERRO DA APROXIMAÇÃO.

1. FÓRMULAS DE NEWTON-COTES

⇒ SELECIONAMOS UM CONJUNTO DE $n+1$ NÓS DISTINTOS $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ NO INTERVALO $[a,b]$, E EMPREGAMOS O POLINÔMIO INTERPOLADOR DE LAGRANGE DE GRAU n,

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(x)$$

ASSIM,

$$f(x) = P_n(x) + \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}$$

ONDE $\xi(x) \in (a,b)$.

⇒ A INTEGRAL SE TORNA

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i) + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) f^{(n+1)}(\xi(x))\,dx$$

ONDE

$$a_i = \int_a^b L_i(x)\,dx \quad , \quad i = 0, 1, \dots, n$$

⇒ FÓRMULA DE QUADRATURA:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

⇒ ERRO DA APROXIMAÇÃO:

$$E(f) = \frac{1}{(n+1)!} \int_a^b \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) f^{(n+1)}(\xi(x))\,dx$$

1.1 CASOS PARTICULARES: REGRAS DO TRAPÉZIO E DE SIMPSON

⇒ UTILIZAMOS NÓS IGUALMENTE ESPAÇADOS

* REGRA DO TRAPÉZIO:

⇒ POLINÔMIO LINEAR DE LAGRANGE

$x_0 = a\ ,\ x_1 = b\ ,\ h = b - a$

$$\therefore\ P_1(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} f(x_1)$$

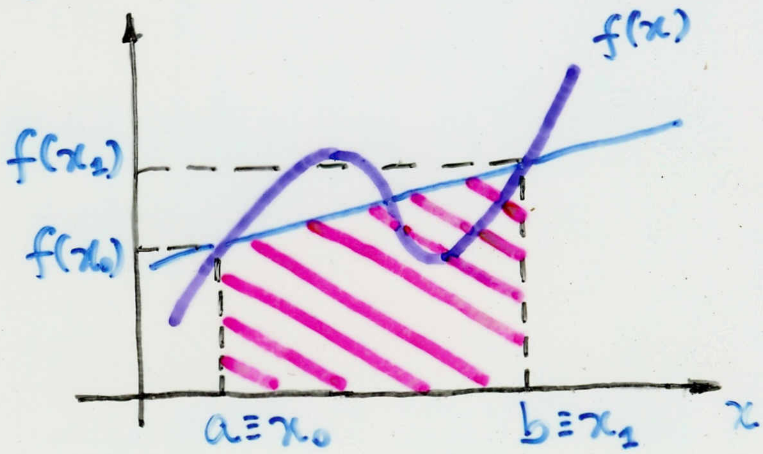
⇒ FÓRMULA DE QUADRATURA:

$$I_T = \int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{1}{2}\left[\frac{(x-x_1)^2}{(x_0-x_1)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{(x_1-x_0)} f(x_1) \right]\Bigg|_{a \equiv x_0}^{b \equiv x_1} =$$

$$= \frac{(x_1 - x_0)}{2}\left[f(x_0) + f(x_1) \right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1) \right]$$

⇒ I_T É A ÁREA DO TRAPÉZIO DE ALTURA h E BASES $f(x_0)$ E $f(x_1)$



⇒ ERRO DA APROXIMAÇÃO:

$$\varepsilon_T = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} f''(\xi(x))(x-x_0)(x-x_1)\,dx$$

* TEOREMA DO VALOR MÉDIO PONDERADO:

SE $f \in C[a,b]$ E g NÃO TROCA DE SINAL EM $[a,b]$,

EXISTE c EM (a,b) TAL QUE

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

⇒ CHAMANDO $g(x) = (x-x_0)(x-x_1)$, TEMOS QUE $g(x) < 0$,

PARA TODO x EM (a,b).

ASSIM,

$$\varepsilon_T = \frac{1}{2}f''(c)\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)(x-x_1)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}f''(c)\left[\frac{x^3}{3} - \frac{(x_1+x_0)}{2}x^2 + x_0x_1x\right]\Bigg|_{x_0}^{x_1}$$

$$= -\frac{h^3}{12}f''(c)$$

PARA c EM (x_0, x_1)

⇒ REGRA TRAPEZOIDAL:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_1)\right] - \frac{h^3}{12}f''(c)$$

ONDE $h = x_1 - x_0$.

* REGRA DE SIMPSON:

⇒ POLINÔMIO DE LAGRANGE DE 2ª ORDEM

$x_0 = a,\ x_2 = b,\ x_1 = a + h;\ h = (b-a)/2$

$$\therefore P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} f(x_1) + $$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} f(x_2)$$

⇒ FÓRMULA DE QUADRATURA:

$$I_S = \frac{f(x_0)h}{2}\int_0^2 (z-1)(z-2)\,dz - f(x_1)h\int_0^2 z(z-2)\,dz +$$

$$+ \frac{f(x_2)h}{2}\int_0^2 z(z-1)\,dz$$

ONDE USAMOS: $z = \dfrac{x - x_0}{h} \therefore x = x_0 + zh \therefore dx = h\,dz$

ASSIM, $x - x_1 = (z-1)h$ E $x - x_2 = (z-2)h$

RESOLVENDO AS INTEGRAIS, OBTEMOS

$$I_S = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$$

⇒ ERRO DA APROXIMAÇÃO:

É POSSÍVEL MOSTRAR QUE $\mathcal{E}_S = -\dfrac{h^5}{90} f^{(4)}(c)$

⇒ REGRA 1/3 DE SIMPSON: $\displaystyle\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(c)$

* Generalização: Fórmulas Fechadas de Newton-Cotes

Fechada ⇒ inclui os pontos extremos do intervalo $[a,b]$ como nós.

- Fórmula fechada de $(n+1)$ pontos:

⇒ Polinômio de Lagrange de ordem n

$x_0 = a,\ x_n = b,\ x_i = x_0 + ih,\ i = 0, 1, \ldots, n;\ h = \frac{(b-a)}{n}$

⇒ Fórmula de quadratura:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

com

$$a_i = \int_{x_0}^{x_n} L_i(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}dx$$

⇒ Erro da aproximação:

* Teorema: Seja $f \in C^{n+2}[a,b]$. O erro na fórmula fechada de Newton-Cotes com $(n+1)$ pontos é

$$E_n = \frac{h^{n+3} f^{(n+2)}(\xi)}{(n+2)!}\int_0^n t^2(t-1)\ldots(t-n)dt, \text{ se } n \text{ é par}$$

$$E_n = \frac{h^{n+2} f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\int_0^n t(t-1)\ldots(t-n)dt, \text{ se } n \text{ é ímpar}$$

onde $\xi \in (a,b)$.

- OBSERVAÇÕES:

i) DA EXPRESSÃO PARA E_n CONCLUÍMOS QUE QUANDO n É PAR O GRAU DE PRECISÃO É $n+1$, AINDA QUE NESTE CASO O GRAU DO POLINÔMIO INTERPOLADOR SEJA n, ENQUANTO QUE, PARA n ÍMPAR, O GRAU DE PRECISÃO É SOMENTE n.

e.g., REGRA DO TRAPÉZIO: $n=1$

$\Rightarrow$ ERRO DA APROXIMAÇÃO $\sim f''$

$\Rightarrow$ INTEGRA SEM ERRO POLINÔMIOS DE GRAU IGUAL OU INFERIOR A 1.

REGRA DE SIMPSON: $n=2$

$\Rightarrow$ ERRO DA APROXIMAÇÃO $\sim f^{(4)}$

$\Rightarrow$ INTEGRA SEM ERRO POLINÔMIOS DE GRAU IGUAL OU INFERIOR A 3.

ii) NAS FÓRMULAS ABERTAS DE NEWTON-COTES, TODOS OS NÓS USADOS NA APROXIMAÇÃO ENCONTRAM-SE NO INTERVALO ABERTO (a,b).

iii) AS FÓRMULAS DE NEWTON-COTES SÃO GERALMENTE INADEQUADAS QUANDO O INTERVALO DE INTEGRAÇÃO É GRANDE.

NESTE CASO, DEVEM-SE UTILIZAR AS FORMAS COMPOSTAS OU REPETIDAS DA APROXIMAÇÃO, BASEADAS NA SUBDIVISÃO DO INTERVALO DE INTEGRAÇÃO.

1.2. INTEGRAÇÃO NUMÉRICA COMPOSTA

* REGRA DO TRAPÉZIO COMPOSTA:

⇒ SUBDIVIDIMOS O INTERVALO DE INTEGRAÇÃO $[a,b]$, E APLICAMOS A REGRA DO TRAPÉZIO REPETIDAMENTE.

SEJAM x_i, $i = 1, \dots, m-1$, OS PONTOS DE SUBDIVISÃO,

COM $x_{i+1} - x_i = h$, $x_0 = a$ E $x_m = b$.

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx =$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right] - \sum_{i=0}^{m-1} h^3 \frac{f''(c_i)}{12}$$

ONDE $c_i \in (x_i, x_{i+1})$

⇒ FÓRMULA DE QUADRATURA:

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}\left\{f(x_0) + 2\left[f(x_1) + \dots + f(x_{m-1})\right] + f(x_m)\right\}$$

⇒ ERRO DA APROXIMAÇÃO:

$$\varepsilon_{TR} = -\frac{h^3}{12} \sum_{i=0}^{m-1} f''(c_i) = \frac{-h^3}{12} m f''(\xi)$$ (PELO TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO)

$$\therefore \varepsilon_{TR} = -(b-a) h^2 f''(\xi)$$ (USANDO $m = \frac{b-a}{h}$)

PARA $\xi \in (a,b)$

* REGRA DE SIMPSON COMPOSTA:

⇒ SUBDIVIDIMOS O INTERVALO $[a,b]$ EM UM NÚMERO PAR, m, DE SUBINTERVALOS.

⇒ TEREMOS UM NÚMERO ÍMPAR DE PONTOS IGUALMENTE ESPAÇADOS, $x_0, x_1, \ldots, x_m$, COM $x_{i+1} - x_i = h$, $x_0 = a$ E $x_m = b$.

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{j=1}^{m/2} \int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} f(x)\,dx$$

(CADA POLINÔMIO UTILIZA 3 PONTOS CONSECUTIVOS)

$$= \sum_{j=1}^{m/2} \left\{ \frac{h}{3}\left[f(x_{2j-2}) + 4f(x_{2j-1}) + f(x_{2j})\right] \right\} -$$

$$- \frac{h^5}{90} \sum_{j=1}^{m/2} f^{(4)}(\xi_j) \quad , \text{ COM } x_{2j-2} < \xi_j < x_{2j}$$

⇒ FÓRMULA DE QUADRATURA:

COMO, PARA CADA $j = 1, 2, \ldots, (m/2)-1$, O TERMO $f(x_{2j})$ APARECE NO TERMO CORRESPONDENTE AO INTERVALO $[x_{2j-2}, x_{2j}]$ E TAMBÉM NO DE $[x_{2j}, x_{2j+2}]$, TEMOS

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 2\sum_{j=1}^{\frac{m}{2}-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{m/2} f(x_{2j-1}) + f(x_m)\right]$$

⇒ ERRO DA APROXIMAÇÃO:

$$\mathcal{E}_{SR} = -\frac{h^5}{90}\sum_{j=1}^{m/2} f^{(4)}(\xi_j) = -\frac{h^5}{90}\frac{m}{2} f^{(4)}(\xi) \,, \quad \xi \in (a,b)$$

(PELO TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO)

$$\therefore \; \mathcal{E}_{SR} = -\frac{(b-a)}{180} h^4 f^{(4)}(\xi) \,, \text{ para } \xi \in (a,b)$$

(USANDO $m = \frac{b-a}{h}$)

2. QUADRATURA GAUSSIANA

* FÓRMULA DE NEWTON-COTES COM $n+1$ PONTOS
  - ⇒ POLINÔMIO INTERPOLANTE DE GRAU n
  - ⇒ INTEGRA EXATAMENTE POLINÔMIOS DE GRAU

$\leq n$, SE n É ÍMPAR

$\leq n+1$, SE n É PAR

* QUADRATURA GAUSSIANA COM $n+1$ PONTOS
  - ⇒ INTEGRA EXATAMENTE POLINÔMIOS DE GRAU

$\leq 2n+1$

FÓRMULA DE QUADRATURA:

$$\int_a^b f(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{n} a_i f(x_i)$$

⇒ PARÂMETROS LIVRES:

$n+1$ COEFICIENTES, a_i

$n+1$ NÓS, x_i

⇒ OBTEMOS ESTES $(2n+2)$ PARÂMETROS, IMPONDO A CONDIÇÃO DE QUE A FÓRMULA DE QUADRATURA SEJA EXATA PARA OS $(2n+2)$ POLINÔMIOS DE GRAU $\leq 2n+1$:

$$1, x, x^2, x^3, \ldots, x^{2n}, x^{2n+1}$$

EXEMPLO: PARA $n = 1$, ASSUMINDO $[a, b] \equiv [-1, 1]$

$\Rightarrow$ IMPOMOS QUE A FÓRMULA DE QUADRATURA SEJA EXATA PARA

$$f(x) = 1,\ f(x) = x,\ f(x) = x^2 \text{ e } f(x) = x^3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int_{-1}^{1} dx = a_0 1 + a_1 1 = 2 \\ \int_{-1}^{1} x\,dx = a_0 x_0 + a_1 x_1 = 0 \\ \int_{-1}^{1} x^2 dx = a_0 x_0^2 + a_1 x_1^2 = \frac{2}{3} \\ \int_{-1}^{1} x^3 dx = a_0 x_0^3 + a_1 x_1^3 = 0 \end{cases}$$

RESOLVENDO ESTE SISTEMA NÃO-LINEAR, OBTEMOS

$$a_0 = 1,\quad a_1 = 1,\quad x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ e } x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

* PARA INTEGRAÇÃO SOBRE O INTERVALO GENÉRICO

$$x \in [a, b]$$

FAZENDO UMA MUDANÇA DE VARIÁVEIS PARA

$$t \in [-1, 1]$$

i.e., $t = \dfrac{2x - a - b}{b - a} \therefore x = \frac{1}{2}\left[(b-a)t + a + b\right]$

$$dx = \frac{b-a}{2} dt$$

* OBSERVAÇÃO: FÓRMULAS PARA AS QUADRATURAS GAUSSIANAS COM $n > 1$ PODEM SER OBTIDAS DE MODO SEMELHANTE.

DEMONSTRA-SE QUE, PARA INTEGRAÇÃO NO INTERVALO $[-1, 1]$, OS NÓS PARA A QUADRATURA COM $(n+1)$ PONTOS SÃO OS ZEROS DO POLINÔMIO DE LEGENDRE DE GRAU $(n+1)$, E OS COEFICIENTES a_i SÃO DADOS POR

$$a_i = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \, dx$$

ONDE OS x_i SÃO AS RAÍZES DO POLINÔMIO DE LEGENDRE.